Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Anna Luisa Gilotti, Luigi Serena

Sottogruppi massimali dei sottogruppi di Sylow e complementi normali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **76** (1984), n.3, p. 161–166.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1984_8_76_3_161_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1984.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 10 marzo 1984

Presiede il Presidente della Classe Giuseppe Montalenti

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Teoria dei gruppi. — *Sottogruppi massimali dei sottogruppi di Sylow e complementi normali.* Nota di Anna Luisa Gilotti e Luigi Serena, presentata (*) dal Socio G. Zappa.

Summary. — In this Note conditions for the existence of a normal p-complement and for the supersolubility of a finite group are given.

1. Introduzione

In una Nota [1], S. Srinivasan osserva che i gruppi finiti nei quali i sottogruppi massimali dei p-sottogruppi di Sylow sono normali, risultano essere supersolubili e prova che, indebolendo l'ipotesi di normalità con quelle di π–quasinormalità e subnormalità, si ottiene, nel primo caso la supersolubilità, mentre nel secondo l'esistenza di una torre di Sylow.

Il concetto di sottogruppo fortemente chiuso in un p–sottogruppo di Sylow può essere riguardato come un'ulteriore generalizzazione del concetto di sottogruppo normale.

In questa Nota gli Autori forniscono alcuni criteri per l'esistenza di p–complementi di Sylow normali. Ad esempio, essi provano che: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo finito* G *possegga un p–complemento di Sylow normale è che, detto* P *un p–sottogruppo di Sylow di* G, *i sottogruppi massimali di* P *siano fortemente chiusi in* P *rispetto a* G *e*

$$(|N_G(P) : C_G(P)|, p-1) = 1 .$$

(*) Nella seduta del 10 marzo 1984.

Come conseguenza di tale criterio si ottiene che i gruppi finiti, nei quali i sottogruppi massimali dei p–sottogruppi di Sylow sono fortemente chiusi, risultano essere supersolubili.

Nella nota G indicherà un gruppo finito e le notazioni sono quelle usuali (v. Gorenstein [4]).

2. Sia G un gruppo e sia P un suo p–sottogruppo di Sylow. Un sottogruppo V di P si dice *debolmente chiuso in* P *rispetto a* G se per ogni $g \in G$ per cui $V^g \leq P$ segue $V^g = V$.

Si vede facilmente che se V è debolmente chiuso in P rispetto a G allora $N_G(V) \geq N_G(P)$.

Ricordiamo inoltre che un sottogruppo V di un p–sottogruppo di Sylow P di G si dice *fortemente chiuso in* P *rispetto a* G se $V^g \cap P \leq V$ per ogni $g \in G$. Chiaramente, se V è fortemente chiuso allora è anche debolmente chiuso in P rispetto a G.

I p–sottogruppi di Sylow dei sottogruppi normali sono esempi di sottogruppi fortemente chiusi e nei gruppi p–risolubili gli esempi sono solo di questo tipo.

Si prova facilmente che se V_1 e V_2 sono sottogruppi fortemente chiusi in P rispetto a G, allora $V_1 \cap V_2$ è fortemente chiuso in P rispetto a G.

Premettiamo il seguente

LEMMA 1. *Sia* P *un p–sottogruppo di Sylow di* G. *Sia* V *un sottogruppo di* P *fortemente chiuso in* P *rispetto a* G. *Allora* $(G' \cap P)\,V = (N' \cap P)\,V$ *dove* $N = N_G(V)$.

Dimostrazione. È il Teorema B (parte *b*) di [2].

LEMMA 2. *Sia* P *un p–sottogruppo di Sylow di* G *e sia* $P \leq H \leq G$. *Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

a) $G/O^p(G) \simeq H/O^p(H)$.

b) $G/O^p(G)\,G' \simeq H/O^p(H)\,H'$.

c) $P \cap G' = P \cap H'$.

d) $(P \cap G')\,\phi(P) = (P \cap H')\,\phi(P)$.

Dimostrazione. *a*) $\Rightarrow$ *b*) è banale. *b*) $\Rightarrow$ *c*) segue dal Lemma 6.15 Cap. X di [6] *c*) $\Rightarrow$ *d*) è banale.

Proviamo *d*) $\Rightarrow$ *a*).

Sia E (G) il più piccolo sottogruppo normale di G tale che G/E (G) è un p–gruppo abeliano elementare. Allora $E(G) = G'\,O^p(G)\,\phi(P)$.

Infatti, $E(G) \geq G'\,O^p(G)\,\phi(P)$. Ma $G'\,O^p(G)\,\phi(P)$ è un sottogruppo normale di G e $G/G'\,O^p(G)\,\phi(P)$ è un p-gruppo abeliano elementare.

Quindi, per definizione di $E(G)$ si ha $G' O^p (G) \phi (P) \geq E(G)$. Segue l'uguaglianza. Allora si ha $E(G) \cap P = G' O^p (G) \phi (P) \cap P = \phi (P) (G' O^p (G) \cap P)$. Ma $G' O^p (G) \cap P = G' \cap P$ per il Teorema 18.4 di [3].

Segue $E(G) \cap P = (G' \cap P) \phi (P) = (H' \cap P) \phi (P) = H' O^p (H) \phi (P) \cap P = E(H) \cap P$. Onde $P/E(G) \cap P \simeq P/E(H) \cap P$ e quindi $G/E(G) \simeq P/E(G) \cap P = P/E(H) \cap P \simeq H/E(H)$. Per il Teorema 20.2 di [3] si ha $G/O^p (G) \simeq H/O^p (H)$.

TEOREMA 1. *Sia* P *un p–sottogruppo di Sylow di* G. *Supponiamo che* $\phi (P)$ *sia fortemente chiuso in* P *rispetto a* G. *Allora* $G/O^p (G) \simeq N/O^p (N)$ *dove* $N = N_G (P)$.

Dimostrazione. Essendo $\phi (P)$ fortemente chiuso in P rispetto a G, per il Lemma 1 si ha $(G' \cap P) \phi (P) = (N_G (\phi (P))' \cap P) \phi (P)$. Procediamo per induzione su $| G |$.

Se $N_G (\phi (P)) < G$, per ipotesi induttiva, essendo $N \leq N_G (\phi (P))$, si ha $N_G (\phi (P))/O^p (N_G (\phi (P))) \simeq N/O^p (N)$ e quindi per il Lemma 2 $(P \cup N_G(\phi (P))') \phi (P) = (P \cap N') \phi (P)$. Segue $(G' \cap P) \phi (P) = (N' \cap P) \phi (P)$.

Ancora per il Lemma 2 segue $G/O^p (G) \simeq N/O^p (N)$.

Sia quindi $\phi (P) \trianglelefteq G$ e sia $\bar{G} = G/\phi (P)$.

Se $\bar{G} = G$, P è abeliano elementare ed il risultato segue dal secondo teorema di Grun. Supponiamo quindi $| \bar{G} | < | G |$.

Per ipotesi induttiva $\bar{G}/O^p (\bar{G}) \simeq \bar{N}/O^p (\bar{N})$ dove $\bar{N} = N_{\bar{G}} (P/\phi (P)) = N_G (P)/\phi (P) = N/\phi(P)$. Quindi

$$G/\phi (P) \,/\, O^p (G) \phi (P)/\phi (P) \simeq N_G (P)/\phi (P) \,/\, O^p (N) \phi (P)/\phi (P) \text{ da cui}$$
$$G/O^p (G) \phi (P) \simeq N/O^p (N) \phi (P) \text{ onde } (G' \cap P) \phi (P) = (N' \cap P) \phi (P)$$

e per il Lemma 2 si ha $G/O^p (G) \simeq N/O^p (N)$ come si voleva.

TEOREMA 2. *Sia* P *un p–sottogruppo di Sylow di* G. *Allora condizione necessaria e sufficiente affinché in* G *esista un p–complemento di Sylow normale è che* $\phi (P)$ *sia fortemente chiuso in* P *rispetto a* G *ed esista una catena* $V_0 = P \trianglerighteq V_1 \trianglerighteq V_2 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq V_n = \phi (P)$; $| V_i/V_{i+1} | = p \; (i = 0 , \ldots n - 1)$ *di sottogruppi tutti debolmente chiusi in* P *rispetto a* G *ed inoltre*

$$(| N_G (P) : C_G (P) | , p - 1) = 1.$$

Dimostrazione. Condizione sufficiente: Per il Teorema 1 si ha $G/O^p (G) \simeq N/O^p (N)$ dove $N = N_G (P)$. Basterà quindi provare che N ha un p–complemento di Sylow normale. Sia K un p'–sottogruppo di Hall di N, che esiste per il teorema di Schur–Zassenhaus, e sia $a \in K$. a induce in P un p'–automorfismo che fissa ogni membro della catena $V_0 = P \trianglerighteq V_1 \trianglerighteq V_2 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq V_n = \phi (P)$ essendo $N_G (V_i) \geq N \; (i = 0 , \ldots, n)$. Quindi a induce su V_i/V_{i+1} un p'–automorfismo. Ma se q è l'ordine dell'automorfismo indotto da a in P per le ipotesi fatte $(q , p - 1) = 1$, quindi a necessariamente induce su V_i/V_{i+1}

l'automorfismo identico. Ciò implica che a induce su $P/\phi(P)$ l'automorfismo identico (v. Teorema 5.3.2. di [4]). Quindi per il Teorema 5.1.4 di [4] a induce su P l'automorfismo identico. Segue $a \in C_G(P)$.

Ovvero $K \leq C_G(P)$ e $N = K \times P$ come si voleva.

Condizione necessaria: Sia M il p–complemento di Sylow normale di G. Sia V un qualsiasi sottogruppo normale di P. V è un p–sottogruppo di Sylow di MV ed MV è normale in G come si vede facilmente. Quindi V è fortemente chiuso in P rispetto a G. Sia $\phi(P) = V_n \lhd V_{n-1} \lhd \dots \lhd V_0 = P$ una catena di sottogruppi di P ciascuno di indice p nel seguente. Per quanto è stato provato $\phi(P)$ e ciascun V_i $(i = 0, \dots, n)$ sono fortemente chiusi in P rispetto a G. Inoltre necessariamente $(|N_G(P) : C_G(P)|, p-1) = 1$ perché in $N_G(P)$ esiste un p–complemento di Sylow normale e quindi $N_G(P)/C_G(P)$ è un p–gruppo.

COROLLARIO 1. *Sia* P *un p–sottogruppo di Sylow di* G. *Condizione necessaria e sufficiente affinché in* G *esista un p–complemento di Sylow normale è che i sottogruppi massimali di* P *siano tutti fortemente chiusi in* P *rispetto a* G *e* $(|N_G(P) : C_G(P)|, p-1) = 1$.

Dimostrazione. Condizione sufficiente: Sia M_1 un sottogruppo massimale di P. Se M_1 è l'unico sottogruppo massimale di P, allora $M_1 = \phi(P)$ e $M_1 = V_1 \lhd P = V_0$ è una catena di sottogruppi fortemente chiusi del tipo descritto nel Teorema 2. Quindi si può supporre che esista M_2 massimale in P con $M_1 \neq M_2$.

Allora si ha che $M_1 \cap M_2 = V_2$ è fortemente chiuso in P rispetto a G e $|M_1 : M_1 \cap M_2| = |G : M_2| = p$. Se $M_1 \cap M_2 = \phi(P)$ allora la catena $\phi(P) = V_2 \lhd V_1 = M_1 \lhd P = V_0$ è del tipo descritto nel Teorema 2. Se $M_1 \cap M_2 \neq \phi(P)$ allora esiste un altro massimale M_3 di P con $M_1 \neq M_3$ e $M_2 \neq M_3$.

Sia $V_3 = M_1 \cap M_2 \cap M_3$. Chiaramente V_3 è fortemente chiuso e $|V_2 : V_3| = p$. Così proseguendo, si troverà un n per cui $V_n = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n = \phi(P)$ e la catena $\phi(P) = V_n \lhd V_{n-1} \lhd \dots \lhd V_0 = P$ è una catena di sottogruppi tutti fortemente chiusi in P rispetto a G e ciascuno di indice p nel seguente.

Quindi per il Teorema 2 esiste in G un p–complemento di Sylow normale come si voleva.

Condizione necessaria: Sia M il p–complemento di Sylow normale di G.

Come osservato nella dimostrazione della condizione necessaria del Teorema 2, se M_1 è un sottogruppo massimale di P, allora $M_1 M \lhd G$ e quindi M_1 è fortemente chiuso in P rispetto a G come si voleva provare.

COROLLARIO 2. *Sia* G *un gruppo finito. Condizione necessaria e sufficiente affinché il gruppo* G *sia supersolubile è che per ogni primo p che divide il suo ordine, detto* P *un suo p–sottogruppo di Sylow,* P *possegga una catena* $\phi(P) = V_n \lhd V_{n-1} \dots \lhd V_1 \lhd V_0 = P$ *di sottogruppi tutti debolmente chiusi in* P *rispetto* *a* G *e ciascuno di indice p nel seguente, e che* $\phi(P)$ *sia fortemente chiuso in* P *rispetto a* G.

Dimostrazione. Condizione sufficiente: Procediamo per induzione su $|G|$, Sia p il più piccolo primo divisore di $|G|$. Si ha allora $(|N_G(P):C_G(P)|\,.\,p-1)=1$. Quindi per il Teorema 2, esiste in G un p–complemento di Sylow normale M. Si può supporre $M \neq \langle 1 \rangle$. Sia q il più grande tra i primi divisori di $|G|$ e quindi di M. M è, per ipotesi induttiva, supersolubile, quindi se Q è un q–sottogruppo di Sylow di M, Q è caratteristico in M, e quindi normale in G. Si ha $V_n = \phi(Q) \lhd V_{n-1} \lhd \ldots \lhd V_0 = Q$ con V_i $(i=0,\ldots,n)$ debolmente chiusi in Q rispetto a G.

Quindi V_i è normale in G per ogni i, essendo $N_G(V_i) \geq N_G(Q) = G$.

Si ha $\phi(Q) \leq \phi(G)$. Quindi se $\phi(Q) \neq \langle 1 \rangle$, $G/\phi(Q)$ è supersolubile per ipotesi induttiva, e quindi $G/\phi(G)$ è supersolubile.

Segue G supersolubile. Se $\phi(Q) = \langle 1 \rangle$, $\langle 1 \rangle \neq V_{n-1}$ è di ordine p e normale in G e G/V_{n-1} è supersolubile per ipotesi induttiva. Ancora segue G supersolubile.

Condizione necessaria: Sia G supersolubile e $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$ con $p_1 > p_2 > \ldots > p_r$. Sia $\langle 1 \rangle = K_0 \lhd K_1 \lhd \ldots \lhd K_r = G$ la torre di Sylow di G e quindi K_i/K_{i-1} $(i=1,\ldots,r)$ è isomorfo al p_i–sottogruppo di Sylow P_i di G. Sia $\bar{G} = G/K_{i-1}$.

K_i/K_{i-1} è normale in G/K_{i-1} e quindi $\phi(K_i/K_{i-1})$ è anch'esso normale in G/K_{i-1}. Inoltre la catena $\langle 1 \rangle < \phi(K_i/K_{i-1}) < K_i/K_{i-1} < \ldots < G/K_{i-1}$ si può raffinare ad una serie principale di G/K_{i-1}. Quindi si trovano sottogruppi $M_1^{(i)},\ldots, M_{n(i)}^{(i)}$ tutti normali in G e $\phi(K_i/K_{i-1}) \lhd M_1^{(i)}/K_{i-1} \lhd \ldots \lhd M_{n(i)}^{(i)}/K_{i-1} \lhd K_i/K_{i-1}$ è una serie di sottogruppi ciascuno di indice p_i nel seguente. Si ha allora che, ponendo $V_k^{(i)} = M_k^{(i)} \cap P_i$, $\phi(P_i) \lhd V_1^{(i)} \lhd \lhd \ldots \lhd V_{n(i)}^{(i)} \lhd P_i$ è una catena di sottogruppi ciascuno di indice p_i nel seguente tutti fortemente chiusi in P_i rispetto a G in quanto sottogruppi di Sylow di sottogruppi normali di G. (Osserviamo per questo che $P_i = P_i \cap K_i$ e se $M/K_{i-1} = \phi(K_i/K_{i-1})$ allora $M \cap P_i = \phi(P_i)$ per l'isomorfismo $P_i \simeq K_i/K_{i-1}$).

Valendo questo per ogni i, la condizione necessaria è provata.

COROLLARIO 3. *Condizione sufficiente affinché un gruppo finito* G *sia supersolubile è che i sottogruppi massimali dei sottogruppi di Sylow siano tutti fortemente chiusi.*

Dimostrazione. Dalla dimostrazione del Corollario 1 emerge che si può costruire relativamente ad ogni p_i–sottogruppo di Sylow P_i di G una catena di sottogruppi $\phi(P_i) = V_n \lhd \ldots \lhd V_0 = P_i$ tutti fortemente chiusi in P_i rispetto a G. Per il Corollario 2 segue allora G supersolubile.

NOTA 1. La condizione descritta nel Corollario 3 è, al contrario di quella descritta nel Corollario 2, solo sufficiente, come il seguente semplice esempio mostra:

Sia $G = \langle a , b , c / a^3 = b^3 = 1 , \ ab = ba, \ c^2 = 1 , \ a^c = a , b^c = b^2 \rangle$.

G è supersolubile e $\langle 1 \rangle \lhd \langle a \rangle \lhd \langle a , b \rangle \lhd G$ è una serie principale di G.

I sottogruppi massimali di $\langle a , b \rangle$ sono $\langle a \rangle , \langle b \rangle , \langle ab \rangle , \langle ab^2 \rangle$.

Mentre $\langle a \rangle , \langle b \rangle \lhd G$, $\langle ab \rangle^c = \langle ab^2 \rangle$, quindi $\langle ab \rangle$ non è normale in G (che nel caso descritto equivale a fortemente chiuso in P rispetto a G).

NOTA 2. Se nel Corollario 3 si pone la condizione che i sottogruppi massimali dei p–sottogruppi di Sylow siano debolmente chiusi anziché fortemente chiusi, non si ottiene la supersolubilità, come si può osservare analizzando il gruppo S_4.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. SRINIVASAN (1980) – *Two sufficient conditions for supersolvability of finite groups.* « Israel Journal of Mathematics », *35* (3), 210-214.

[2] D. GOLDSCHMIDT (1975) – *Strongly closed 2-subgroups of finite groups.* « Annals of Mathematics », *102*, 475-489.

[3] L. DORNHOFF (1971-72) – *Representation Theory*, vol. A, « Pure and applied Mathematics », 7.

[4] D. GORENSTEIN (1968) – *Finite Groups.* Harper & Row.

[5] A.L. GILOTTI-L. SERENA (1977) – *p-Injectors and finite supersoluble groups.* « Atti Acc. Naz. Lincei », *53* (3-4).

[6] B. HUPPERT e N. BLACKBURN (1982) – *Finite Groups.* Vol. III, Springer Verlag.