Adriana Brogini Bratti

Separabilità di $L^2(\mu)$ per spazi riflessivi, μ misura gaussiana

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **76** (1984), n.2, p. 88–92.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1984_8_76_2_88_0>

Calcolo delle probabilità. — *Separabilità di* $L^2(\mu)$ *per spazi riflessivi,* μ *misura gaussiana.* Nota di ADRIANA BROGINI BRATTI (*), presentata (**) dal Socio G. SCORZA DRAGONI.

SUMMARY. — Following H. Sato-Y. Okazaky we will prove that: if X is a topological vector space, locally convex and reflexive, and μ is a gaussian measure on $C(X, X')$, then $L^2(\mu)$ is separable.

INTRODUZIONE

In (2) H. Sato e Y. Okazaky hanno dimostrato il seguente

TEOREMA 1. (X, Y) *sia una coppia di spazi vettoriali con dualità. Se* μ *è una misura gaussiana su* $C(X, Y)$ *e se* ρ_μ *è una metrica* μ*–compatibile su* Y, *allora* $L^2(\mu)$ *è separabile.*

In particolare, il teorema precedente si applica al caso che X sia uno spazio di Hilbert, Y sia il suo duale dotato della norma canonica, norma che, (2) pag. 289, fornisce sempre una metrica μ–compatibile, qualunque sia la misura gaussiana μ.

È oggetto di questa nota ottenere, sotto opportune ipotesi, un risultato analogo nel caso di spazi vettoriali topologici X, di Hausdorff, localmente convessi e riflessivi: Y sarà il duale topologico di X e verrà indicato con X'; e la dualità fra X e Y sarà quella canonica.

Precisamente dimostrerò il

TEOREMA 2. X *sia uno spazio vettoriale topologico, di Hausdorff, localmente convesso e riflessivo*; X' *sia il suo duale topologico*; $C(X, X')$ *sia la minima* σ*–algebra tale che ogni* $x' \in X'$, *che fornisce l'applicazione lineare*

$$\langle x', . \rangle : X \to R, \langle x', . \rangle (x) = \langle x', x \rangle$$

è $C(X, X')$ *misurabile.*

Se $\mu : C(X, X') \to R$ *è una misura gaussiana finita, e se*

$$R_\mu : X' \to L^2(\mu) = L^2(X, C(X, X'), \mu), R_\mu(x') = \langle x', . \rangle$$

(*) Istituto di Statistica, Via VIII febbraio, I–35100 Padova.
(**) Nella seduta del 14 gennaio 1984.

è continua, allora la chiusura del codominio di R_μ *è separabile, non appena:*

i) ${}^tR_\mu$ *ha immagine* $C(X, X')$ — *misurabile*;

ii) *per ogni* A *in* $C(X, X')$ *si ha*: $\mu(A \wedge \mathrm{Imm}({}^tR_\mu)) = \mu(A)$.

1) Ricorderò, brevemente, le principali definizioni utili al seguito. Se (X, Y) è una coppia di spazi vettoriali, una dualità D per (X, Y) è un'applicazione bilineare $D : X \times Y \to R$; per il tramite della D ogni elemento y di Y si può pensare come applicazione lineare di X in R così: per ogni x di X, $y(x) = D(x, y)$. Sia $C(X, Y)$ la minima σ-algebra su X tale che ogni $D(\,.\,, y)$ per ogni y di Y è $C(X, Y)$ — misurabile.

DEFINIZIONE 1. *Una misura* $\mu : C(X, Y) \to R$ *è gaussiana se e solo se:*

i) μ *è una misura di probabilità*;

ii) *ogni* $D(\,.\,, y)$, *per ogni* y *di* Y, « *obbedisce ad una legge gaussiana* » *con varianza, e dunque con media, finita.*

$L^2(\mu) = L^2(X, C(X, Y)\,\mu)$ è il (solito) spazio di Hilbert, quello delle funzioni reali su $X, C(X, Y)$ — misurabili, e di quadrato μ-integrabile; sia $R_\mu : Y \to L^2(\mu)$ definita da

$$R_\mu(y)(x) = D(x, y).$$

Nel caso che X sia uno spazio vettoriale topologico, di Hausdorff e riflessivo, e che Y sia X', duale topologico di X, indicata con H_μ la chiusura dell'immagine di R_μ, ha senso considerare la

$${}^tR_\mu : H' \to X$$

dove ${}^tR_\mu$ è la trasposta della R_μ, H'_μ è il duale topologico di H_μ; la riflessività di X ci permette di dire che il codominio della ${}^tR_\mu$ si inietta in modo continuo in X. Indicheremo con $B : H_\mu \times H'_\mu \to R$ la dualità canonica fra H_μ ed il suo duale.

DEFINIZIONE 2. *Una metrica* ρ_μ *su* Y *si dice* μ*-compatibile se e solo se*:

i) ρ_μ *definisce una topologia localmente convessa su* Y;

ii) $\mu^*((Y, \rho_\mu)' \cap X) = 1$, *dove*: $(Y, \rho_\mu)' = (x \in X : D(x, .) : (Y, \rho_\mu) \to R$ *è continua*), *e dove* μ^* *è la misura esterna generata dalla* μ, *definita da*

$$A \subset X,\ \mu^*(A) = \inf(\mu(Z),\ Z \in C(X, Y) \text{ tale che } Z \supset A).$$

Sempre in base a (2), pag. 289, ρ_μ è μ-compatibile se e solo se: esiste un sottoinsieme Z_0 di X tale che:

i) $\mu^*(Z_0) = 1$;

ii) la topologia debole generata da Z_0 in Y, la $\sigma(Y, Z_0)$, non è meno fine della topologia generata dalla ρ_μ.

2. Dimostrazione del Teorema 2

Si supponga che

a) ${}^t\mathrm{R}_\mu(\mathrm{H}'_\mu) = \mathrm{X}_0 \subset \mathrm{X}$ sia in $\mathrm{C}(\mathrm{X}, \mathrm{X}')$; e che
b) $\forall \mathrm{A} \in \mathrm{C}(\mathrm{X}, \mathrm{X}')$ si abbia $\mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{X}_0) = \mu(\mathrm{A})$.

Sia $j : \mathrm{H}_\mu \to \mathrm{H}'_\mu$ l'isomorfismo canonico: $f \in \mathrm{H}_\mu$, $j(f) = \mathrm{B}(.\,, f)$; per il tramite della j si può pensare, direttamente, che

(1) $$\mathrm{H}_\mu \xrightarrow{{}^t\mathrm{R}_\mu} \mathrm{X}_0 \to \mathrm{X}$$

dove, se $x' \in \mathrm{X}'$, risulta

$$ {}^t\mathrm{R}_\mu(f)[x'] = {}^t\mathrm{R}_\mu(\mathrm{B}(.\,, f))[x'] = \mathrm{B}(.\,, f)[\mathrm{R}_\mu(x')] = $$
$$ = \int_{\mathrm{X}} \langle x', x \rangle f(x)\, \mathrm{d}\mu(x) . $$

Si tenga presente che R_μ ha immagine densa in H_μ, così che ${}^t\mathrm{R}_\mu$ è certamente iniettiva.

Dimostriamo che

$$ ({}^t\mathrm{R}_\mu)^{-1}(\mathrm{C}(\mathrm{X}, \mathrm{X}') \cap \mathrm{X}_0) = \mathrm{C}(\mathrm{H}_\mu, \mathrm{H}'_\mu) , $$

dove, come nel paragrafo 1, $\mathrm{C}(\mathrm{H}_\mu, \mathrm{H}'_\mu)$ è la σ-algebra generata dai sottoinsiemi di H del tipo

$$ q^{-1}(\alpha < r) , \quad q \in \mathrm{H}' \quad \text{e} \quad r \in \mathrm{R} . $$

Sia x' in X'; per la definizione di $\mathrm{C}(\mathrm{X}, \mathrm{X}')$ è ovvio che $(x')^{-1}(\alpha < r)$ sta in $\mathrm{C}(\mathrm{X}, \mathrm{X}')$; inoltre, risulta

$$ ({}^t\mathrm{R}_\mu)^{-1}[(x')^{-1}(\alpha < r)] = ({}^t\mathrm{R}_\mu)^{-1}[(x')^{-1}(\alpha < r) \cap \mathrm{X}_0] = (x' \circ {}^t\mathrm{R}_\mu)^{-1}(\alpha < r) . $$

Il diagramma 1 dimostra che x' in X' si ha $x' \circ {}^t\mathrm{R}_\mu \in \mathrm{H}'_\mu$; così che rimane dimostrato che

$$ ({}^t\mathrm{R}_\mu)^{-1}(\mathrm{C}(\mathrm{X}, \mathrm{X}') \cap \mathrm{X}_0) \subset \mathrm{C}(\mathrm{H}_\mu, \mathrm{H}'_\mu) . $$

Viceversa: sia q in H' e si consideri il sottoinsieme di H_μ definito da $q^{-1}(\alpha < < r) \in \mathrm{C}(\mathrm{H}_\mu, \mathrm{H}'_\mu)$. Poiché H_μ è la chiusura dell'immagine di R_μ in $\mathrm{L}^2\, q^{-1}(\mu)$, esiste una successione (x'_n) in X' tale che

(2) $$ \lim_n \mathrm{B}(.\,, \mathrm{R}_\mu(x'_n)) = q $$

nella topologia di H'_μ. Ciò implica che

$$\lim_n (x'_n \circ {}^t R_\mu) = q \tag{2'}$$

sempre in H'_μ. Infatti, se $f \in H_\mu$ si ha

$$\lim_n (x'_n \circ {}^t R_\mu)[f] = \lim_n x'_n ({}^t R_\mu(f)) =$$

$$= \lim_n {}^t R_\mu(f)[x'_r] = \lim_n \int_X R_\mu(x'_n)(x) f(x) \, d\mu(x) = \langle q \, . \, f \rangle \, .$$

Quanto sopra dimostra la (2') nell'ambito della convergenza debole in H'_μ; è facile passare, da qui, alla convergenza forte. Ne segue:

$q^{-1}(\alpha < r) = \liminf_n (x'_n \circ {}^t R_\mu)^{-1}(\alpha < r)$, limite inferiore insiemistico; poiché $C(H_\mu, H'_\mu)$ è σ-algebra, e

$$\forall n \in N, (x'_n \circ {}^t R_\mu)^{-1}(\alpha < r) \in C(H_\mu, H'_\mu)$$

si ottiene quanto si voleva.

Definiamo la $\mu_{H_\mu} : C(H_\mu, H'_\mu) \to R$ così:

$$A \in C(H_\mu, H'_\mu), \; \mu_{H_\mu}(A) = \mu(B \cap X_0)$$

dove $B \in C(X, X')$ e $({}^t R_\mu)^{-1}(B) = ({}^t R_\mu)^{-1}(B \cap X_0) = A$; per quanto precede, la definizione di μ_{H_μ} è ben data.

Dimostriamo che μ_{H_μ} è una misura gaussiana su $C(H_\mu, H'_\mu)$, cioè che, in base alla Definizione 1 dell'introduzione, si ha: se q sta in H', allora q sta in $L^2(H_\mu, C(H_\mu, H'_\mu), \mu_{H_\mu})$.

Sia S il sottospazio delle funzioni semplici (μ–misurabili) di $L^2(\mu)$; e sia

$$i : S \to L^2(H_\mu, C(H_\mu, H'_\mu), \mu_{H_\mu}) = L^2(\mu_{H_\mu})$$

definita da

$$i(f) = f \circ {}^t R_\mu \, .$$

Se $A \in C(X, X')$ e se φ_A è la funzione caratteristica di A, risulta

$$\int_X \varphi_A(x) \, d\mu(x) = \mu(A) \, ; \int_{H_\mu} (\varphi_A \circ {}^t R_\mu)(t) \, d\mu_{H\mu}(t) =$$

$$\int_{H_\mu} \varphi_{({}^t R_\mu)^{-1}(A)}(t) \, d\mu_{H_\mu}(t) = \mu_{H_\varphi}(({}^t R_\mu)^{-1}(A)) = \mu(A \cap X_0) = \mu(A) \, .$$

Dunque: i è un'isometria di S in $L^2(\mu_{H_\mu})$, e perciò si può considerare, direttamente, come un'isometria di $L^2(\mu)$, in cui S è denso, a valori in $L^2(\mu_{H_\mu})$. In particolare si ha: $\forall x' \in X'$, poiché $\langle x', . \rangle \in L^2(\mu)$

$$\| x' \circ {}^t R_\mu \|_{L^2(\mu_{H_\mu})} = \| \langle x', . \rangle \|_{L^2(\mu)} .$$

Sia q in H'_μ. Poiché $q = \lim_n (x'_n \circ {}^t R_\mu)$ in H'_μ risulta

$$\| q \|_{H'_\mu} = \lim_n \| (x'_n \circ {}^t R_\mu) \|_{H'_\mu} = \lim_n \| R_\mu (x'_n) \|_{L^2(\mu)} = \lim_n \| (x'_n \circ {}^t R_\mu) \|_{L^2(\mu_{H_\mu})} ;$$

quindi, riassumendo, se $q \in H'_\mu$ si ha:

1) $q : H_\mu \to R$ è $C(H_\mu, H'_\mu)$ — misurabile;

2) per ogni f in H_μ, $| q(f) |^2 = \lim_n | (x'_n \circ {}^t R_\mu)(f) |^2$;

3) $\int_{H_\mu} | (x'_n \circ {}^t R_\mu)(f) |^2 d\mu_{H_\mu} = \| x'_n \circ {}^t R_\mu \|_{L^2(\mu_{H_\mu})} < c < +\infty , n \in N$.

Il Lemma di Fatou, (1) pag. 91, dimostra che $q \in L^2(\mu_{H_\mu})$.

In base al Teorema 1 dell'introduzione, $L^2(\mu_{H_\mu})$ è separabile; dunque anche $L^2(\mu)$ lo è, in quanto sottospazio del precedente.

La dimostrazione è conclusa.

Bibliografia

[1] G. Letta – *Teoria elementare dell'integrazione*, Edizioni Boringhieri, (1976)

[2] H. Sato-Y. Okazaky – *Separability of a Gaussian Radom measure*, « Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. B, Calcul des Probabilités et Statistique », *3*, 287-298, (1975)