Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Gianfranco Cimmino, Giuseppe Scorza Dragoni

L'opera matematica di Carlo Miranda

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **76** (1984), n.2, p. 145–157.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1984_8_76_2_145_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1984.

GIANFRANCO CIMMINO e GIUSEPPE SCORZA DRAGONI

L'OPERA MATEMATICA DI CARLO MIRANDA

In questo scritto ci proponiamo essenzialmente di rievocare l'opera scientifica e didattica di Carlo Miranda, l'amico carissimo che perdemmo il 28 maggio del 1982: e non indulgeremo pertanto a ricordi personali. Ma non possiamo tacere la nostra stupefatta meraviglia allorché, presso l'Ateneo napoletano, noi, di qualche anno più anziani, incominciammo a stimare quello studente giovanetto, appena quindicenne, così spiccatamente dotato per gli studi matematici.

Brillantissimo fu il curriculum dei suoi studi universitari, durante i quali, fra altri, egli ebbe come maestri Pasquale del Pezzo, Mauro Picone, Gaetano Scorza ed Antonio Signorini. Pervenne alla laurea nel 1931 e dopo due anni soltanto alla libera docenza. Nel 1934 contava già una dozzina di pubblicazioni, una summa veramente non comune per l'abbondanza dei risultati ottenuti in età così giovanile e in campi così diversi: equazioni integrali lineari di prima e seconda specie con nuclei asimmetrici, funzioni armoniche e teoria del potenziale, sommazioni generalizzate di serie di Fourier relative a certi sistemi ortogonali di funzioni, problemi al contorno per equazioni alle derivate parziali, sommazione delle serie trigonometriche doppie, calcolo delle variazioni per integrali doppi di forma ordinaria, trattazione numerica dell'equazione di Thomas-Fermi.

In questa prima fase della sua attività, Miranda, nella scelta degli argomenti, venne saggiamente guidato da quell'incomparabile maestro che fu Mauro Picone, il quale esortava i propri allievi a studiare accanto a questioni di matematica pura anche problemi di analisi numerica suggeriti dalle applicazioni e aveva ideato, proprio in quegli anni, di fondare un Istituto di Calcolo per l'Analisi numerica. Questo cominciò a funzionare presso l'Università di Napoli, ma nel 1932 si stabilì in Roma come Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Colà Miranda seguì Picone, come assistente prima e come vicedirettore poi di quell'Istituto Nazionale. In quegli stessi anni, peraltro, Carlo Miranda fruì anche di una borsa di studio e poté frequentare in Parigi i seminari di Jacques Hadamard e Paul Montel. Ed ivi egli ebbe prime affermazioni in campo internazionale pubblicandovi due lavori che apportavano interessanti contributi alla teoria delle famiglie normali di funzioni olomorfe fondata dal Montel.

Il periodo franco-romano di Miranda si estese fino al 1937, l'anno nel quale i suoi meriti scientifici furono premiati col successo nel concorso a cattedra e la nomina a professore di ruolo presso l'Università di Genova. Molti suoi lavori di questo periodo si trovarono naturalmente ad essere legati alla attività di quell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo: fra di essi ricordiamo l'estesa Memoria su certe equazioni integrodifferenziali suggerite dalla traduzione in termini matematici di problemi relativi a fenomeni di propagazione, una Nota sull'inversione della trasformata di Laplace, un'altra su un problema al contorno relativo all'equazione del calore e infine quella in cui vengono apportati utili complementi a teoremi famosi di Hurwitz e Sturm sulle equazioni algebriche con coefficienti reali. Ma fra tutte le ricerche del periodo franco–romano ne spiccano due di matematica pura: quella relativa alle equazioni a derivate parziali del second'ordine in due variabili in forma parametrica e l'altra sulle equazioni integrali lineari di seconda specie e col nucleo dipendente dal parametro. – Nella prima di queste ultime due ricerche Miranda dimostra un teorema di esistenza e di unicità in piccolo per una superficie rappresentata parametricamente della quale sia assegnato il bordo e la quale risolva un'equazione, che vien detta a derivate parziali in forma parametrica perché naturale estensione di quella delle estremali di un integrale doppio in forma parametrica del calcolo delle variazioni; ricollegandosi poi a sue ricerche precedenti sugli integrali doppi in forma ordinaria, determina, per un integrale doppio appunto in forma parametrica, condizioni sufficienti per un minimo relativo forte. La Memoria sulle equazioni integrali col nucleo dipendente da un parametro, si basa su di una scelta felice delle ipotesi relative alla forma del nucleo, tanto felice da apparir forse quasi miracolosa anche a chi sappia come in quella scelta Carlo Miranda abbia tratto ispirazione da un problema concreto nel quale si era imbattuto. Nelle sue ipotesi egli è riuscito a dare un'elegante estensione della teoria classica di Hilbert–Schmidt attraverso una condizione generalizzata di ortogonalità soddisfatta dal sistema delle attuali autosoluzioni.

Fra le ricerche sviluppate invece nel periodo genovese, oltre ad uno studio accurato di certe funzioni olomorfe di variabile complessa, bisogna ricordare quella, notevole, su un problema di Minkowski, precisamente sulla determinazione di una superficie convessa e chiusa, che soddisfaccia ad un'equazione intrinseca esprimente in ogni punto la curvatura totale in funzione dei coseni direttori della rispettiva normale nel punto, la funzione essendo naturalmente sempre positiva. Per lo studio di questo problema egli si trovava già in possesso della via aperta in occasione di quello precedente sulle equazioni a derivate parziali in forma parametrica, cioè in occasione della prima ricerca in cui egli abbia attinto alla miniera preziosa del pensiero di Renato Caccioppoli, l'amico, il quale, *prestando la sua guida ai giovani che erano stati con lui alla scuola di Picone, divenne per loro, dopo Picone, un secondo maestro* (così si esprime lo stesso Miranda nel suo articolo *Breve storia e prospettive future dell'Istituto Matematico della Facoltà di Scienze dell'Università di Napoli*; – articolo per altri versi non privo di una pacata arguzia polemica). Comunque, ritorniamo al problema di Minkowski. L'esistenza e a meno di congruenze spaziali l'unicità di quella superficie sono provate da Miranda con un metodo del tutto nuovo, avvalendosi di un principio generale sull'inversione di corrispondenze non biunivoche tra spazi funzionali anche non lineari da Caccioppoli proprio allora formulato e dipoi utilizzato per dimostrare l'esistenza di ovaloidi dotati di metriche riemanniane prefissate.

A distanza di molti anni, altre consimili quistioni, classificabili come problemi di geometria differenziale in grande e prese in considerazione anche in campo internazionale da molti studiosi, formeranno oggetto di ulteriori ricerche di grande rilievo compendiate da Miranda in Memorie, Conferenze e Cicli di lezioni. Questi frutti della piena maturità, coi quali possiamo dire conclusa, nel triennio 1971/1973, la di lui operosità di ricercatore, si riattaccano dunque a un punto saliente di quella esplicata una trentina di anni prima negli inizi del suo insegnamento cattedratico. Ma un altro forse non meno significativo ritorno al passato si era avuto anche nel suo periodo torinese: allora egli aveva ripreso, ampliato ed illustrato le sue ricerche sulle equazioni integrali col nucleo dipendente dal parametro.

Nel suo periodo torinese, abbiamo detto, perché nel 1939 egli era passato dall'Università di Genova al Politecnico di Torino, per trasferirsi poi, nel 1943, presso l'Università di Napoli. E qui, nella sua città natale, egli sarebbe rimasto definitivamente e sarebbe divenuto uno dei più insigni capiscuola della matematica italiana.

Gli eventi bellici resero durissimi i primi anni di questo periodo, in cui Miranda e Caccioppoli si trovarono praticamente soli a fronteggiare la situazione disastrosa dell'immediato dopoguerra nei locali dell'Ateneo napoletano, dove si trovavano le aule, gli istituti matematici e le biblioteche rispettive. La prolungata occupazione militare anglo–franco–americana vi aveva apportato disordine e rovine facilmente immaginabili. Nel settembre del 1944, per decisione della Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali, tutto venne unificato in un nuovo istituto policattedra, con biblioteca propria, e la faticosissima opera di ricostruzione si svolse nel giro di pochi anni, con l'ausilio volenteroso di un gruppo di assistenti e di allievi, sotto la direzione di Carlo Miranda.

Finalmente, dopo questo penoso intervallo, ecco che anche la produzione scientifica di Miranda si ravviva di nuovo slancio con la pubblicazione, negli anni 1947 e 1948, di alcuni, fra quelli dei suoi lavori che hanno avuto maggiore risonanza fra i matematici contemporanei. Alludiamo ai lavori sulle funzioni armoniche e biarmoniche ed al volumetto sui *Problemi di esistenza in analisi funzionale*, del quale abbiamo visto anche una ristampa nel 1976.

Questo volumetto fin dal suo primo apparire è stato estremamente utile per la diffusione di quei metodi topologico–funzionali, che soprattutto per merito di Schauder, Leray e Caccioppoli avevano trovato applicazioni molteplici nello studio delle equazioni funzionali.

I teoremi di esistenza forniti da quei metodi si riferiscono principalmente a problemi non lineari (come appunto, per esempio, quello di Minkowski). Per altro, anche nel caso dei problemi lineari Caccioppoli aveva espresso una visione ben precisa, che oggi appare ovvia a chi si occupi di analisi funzionale lineare, ma che allora costituiva un raro merito di originalità prendere come base delle proprie ricerche. Eccone l'idea. In un problema lineare si considera una trasformazione lineare, che muti i vettori di un certo spazio lineare, nel quale si cerca la soluzione, in vettori di un altro spazio lineare, nel quale si assegnano i dati. Dopo di che, se il vettore trasformato descrive tutto il secondo spazio, quando il vettore trasformando descrive il primo, il problema ammette soluzioni qualunque siano i dati; invece, se al variare del trasformando nel primo spazio si ottengono soltanto i vettori di una sottovarietà lineare propria del secondo, si perviene, per i dati, a condizioni necessarie e sufficienti a che il problema ammetta soluzioni. Questo metodo è stato utilizzato da Caccioppoli nelle sue ricerche *Sui teoremi di esistenza di Riemann*, da Cimmino in quelle *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali del second'ordine di tipo ellittico sopra una superficie chiusa* ed in quelle su di un *Nuovo tipo di condizione al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di Dirichlet*, e da Miranda, appunto, in quelle *Sul principio di Dirichlet per le funzioni armoniche*, in quelle *Sull'approssimazione delle funzioni armoniche in tre variabili*, nonché in quelle su *Formule di maggiorazione e teorema di esistenza per le funzioni biarmoniche in due variabili*. In occasione delle prime, Miranda ottiene, nel modo veramente più semplice e naturale, l'atteso risultato di esistenza in quella quistione di fama secolare nella storia della matematica, che è il cosiddetto *principio di Dirichlet;* mentre in occasione delle ultime il metodo è applicato alla ricerca di una funzione biarmonica in un dominio piano limitato, assegnati essendo sul contorno del dominio i valori per la funzione biarmonica stessa e per la sua derivata normale. E qui Miranda perviene allo scopo dimostrando preventivamente una formula di maggiorazione, detta anche principio di massimo, la quale ormai è legata al suo nome. In occasione di quest'ultimo lavoro sulle funzioni biarmoniche e di quello sull'approssimazione delle funzioni armoniche in tre variabili egli indica anche un'altra elegante applicazione dell'idea fondamentale, mostrando come essa permetta di precisare l'approssimabilità di funzioni armoniche e biarmoniche mediante quelle, fra loro, di un tipo particolare, come, per esempio, polinomi.

Il principio di massimo per le funzioni biarmoniche di due variabili reso noto da Miranda nel 1948, si evolverà una decina di anni dopo e sempre per merito di Miranda, in un teorema del massimo modulo. A questo proposito, ricordato che nel frattempo si era sempre più imposto il concetto di soluzione debole del problema di Dirichlet in un dominio limitato per un'equazione ellittica non omogenea di ordine pari, diciamolo $2m$, precisiamo che nella Memoria intitolata *Teorema del massimo modulo e teorema di esistenza e di unicità per il problema di Dirichlet relativo alle equazioni in due variabili* e pubblicata nel 1958, Miranda fornisce appunto il teorema di esistenza e di unicità per una siffatta soluzione debole, con la condizione al contorno intesa sempre nel senso classico della continuità sino alla frontiera della soluzione e delle sue derivate dei primi m-1 ordini; e ricordiamo che i massimi moduli di quella e di queste, nel dominio, vengono maggiorati mediante quello del termine noto, quelli, sulla frontiera, delle funzioni esprimenti i valori prescritti alla soluzione e alle sue derivate normali fino all'ordine m-1 e mediante i massimi moduli delle derivate di tali funzioni rispetto all'arco fino all'ordine complementare a m-1 per ciascuna di esse.

Tutti questi risultati sulle equazioni a derivate parziali han dato origine a numerose ricerche di altri insigni matematici. Ma non taceremo nemmeno che nel medesimo ordine di idee altri casi interessanti sono stati considerati dallo stesso Miranda nella Nota *Sul teorema del massimo modulo per una classe di sistemi ellittici di equazioni del secondo ordine e per le equazioni a coefficienti costanti nel corpo complesso*, pubblicata nel 1970.

Con quest'ultima citazione siamo andati molto in là negli anni. Il fatto si è che non volevamo interrompere l'argomento. Tacendo ora una Nota lincea sui *Problemi ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie del second'ordine in forma parametrica* ed un'altra *Sulle proprietà di minimo e massimo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali lineari del secondo ordine di tipo ellittico*, passiamo ai lavori sulle forme differenziali esterne e su un certo tipo di sistemi lineari ellittici di equazioni alle derivate parziali del primo ordine in n variabili indipendenti, tipo che appare specialmente indicato a fornire un'estensione naturale del sistema di Cauchy–Riemann delle equazioni di monogeneità.

Per quello che riguarda le forme differenziali lineari in n variabili indipendenti, preciseremo subito che la sua Nota *Sull'integrazione delle forme differenziali esterne di grado n-1 in n variabili* si avvale di un suo interessante risultato *Sulla sommabilità delle derivate di una funzione armonica hölderiana*; e ricorderemo indi che in questo gruppo spicca l'ampia Memoria *Sull'integrazione delle forme differenziali esterne* pubblicata da Miranda nel secondo volume delle *Ricerche di Matematica*, cioè nel secondo volume della rivista da lui fondata nel 1951 e pervenuta ben presto in alta rinomanza per merito soprattutto della brillante scuola matematica napoletana, che in lui e in Caccioppoli aveva la propria guida. La teoria delle forme differenziali esterne affonda le sue radici nel terreno della topologia algebrica ed aveva pertanto già attirata l'attenzione dei geometri. Ma grande è il suo interesse anche dal punto di vista dell'analisi matematica. Basta pensare che essa fornisce l'estensione al caso pluridimensionale di due teoremi resi famosi dal ruolo fondamentale che essi hanno nella fisica matematica classica: quello di Stokes, che attraverso la nozione di rotore muta un integrale di curva in un integrale di superficie; e quello di Gauss, che nello spazio ordinario, e mediante la nozione di divergenza, muta un integrale di superficie in un integrale di volume. Nel caso generale, cioè nel caso dell'integrale di una forma differenziale esterna U_{p-1} in n variabili e di grado $p-1$ esteso a una varietà orientata a $p-1$ dimensioni, la quale, nello spazio reale a n dimensioni, sia il bordo di un'altra, diciamola V, a p dimensioni, con $p \leq n$, quell'integrale di U_{p-1}, sotto ipotesi di regolarità opportune, può mutarsi nell'integrale esteso a V di una nuova forma differenziale esterna, di grado p, la quale vien detta derivata (o più propriamente differenziale) della U_{p-1}. Ciò rammentato, ritorniamo alla Memoria di Miranda. Essa prende origine dai lavori fondamentali di W.V.D. Hodge, nei quali, fra l'altro, viene stabilita la nozione di forma differenziale esterna armonica in un dominio e studiato il relativo problema di Dirichlet. In essa, pur non ricorrendosi più ai metodi dell'analisi funzionale lineare, si completano pur sempre in maniera essenziale i risultati di Hodge. Essa rimuove ipotesi di comodo, restrittive e non naturali, relative sia al dominio sia ai coefficienti della forma. Ed in essa si perviene al risultato centrale che una forma di grado p a coefficienti continui è integrabile, vale a dire è il differenziale di una forma di grado $p-1$, quando si annulla il suo integrale su ogni p-ciclo contenuto nel dominio, risultato che nel caso limite di $p=1$ restituisce quello elementare relativo alla condizione di integrabilità per una forma differenziale lineare.

Ai sistemi lineari ellittici considerati come estensione di quello di Cauchy-Riemann, è poi da Miranda dedicata la Memoria lincea *Sui sistemi di tipo ellittico di equazioni lineari alle derivate parziali del primo ordine in n variabili indipendenti.* Si tratta quivi di sistemi ottenuti nel modo seguente: in un dominio dello spazio reale a n dimensioni si assegna una matrice quadrata A di ordine n corrispondente a una forma quadratica definita e con elementi che siano funzioni continue; con queste come coefficienti, si costruiscono n combinazioni lineari delle derivate parziali prime di una funzione incognita v; indi si eguagliano queste combinazioni ai coefficienti del differenziale di una forma differenziale esterna u, incognita e di grado $n-1$; si pensano finalmente i coefficienti della u come costituenti una matrice emisimmetrica d'ordine n; si ottiene così un sistema di n equazioni lineari omogenee alle derivate parziali del primo ordine in $(n^2-n+2)/2$ incognite. Accanto a questo si può considerare il corrispondente sistema non omogeneo. E se i termini noti e gli elementi di A fossero derivabili, si potrebbe da quest'ultimo eliminare la u ed ottenere per la v un'equazione ellittica del secondo ordine. Si potrebbe! Ma l'interesse della ricerca consiste proprio nel riuscire a far a meno di ipotesi siffatte, sicché il supporre v tale che per qualche u il sistema risulti soddisfatto equivale a intenderla soluzione in senso generalizzato di quella equazione ellittica del second'ordine. E per il relativo problema di Dirichlet con condizione al contorno intesa in senso classico Miranda arriva al teorema di esistenza, attraverso varie precisazioni di risultati noti, concernenti le funzioni armoniche e i potenziali newtoniani, nonché attraverso nuove formule di maggiorazione, dedotte con una analisi *ad hoc*, atteso che nel suo caso quelle altre di Schauder e di Caccioppoli non sono applicabili proprio perché non si sono volute ipotesi di derivabilità sui dati.

Gli argomenti di quest'ultimo gruppo di lavori sono stati poi ripresi, studiati, approfonditi ed estesi in varie direzioni da molti altri illustri matematici, fra i quali ci limiteremo a nominare Gaetano Fichera, per quanto riguarda le forme differenziali, e Guido Stampacchia, per quel che si riferisce ai sistemi lineari ellittici e alle loro applicazioni a problemi di calcolo delle variazioni.

Durante il primo decennio del dopoguerra, oltre che a quella intensa operosità nella ricerca, Miranda, nel contempo, si dedicava assiduamente anche a una straordinaria fatica: la preparazione del volume *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, uscito nel 1955 nella collana *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, dell'editore Springer. L'enorme quantità di materiale bibliografico analizzato, lo studio in profondità di difficili Memorie altrui, rielaborate e riesposte in forma piana e sintetica, la sapiente concatenazione degli argomenti trattati fanno di questa « monografia », come egli usava chiamarla, un prezioso strumento di lavoro per tutti i cultori di equazioni ellittiche alle derivate parziali. Di essa gli fu data la soddisfazione di veder uscire in Mosca la traduzione in russo dopo appena due anni; e l'editore Springer, dieci anni più tardi, lo invitava a curarne una nuova edizione in inglese.

Questa seconda edizione apparve nel 1970, con una prefazione nella quale Miranda faceva notare che la lista bibliografica della prima edizione comprendeva già circa seicento titoli di lavori usciti nel trentennio 1924-1953, ma che per aggiornarla tenendo conto dei lavori usciti nel quindicennio successivo si sarebbero dovuti aggiungere almeno altri milleseicento titoli nuovi. Da ciò, si comprende, la necessità di una scelta, che tenesse conto dei progressi verificatisi in alcuni degli argomenti considerati ed altri ne escludesse, rimandando a testi in cui essi fossero stati specificamente trattati da altri autori. Peraltro, nel passaggio dalla prima alla seconda edizione la struttura dell'opera rimase immutata. Ivi, nella propria *encyclopedic knowledge of the subject*, riconosciutagli ammirativamente anche dal traduttore inglese, Miranda, con modestia singolare, mette in luce più i risultati di altri autori che i suoi propri contributi. Così, una menzione particolare merita il capitolo dedicato al complesso poderoso delle ricerche di G. Giraud, magistralmente analizzate e ripensate. In proposito anzi, ricordiamo che ad esse si riferiscono in gran parte anche le due belle Conferenze, intitolate, una, *Gli integrali principali della teoria del potenziale*, e, l'altra, *Le soluzioni fondamentali delle equazioni ellittiche*. Ma non dimentichiamo soprattutto, che con la propria Monografia egli tende a valorizzare al massimo la scuola matematica formatasi all'esempio di Picone, Caccioppoli e dei loro immediati seguaci. E ciò ancor meglio traspare da un'altra sua Conferenza, quella *Su alcuni aspetti della teoria delle equazioni ellittiche*, nella quale, fra l'altro, e a proposito di certi problemi misti, si trova una interessante analisi comparativa fra i metodi e i risultati di Luigi Amerio, Ennio De Giorgi, Gaetano Fichera, Enrico Magenes, Guido Stampacchia e quelli da lui stesso esposti nella Memoria *Sul problema misto per le equazioni lineari ellittiche* dedicata a Mauro Picone per onorarne il settantesimo compleanno.

Questo suo attaccamento alla nostra famiglia matematica doveva subire, nel maggio del 1959, un colpo dolorosissimo con la morte tragica di Renato Caccioppoli, fratello e maestro indimenticabile, al di cui nome Miranda provvederà di poi a far intestare l'Istituto Matematico della Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali dell'Università di Napoli. Ma intanto già assai numerosi fra gli allievi dei due maestri napoletani erano quelli pervenuti alla cattedra universitaria o sicuramente avviati a raggiungere questo traguardo; e i loro risultati scientifici spesso si intrecciavano con quelli dell'unico ormai rimasto come loro caposcuola.

Fra i lavori di Miranda dell'ultimo periodo emerge la Memoria poderosa su *Teoremi di unicità in domini non limitati e teoremi di Liouville per le soluzioni dei problemi al contorno relativi alle equazioni ellittiche*. In essa egli, fra l'altro, stabilisce teoremi detti di Liouville in quanto estensioni di quello classico così chiamato abitualmente nella teoria delle funzioni di una variabile complessa, z, secondo il quale una trascendente intera non può essere, all'infinito, dell'ordine di z^k, con k intero positivo o nullo, senza ridursi a un polinomio di grado k; e perviene ad altri risultati interessanti soprattutto per la generalità straordinaria delle condizioni in cui egli si pone, giacché essa riguarda soluzioni deboli per sistemi lineari ellittici di equazioni a derivate parziali, con l'ordine qualsiasi, purché pari, e con i coefficienti supposti soltanto misurabili.

Tutt'altra la specie dei risultati contenuti nella Memoria *Sulle equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo non variazionale a coefficienti discontinui*, nella quale, con vera maestria, egli stabilisce teoremi di regolarizzazione per le soluzioni dei problemi di Dirichlet e di Neumann con condizione al contorno omogenea, nonché limitazioni di tipo integrale per le soluzioni e le rispettive derivate. Queste limitazioni si ricollegano, per metodi e risultati, a quelle contenute in due sue Memorie di poco precedenti: quella su *Alcune limitazioni integrali per le soluzioni delle equazioni lineari ellittiche del secondo ordine*, dedicata a Giovanni Sansone (in ricorrenza anch'essa di un settantesimo compleanno); e quella su *Alcune osservazioni sulla maggiorazione in* L^p *delle soluzioni deboli delle equazioni ellittiche del secondo ordine*. Nel medesimo ordine di idee svolgesi poi anche quella *Su una particolare equazione ellittica a coefficienti discontinui*, nella quale sono indicate semplificazioni eleganti e precisazioni, possibili allorché si particolarizzino l'equazione e il dominio nel quale essa è considerata. A proposito di questi risultati e dei loro legami e interferenze con quelle di altri autori è interessante l'esposizione sistematica che ce ne dà Miranda stesso nel capitolo della sua Monografia dedicato alle cosiddette maggiorazioni *a priori* delle soluzioni dei problemi di valori al contorno. E la sua straordinaria ingegnosità nel dimostrare formule di maggiorazione siffatte ci appare ancora una volta nella Memoria lincea *Su alcune disuguaglianze integrali*, nonché nell'articolo *Su alcuni teoremi di inclusione*, nel quale sono studiati aspetti di regolarità per funzioni continue, hölderiane in domini limitati dello spazio reale a n dimensioni e provviste ivi di derivate fino a un certo ordine, queste ultime con le loro potenze p–esime sommabili, p essendo un numero reale maggiore del numero uno.

Parliamo adesso di un'altra sua Memoria, di rilievo notevole: quella lincea *Sulle proprietà di regolarità di certe trasformazioni integrali*. In essa Miranda studia profondamente certi tipi di integrali considerandoli come funzioni, che in trasformazioni integrali provviste di un nucleo dotato di un certo tipo di singolarità riescono immagini delle rispettive densità assegnate sulla frontiera del campo di integrazione o nel campo stesso (il tutto in conformità di quanto accade nel caso particolare dei potenziali newtoniani); e vi stabilisce risultati molto generali e precisi sugli spazi funzionali che possono esser fra loro posti in corrispondenza mediante trasformazioni funzionali siffatte. Un cenno dedichiamo finalmente alla Memoria *Sul teorema di Riesz–Thorin*, rivolta allo studio di alcune raffinate quistioni relative alla teoria dell'interpolazione fra spazi di Banach, teoria oggetto di studio da parte di matematici illustri, italiani e stranieri.

Con questa, con la Memoria *Su un problema di geometria differenziale in grande per gli ovaloidi* e con la Nota a proposito di *Aggiunte ed Errata–corrige alla Memoria su un problema di geometria differenziale in grande per gli ovaloidi*, entrambe qui implicitamente ricordate in occasione dei suoi studi giovanili sul problema di Minkowski, Miranda ha chiuso la serie delle sue Note e Memorie scientifiche in senso stretto, cioè dedicate alla ricerca originale. Ma se non accennassimo anche alle sue numerose Conferenze, Comunicazioni fatte in occasione di congressi, Raccolte di esercizi, nonché ai suoi Corsi di lezioni e Trattati, finiremmo col trascurare troppo l'impegno costante e la cura assidua di Carlo Miranda come didatta; e finiremmo con l'avere il torto di non dire che negli anni 1978 e 1979 vide la luce un'altra sua opera imponente: un trattato, in due volumi, il quale, sotto il titolo di *Istituzioni di analisi lineare*, raccoglie argomenti da lui svolti in corsi di analisi superiore dispiegantisi nell'arco di una ventina di anni. Ivi, naturalmente, la scelta degli argomenti nel campo dell'analisi lineare è particolarmente connessa col tipo di preparazione più adatto per lavorare in quei settori della matematica nei quali il maestro e gli allievi avevano apportato i loro contributi più significativi; anzi, la prefazione dice testualmente, con modestia voluta, che il libro intende essere *una raccolta di quanto è strettamente necessario conoscere per chi voglia intraprendere delle ricerche nel campo delle equazioni lineari, differenziali o integrali, avvalendosi dei metodi dell'analisi funzionale.* Noi possiamo aggiungere che esso, con la ricchezza del contenuto e la perspicuità dell'esposizione, ci spiega oggi l'efficacia di un insegnamento, al quale abbiamo visto formarsi tanti analisti valorosi.

Nel maggio del 1982 egli tenne la sua ultima lezione universitaria, in vista del suo prossimo collocamento fuori ruolo. Intanto i suoi allievi erano già riusciti ad ottenere il suo consenso a che in Napoli, e nell'estate successiva, si svolgesse, in suo onore ed in occasione del suo settantesimo compleanno, un convegno internazionale sui metodi dell'analisi funzionale e la teoria delle equazioni ellittiche. Ed il convegno si ebbe, in Napoli e nel settembre del 1982, ma Carlo Miranda non era più fra noi. Erano presenti insigni matematici stranieri; e le loro parole di alto riconoscimento per l'opera matematica di Carlo Miranda furono da noi ascoltate con commozione profonda, da noi, che più gli eravamo stati vicini.

Pubblicazioni di Carlo Miranda

Note, Memorie e Conferenze scientifiche

[1] *Estensione alle equazioni integrali singolari dei teoremi di Hilbert–Schmidt e di Picard*, « Rend. Acc. Lincei », *13* (1931), 719-724.

[2] *Ricerche sulle equazioni integrali singolari*, « Giorn. Mat. Battaglini », *70* (1932), 1-54.

[3] *Sulle proprietà asintotiche dei potenziali newtoniani dovuti a distribuzioni illimitate di masse*, « Rend. Acc. Lincei », *14* (1931), 81-87.

[4] *Approssimazione di una funzione armonica di tre variabili mediante polinomi armonici*, « Rend. Circ. Mat. Palermo », *56* (1932), 239-244.

[5] *Sulla sommazione col metodo di Poisson delle serie di Hermite*, « Rend. Acc. Lincei », *15* (1932), 197-203.

[6] *Il teorema di esistenza per il problema di Dirichlet in un campo piano privo di punti esterni*, « Rend. Acc. Sc. Napoli », *2* (1932), 49-52.

[7] *Proficui legami tra i metodi di sommazione delle serie e i problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari alle derivate parziali di tipo ellittico*, « Rend. Acc. Lincei », *17* (1933), 622-627.
[8] *Sommazione per diagonali delle serie doppie di Fourier*, « Rend. Acc. Lincei », *17* (1933), 803-806.
[9] *Il problema di Dirichlet in campi dello spazio privi di punti esterni*, « Ann. Mat. pura e appl. », *12* (1933-34), 1-11.
[10] *Sommazione per diagonali delle serie doppie di Fourier*, « Rend. Sem. Mat. Roma », s. III, *1* (1934), 191-217.
[11] *Condizioni sufficienti per il minimo degli integrali doppi*, « Mem. Acc. Italia », *5* (1934) 159-172.
[12] *Teoremi e metodi per l'integrazione dell'equazione di Fermi*, « Mem. Acc. Italia », *5* (1934), 285-322.
[13] *Teoremi di esistenza e di unicità delle superficie di assegnato bordo verificanti una equazione alle derivate parziali del secondo ordine e applicazione al problema di minimo per gli integrali doppi in forma parametrica*, « Rend. Acc. Lincei », *21* (1935), 253-260.
[14] *Sull'esistenza e sull'unicità di una superficie di assegnato bordo verificante un'equazione a derivate parziali in forma parametrica*, « Mem. Acc. Italia », *6* (1935), 1023-1045.
[15] *Un nouveau critère de normalité pour les familles de fonctions holomorphes*, « C.R. Ac. Sci. Paris », *200* (1935), 1823.
[16] *Sur un nouveau critère de normalité pour les familles de fonctions holomorphes*, « Bull. Soc. Math. France », 7 (1935), 185-196.
[17] *Analisi esistenziale per i problemi relativi alle equazioni dei fenomeni di propagazione*, « Mem. Acc. Italia », 7 (1936), 277-309.
[18] *Contributo allo studio delle serie doppie trigonometriche nell'indirizzo riemanniano*, « Rend. Sem. Mat. Roma », s. IV, *1* (1936-37), 10-20.
[19] *Complementi al teorema di stabilità di Hurwitz e al teorema di Sturm sulle equazioni algebriche a coefficienti reali*, « Rend. Sem. Mat. Roma », s. IV, *1* (1936-37), 175-179.
[20] *Sull'inversione della trasformata di Laplace*, « Rend. Acc. Sc. Napoli », 7 (1937), 32-35.
[21] *Sul problema al contorno relativo all'equazione del calore*, « Rend. Sem. Mat. Padova », *8* (1937), 1-20.
[22] *Sul calcolo delle piastre incastrate*, « Rend. Sem. Mat. Roma », s. IV, *1* (1937), 262-266.
[23] *Su una classe di equazioni integrali il cui nucleo è funzione del parametro*, « Rend. Circ. Mat. Palermo », *60* (1936), 286-304.
[24] *Su alcuni sviluppi in serie procedenti per funzioni non necessariamente ortogonali*, Atti I Congresso UMI, Firenze (1937), 200-202.
[25] *Su un problema di stabilità di vibrazioni*, Atti I Congresso UMI, Firenze (1937), 203-206.
[26] *Su un problema di geometria differenziale in grande posto dal Minkowski*, « Rend. Acc. Lincei », *28* (1938), 237-248.
[27] *Alcune generalizzazioni delle serie di funzioni ortogonali e loro applicazioni*, « Rend. Sem. Mat. Torino », 7 (1938-40), 5-17.
[28] *La formula di Green con arbitraria derivata obliqua* (in collaborazione con M. Picone), « Rend. Acc. Lincei », *29* (1939), 160-165.
[29] *Su un problema di propagazione*, « Rend. Acc. Lincei », *29* (1939), 168-174.
[30] *Su un problema di Minkowski*, « Rend. Sem. Mat. Roma », s. IV, *3* (1939), 96-108.
[31] *Nuovi contributi alla teoria delle equazioni integrali lineari con nucleo dipendente dal parametro*, « Mem. Acc. Sc. Torino », 7 (1940), 29 pp.
[32] *Sulle equazioni integrali il cui nucleo è funzione lineare del parametro*, « Rend. Acc. Italia », *2* (1940), 117–123.
[33] *Un'osservazione su un teorema di Brouwer*, « Boll. UMI », II 3 (1940), 5-7.
[34] *Su talune serie di funzioni olomorfe*, « Rend. Acc. Italia », *2* (1940-41), 829-836.

[35] *Problemi ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine di forma parametrica,* « Rend. Acc. Lincei », *2* (1947), 164-169.

[36] *Sul principio di Dirichlet per le funzioni armoniche,* « Rend. Acc. Lincei », *3* (1947), 55-59.

[37] *Sull'approssimazione delle funzioni armoniche in tre variabili,* « Rend. Acc. Lincei », *4* (1948), 530-533.

[38] *Formule di maggiorazione e teorema di esistenza per le funzioni biarmoniche di due variabili,* « Giorn. Mat. Battaglini », *77* (1948-49), 97-118.

[39] *Risultati concernenti la risoluzione delle equazioni funzionali lineari dovuti all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo,* « Rend. Mat. Roma », *9* (1950), 346-353.

[40] *Sulla sommabilità delle derivate di una funzione armonica hölderiana,* « Rend. Acc. Sc. Napoli », *19* (1951), 84-87.

[41] *Sulle proprietà di minimo e di massimo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali lineari del secondo ordine di tipo ellittico,* « Rend. Acc. Lincei », *10* (1951), 117-120.

[42] *Sull'integrazione delle forme differenziali esterne di grado $n-1$ in n variabili,* « Atti Acc. Sc. Torino », *85* (1951), 246-254.

[43] *Sui sistemi di tipo ellittico di equazioni lineari alle derviate parziali del primo ordine in n variabili indipendenti,* « Atti IV Congresso UMI », Taormina (1951), II, 156-160.

[44] *Sui sistemi di tipo ellittico di equazioni lineari alle derivate parziali del primo ordine in n variabili indipendenti,* « Mem. Acc. Lincei », *3* (1952), 85-121.

[45] *Equazioni integrali con nucleo funzione del parametro : teoria e applicazioni,* « Rend. Sem. Mat. Torino », *12* (1952-53), 67-82.

[46] *Gli integrali principali della teoria del potenziale,* « Rend. Sem. Mat. Fis. Milano », *24* (1952-53), 107-122.

[47] *Sull'integrazione delle forme differenziali esterne,* « Ricerche di Mat., Napoli », *2* (1953), 151-182.

[48] *Systèmes elliptiques d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre,* « Atti Conv. Eq. Lin. Deriv. Parziali », Trieste (1954), 30-38.

[49] *Sull'integrazione delle forme differenziali,* Proc. Intern. Congress of Math., Amsterdam (1954).

[50] *Sul problema misto per le equazioni lineari ellittiche,* « Ann. Mat. pura e appl. », *39* (1955), 279-303.

[51] *Le soluzioni fondamentali delle equazioni ellittiche,* Conf. Sem. Mat. Univ. Bari, n. 30 (1957), 14 pp.

[52] *Sul teorema del massimo modulo per le equazioni lineari ellittiche in due variabili a coefficienti reali,* « Rend. Acc. Lincei », *24* (1958), 131-134.

[53] *Teorema del massimo modulo e teorema di esistenza e di unicità per il problema di Dirichlet relativo alle equazioni ellittiche in due variabili,* « Ann. Mat. pura e appl. », *46* (1958), 265-312.

[54] *Su alcuni aspetti della teoria delle equazioni ellittiche,* « Bull. Soc. Math. France », *86* (1958), 331-354.

[55] *Alcune limitazioni integrali per le soluzioni delle equazioni lineari ellittiche del secondo ordine,* « Ann. Mat. pura e appl. », *49* (1960), 375-384.

[56] *Teoremi di unicità in domini non limitati e teoremi di Liouville per le soluzioni dei problemi al contorno relativi alle equazioni ellittiche,* « Ann. Mat. pura e appl. », *59* (1962), 189-212.

[57] *Su un problema di Dirichlet per le equazioni fortemente ellittiche a coefficienti costanti in un dominio a frontiera degenere,* « Bull. Soc. Roy. de Liège », *31* (1962), 614-636. (Cfr. osservazione dell'A. a pag. 261 di [*h*]).

[58] *Teoremi del tipo di Liouville per le soluzioni delle equazioni ellittiche,* « Rend. Mat. Roma », *21* (1962), 296-304.

[59] *Alcune osservazioni sulla maggiorazione in* L *delle soluzioni deboli delle equazioni ellittiche del secondo ordine*, « Ann. Mat. pura e appl. », *61* (1963), 151-169.
[60] *Su alcune disuguaglianze integrali*, « Mem. Acc. Lincei », 7 (1963), 1-14.
[61] *Equazioni lineari ellittiche di tipo non variazionale*, « Rend. Sem. Mat. Fis. Milano », *33* (1963), 206-210.
[62] *Sulle equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo non variazionale a coefficienti discontinui*, « Ann. Mat. pura e appl. », *63* (1963), 353-386.
[63] *Su alcuni teoremi di inclusione*, « Annales Polonici Math. », *16* (1965), 305-315.
[64] *Su una particolare equazione ellittica a coefficienti discontinui*, « Analele Stiintifiche Univ. Al. I. Cuza din Iași », XI_B (1965), 209-215.
[65] *Sulle proprietà di regolarità di certe trasformazioni integrali*, « Mem. Acc. Lincei », 7 (1965), 303-336.
[66] *Progressi e orientamenti della teoria delle equazioni ellittiche negli ultimi quindici anni*, Atti VIII Congresso UMI, Trieste (1967), 23-54 e « Boll. UMI », IV s. 1 (1968) 1-32.
[67] *Sul teorema di Riesz-Thorin*, « Ann. Mat. pura e appl. », *84* (1970), 61-72.
[68] *Sul teorema del massimo modulo per una classe di sistemi ellittici di equazioni del secondo ordine e per le equazioni a coefficienti complessi*, « Rend. Ist. Lombardo », *104* (1970), 736-745.
[69] *Su un problema di frontiera libera*, « Symp. Math. », *2* (1968), 71-83.
[70] *Su un problema di geometria differenziale in grande per gli ovaloidi*, « Ann. Mat. pura e appl. », *87* (1970), 237-270.
[71] *Aggiunte ed Errata-corrige alla memoria « Su un problema di geometria differenziale in grande per gli ovaloidi »*, « Ann. Mat. pura e appl. », *88* (1971), 349-356.
[72] *Il problema generalizzato di Minkowski per gli ovaloidi*, « Rend. Sem. Mat. Fis. Milano », *42* (1972), 81-94.

Corsi e trattati

[*a*] *Lezioni di Analisi matematica*, Vol. 1° e 2°, varie edizioni a partire dal 1939, l'ultima a cura di Liguori Editore, Napoli (1969).

[*b*] *Esercizi di Analisi matematica* (in collaborazione con M. Picone), varie edizioni a partire dal 1942, l'ultima a cura di Liguori Editore, Napoli (1967).

[*c*] *Istituzioni di Matematica*, varie edizioni a partire dal 1944, l'ultima a cura di Liguori Editore, Napoli (1970).

[*d*] *Problemi di esistenza in analisi funzionale*, « Quaderni della Sc. Num. Sup. Pisa », (1948), 184 pp., ristampato nel 1976.

[*e*] *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, Springer-Verlag, Berlin (1955), 222 pp., traduzione russa della Irdat. Inostr. Lit., Moskwa (1957), 256 pp.

[*f*] *Corso di Teoria delle funzioni* (Lezioni di Analisi funzionale), Ed. in ciclostile, «Ist. Mat. Univ. Napoli » (1958), 224 pp.

[*g*] *Corso di Matematiche superiori* (*Disuguaglianze*), Ed. in ciclostile, « Ist. Mat. Univ. Napoli «, (1962-63), 136 pp.

[*h*] *Partial differential equations of elliptic type* (Second revised edition), Springer-Verlag, Berlin (1970), 370 pp.

[*i*] *Su alcuni problemi di geometria differenziale in grande per gli ovaloidi*, Lezioni Sc. Norm. Sup. Pisa (1973).

[*l*] *Istituzioni di analisi funzionale lineare*, Ed. UMI, vol. 1° (1978), vol. 2° (1979), 748 pp.

VARIE

[*m*] *Renato Caccioppoli*, « Ann. Mat. pura e appl. », *47* (1959), I-IV.
[*n*] *Il problema edilizio della Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali dell'Università di Napoli*, Ed. Univ. Napoli (1962), 15 pp.
[*o*] *Breve storia e prospettive future dell'Istituto di Matematica della Facoltà di Scienze dell'Università di Napoli*, « Rend. Acc. Sc. Napoli », *44* (1977), 1-38.
[*p*] *Mauro Picone*, « Celebrazioni lincee », n. 114 (1978), 26 pp.
[*q*] *Federico Cafiero*, « Rend. Acc. Sc. Napoli », *47* (1980-81), 9 pp.