Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Piero Mangani

Calcoli generali con «tipi» e Logiche generalizzate

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **76** (1984), n.1, p. 1–6.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1984_8_76_1_1_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1984.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 14 gennaio 1984

Presiede il Presidente della Classe GIUSEPPE MONTALENTI

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Logica matematica. — *Calcoli generali con « tipi » e Logiche generalizzate.* Nota (*) di PIERO MANGANI, presentata (**) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — In this paper we introduce a notion of " Generalized Logic " and we study some of its properties.

I) Sia $\Gamma = \langle I , \subseteq , \cup , \cap , 0 \rangle$ un reticolo con minimo.

Chiameremo « *Calcolo generale tipizzato* » una struttura del tipo $\langle E , K , f , \Gamma \rangle$ dove:

i) $\langle E , K \rangle$ è un G.G., cioè K è un operatore di Moore su E ($KX \supseteq X , K^2 = K , X \subseteq Y \rightarrow KX \subseteq KY$, per ogni $X , Y \subseteq E$) (cfr. [4], [5]).

ii) $f : E \rightarrow I$ è suriettiva.

Si hanno le seguenti conseguenze pressoché immediate della definizione, posto:

$E_\tau = \{x \in E : f(x) \in \subseteq \tau\}$ e $K_\tau = K \upharpoonright E_\tau$ per ogni $\tau \in I$.

a) $E = \bigcup_{\tau \in I} E_\tau$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del programma di ricerca diretto dal Prof. L. Antonio Rosati e finanziato con i fondi 60% del M.P.I. (anno 1982–83).

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1984.

b) Se $x \in E_\tau$ e $\tau_1 \supseteq \tau$ allora $x \in E_{\tau_1}$.

c) Se K è *algebrico* (cioè per ogni $X \subseteq E$ e per ogni $x \in KX$ esiste X_0 finito $\subseteq X$ tale che $x \in KX_0$) allora K_τ è *algebrico* su E_τ.

d) $\tau_1 \supseteq \tau_2$ se e solo se $E_{\tau_1} \subseteq E_{\tau_2}$.

e) $\langle E_\tau : \tau \in I \rangle$ risulta un reticolo rispetto alle operazioni $\cap$ e $\wedge$, dove $E_{\tau_1} \wedge E_{\tau_2} = E_{\tau_1 \cup \tau_2}$.

Un « Calcolo generale con congiunzione, vero e falso » (brevemente: una « *Logica generalizzata* ») sarà ora una struttura del tipo $\langle E , K , f , \mathscr{T} , \wedge , \perp , \top \rangle$ tale che:

i) $\langle E , K , f , \mathscr{T} \rangle$ è un Calcolo generale tipizzato.
ii') $\wedge : E^2 \to E$ è tale che $K\{x, y\} = K\{x \wedge y\}$ (Nella terminologia di A.W. Jankowski [3], $\langle E, K \rangle$ è allora un « ω-conjunctive closure space »).
iii') $f(x \wedge y) \subseteq f(x) \cup f(y)$.
iv') $K \varnothing \neq \varnothing$ e $K \varnothing \neq E$.
vi') $\top \in K \varnothing$.
vi') $K\{\perp\} = E$.
vii'') $f(\perp) = f(\top) = 0$ (quindi $\perp$, $\top \in E_\tau$, per ogni $\tau \in I$).

Data una Logica generalizzata $\mathscr{L}$, consideriamo su E la relazione di equivalenza $\sim$ così definita:

$$x \sim y \quad \text{sse} \quad K\{x\} = K\{y\}.$$

« *Legge logica in* $\mathscr{L}$ » è un qualunque: $1 \in E$ tale che $1 \sim \top$.
« *Contraddizione in* $\mathscr{L}$ » è un qualunque $c \in E$ tale che $c \sim \perp$.
Si ha facilmente:

PROPOSIZIONE 1. $K \varnothing = \{1 : 1 \sim \top\} = K\{\top\}$.
Si ha inoltre:

PROPOSIZIONE 2. *La relazione* $\sim$ *è sostitutiva rispetto all'operazione* $\wedge$.
Infatti siano $x \sim x'$ e $y \sim y'$; allora $K\{x \wedge y\} = K\{x, y\} = K(K\{x\} \cup K\{y\}) = K(K\{x'\} \cup K\{y'\}) = K\{x', y'\} = K\{x' \wedge y'\}$.
Dunque: $x \wedge y \sim x' \wedge y'$.

PROPOSIZIONE 3. *L'operazione* $\wedge$ *gode delle seguenti proprietà*: $x \wedge x \sim x$; $x \wedge y \sim y \wedge x$; $x \wedge (y \wedge z) \sim (x \wedge y) \wedge z$; $x \wedge \top \sim x$; $x \wedge \perp \sim \perp$.

Dimostrazione: di routine.

Una Logica generalizzata si dirà *ridotta* allorché la relazione $\sim$ è l'identità. In una Logica ridotta l'operazione $\wedge$ è idempotente, commutativa e associativa.

Introduciamo ora una *semantica* per le Logiche generalizzate: sia $\mathscr{L}$ una tale logica. Una *semantica per* $\mathscr{L}$ è data assegnando:

1) Per ogni $\tau \in I$ una categoria Σ_τ, con la proprietà che $Ob(\Sigma_\tau) \cap Ob(\Sigma_{\tau'}) = \varnothing$, se $\tau \neq \tau'$.

2) Una relazione $\models$, $\subseteq (\bigcup_{\tau \in I} Ob(\Sigma_\tau)) \times E$, tale che:

2_1) per ogni $a \in \bigcup_{\tau \in I} Ob(\Sigma_\tau)$, $a \models \mathrm{T}$.

2_2) per ogni $a \in Ob(\Sigma_\tau)$ con $a \models x$, si ha $x \in E_\tau$.

2_3) per ogni a e per ogni x, se $a \models x$ e $x \in E_\tau$ allora esiste $\tau' \supseteq \tau$ tale che $a \in Ob(\Sigma_{\tau'})$.

[2_4) [per ogni $x, y \in E_\tau$ ed ogni $a \in Ob(\Sigma_\tau)$ si ha: $a \models x \wedge y$ sse $a \models x$ e $a \models y$].

2_5) per ogni $X \subseteq E_\tau$ ed ogni $a \in Ob(\Sigma_\tau)$, se $y \in K_\tau X$ ed $a \models X$ (cioè: $a \models x$ per ogni $x \in X$) allora $a \models y$.
(Si può agevolmente provare che 2_5 implica 2_4).

3) Per ogni coppia τ, τ', con $\tau' \supseteq \tau$, un funtore $\Phi_\tau : \Sigma_{\tau'} \to \Sigma_\tau$ soddisfacente:

3_1) $\Phi_\tau^\tau = id_{\Sigma_\tau}$

3_2) $\Phi_\tau^{\tau'}$ è *suriettivo* sugli oggetti e *fedele*.

3_3) Se $x \in E_\tau$ ed $a \in Ob(\Sigma_{\tau'})$ con $\tau' \supseteq \tau$, si ha:
$a \models x$ sse $\Phi_\tau^{\tau'}(a) \models x$.
Se $a \in Ob(\Sigma_\tau)$, poniamo $\mathrm{T}h(a) = \{x \in E_\tau : a \models x\}$.

PROPOSIZIONE 4. $\mathrm{T}h(a)$ *è un chiuso di* $\langle E_\tau, K_\tau \rangle$. (Usare la proprietà 2_5)
Se $a, b \in \Sigma_\tau$, poniamo $a \equiv_{\mathscr{L}} b$ sse $\mathrm{T}h(a) = \mathrm{T}h(b)$.
Si ha:

PROPOSIZIONE 5. $\Phi_\tau^{\tau'}$ *« conserva » la relazione* $\equiv_{\mathscr{L}}$, *cioè se* $a, b \in \Sigma_{\tau'}$, ed $a \equiv_{\mathscr{L}} b$ *allora anche* $\Phi_\tau^{\tau'}(a) \equiv_{\mathscr{L}} \Phi_\tau^{\tau'}(b)$.
(Usare la proprietà 3_3).
(Si osservi che le definizioni date sopra si giustificano come generalizzazioni dei consueti concetti di « tipo di una formula », « tipo di una struttura », « semantica tarskiana » per la logica $L\omega\omega$).

II) Sia $\mathscr{L}$ una logica generalizzata. Diremo che $X \subseteq E$ è *coerente* se $KX \neq E$.
Abbiamo ora:

PROPOSIZIONE 6. X *è coerente* sse $\perp \notin KX$; *inoltre se* $X \subseteq E_\tau$, X *è coerente* sse $K_\tau X \neq E_\tau$.

La prima parte della proposizione è ovvia; per la seconda parte si ha: $K_\tau X \neq E_\tau$ sse $KX \cap E_\tau \neq E_\tau$ sse $KX \not\supseteq E_\tau$ da cui $KX \neq E$ Viceversa sia X coerente, allora $K_\tau X \neq E_\tau$ poiché altrimenti $\perp \in K_\tau X$ (essendo $f(\perp) = 0$), cioè $\perp \in KX \cap E_\tau$ ed infine $\perp \in KX$, contro l'ipotesi.

Una struttura $a \in Ob(\Sigma)$ si dice *degenere* allorché $a \models \mathrm{T}$

(Per una logica generalizzata possono esistere strutture degeneri: si pensi, ad esempio, alla logica equazionale ed alla logica universale positiva [6]).

Ovviamente se $a_1, a_2 \in \Sigma_\tau$ sono degeneri si ha $a_1 \equiv_{\mathscr{L}} a_2$.

Diremo allora che $X \subseteq E_\tau$ è *debolmente consistente* se esiste $a \in Ob(\Sigma_\tau)$ tale che $a \models X$; diremo che $X \subseteq E_\tau$ è *consistente* se ha *modelli* in $Ob(\Sigma_\tau)$ (oggetti a tali cioè che $a \in Ob(\Sigma_\tau)$ e $a \models X$) *tutti non degeneri.*

Si ha:

PROPOSIZIONE 7 (validità della logica $\mathscr{L}$). *Se* $X \subseteq \Sigma_\tau$ *è consistente allora* X *é anche coerente.*

Infatti $\perp \notin K_\tau X$ poiché se $a \models X$ è anche $a \models KX$ ed a non è degenere.

Ovviamente se $X \subseteq E_\tau$ è *consistente* è *anche debolmente consistente.* Le altre implicazioni fra i tre concetti sono tutte false in generale, infatti:

a) Nella logica equazionale e nella logica universale positiva esistono X debolmente consistenti ma non consistenti.

b) Nella logica del secondo ordine esistono X coerenti ma non consistenti (e neppure debolmente consistenti).

c) Nella logica equazionale esistono X debolmente consistenti ma non coerenti.

Diremo che $T \subseteq E_\tau$ è una *teoria* della logica $\mathscr{L}$ se T è chiuso in $\langle E_\tau, K_\tau \rangle$. Una teoria $T \subseteq E_\tau$ è *massimale* se T *è un chiuso massimale proprio* di $\langle E_\tau, K_\tau \rangle$. Se $X \subseteq E_\tau$, diremo che X è *completo* se $K_\tau X$ è una teoria massimale.

Si ha:

PROPOSIZIONE 8. *Se* $T \subseteq E_\tau$ *è massimale e consistente per ogni suoi due modelli* a_1, a_2 si ha: $a_1 \equiv_{\mathscr{L}} a_2$.

Infatti, se non fosse $a_1 \equiv_{\mathscr{L}} a_2$, esisterebbe, ad esempio, $x \in E_\tau$ tale che $a_1 \models x$ e $a_2 \not\models x$. Allora $x \notin T$ ed essendo T massimale, $T \cup \{x\}$ non è coerente, cioè $\perp \in K(T \cup \{x\})$.

Ma poiché $a_1 \models T \cup \{x\}$, si avrebbe $a_1 \models \perp$ contro l'ipotesi che T sia consistente.

Poniamo infine le seguenti definizioni:

Una logica $\mathscr{L}$ si dirà *regolare* se $Th(a)$, con a non degenere ($a \in Ob(\Sigma_\tau)$, per qualche τ), è una teoria massimale.

Una logica $\mathscr{L}$ si dirà *normale* se, per ogni $a, b \in Ob(\Sigma_\tau)$ e tali che $a \simeq b$ (esiste cioè un isomorfismo f nella categoria Σ_τ tale che $f : a \to b$), si ha $a \equiv_{\mathscr{L}} b$.

Una logica $\mathscr{L}$ si dirà *completa* se ogni teoria coerente è anche consistente.

Una logica $\mathscr{L}$ si dirà (*sintatticamente*) *compatta* se, per ogni $\tau \in I$, K_τ è algebrico su E_τ (ovviamente se K è algebrico la logica è compatta).

Data una logica generalizzata $\mathscr{L}$ ed una semantica per essa, possiamo definire, nel modo usuale, l'operatore K_τ^* di «conseguenza logica»: se $X \subseteq E_\tau$ allora $K_\tau^* X = \{x \in E : \text{per ogni } a \in \bigcup_{\tau \in I} Ob(\Sigma_\tau), \text{ se } a \models X \text{ allora } a \models x\}$.

Vale la:

PROPOSIZIONE 9. $K_\tau^* \supseteq K_\tau$.

(Basta usare 2_5).

Abbiamo allora che la struttura $\langle \bigcup_{\tau \in I} Ob(\Sigma_\tau), \simeq, E_\tau, \models, K_\tau \rangle$ risulta, per ogni τ, *nel caso che la logica* $\mathscr{L}$ *sia normale*, un'astrazione del concetto di « struttura logica » introdotto da A.W. Jankowski [3].

III) Nelle logiche generalizzate è possibile formulare le proprietà di Craig e di Robinson (cfr. [1], [2]).

Craig ammette almeno due formulazioni (in generale non equivalenti):

Craig α: *Se* $x \in \mathrm{K}\{y\}$, *con* $x \in \mathrm{E}_{\tau_1}$ *e* $y \in \mathrm{E}_{\tau_2}$, *esiste* $z \in \mathrm{E}$, *con* $z \in \mathrm{E}_{\tau_1 \cap \tau_2}$, *tale che* $z \in \mathrm{K}\{y\}$ *e* $x \in \mathrm{K}\{z\}$.

Craig β : *Se* $\mathrm{K}\{x, y\} = \mathrm{E}$, *con* $x \in \mathrm{E}_{\tau_1}$ *e* $y \in \mathrm{E}_{\tau_2}$, *esiste* $z \in \mathrm{E}$, *con* $z \in \mathrm{E}_{\tau_1 \cap \tau_2}$, *tale che* $z \in \mathrm{K}\{x\}$ *e* $\mathrm{K}\{y, z\} = \mathrm{E}$ *oppure* $z \in \mathrm{K}\{y\}$ *e* $\mathrm{K}\{x, z\} = \mathrm{E}$.

La proprietà di Robinson, *a livello sintattico*, si può enunciare così:

Se T *è massimale in* E_τ *e* $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2$ *sono coerenti rispettivamente in* $\mathrm{E}_{\tau_1}, \mathrm{E}_{\tau_2}$, *con* $\tau_1, \tau_2 \supseteq \tau$, $\tau_1 \cap \tau_2 = \tau$ *e* $\mathrm{T}_1 \supseteq \mathrm{T}, \mathrm{T}_2 \supseteq \mathrm{T}$, *allora* $\mathrm{T}_1 \cup \mathrm{T}_2$ *è coerente in* $\mathrm{E}_{\tau_1 \cup \tau_2}$

(Per l'importanza delle proprietà di Craig e di Robinson in logica astratta cfr. [7], [8], [9]).

Abbiamo ora il seguente:

TEOREMA. *Se* $\mathscr{L}$ *è una logica sintatticamente compatta e con Craig* β *allora* $\mathscr{L}$ *ha la proprietà di Robinson.*

Premettiamo il seguente:

LEMMA. *Se* $\tau' \supseteq \tau$ *ed* $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{E}_\tau$, $\mathrm{K}_\tau \mathrm{X} = \mathrm{K}_{\tau'} \mathrm{X} \cup \mathrm{E}_\tau$. *Infatti* : $\mathrm{K}'_\tau, \mathrm{X} = \mathrm{K}\,\mathrm{X} \cap \mathrm{E}_{\tau'}$, *da cui* $\mathrm{K}_{\tau'}\mathrm{X} \cap \mathrm{E}_\tau = \mathrm{K}\,\mathrm{X} \cap \mathrm{E}_{\tau'} \cap \mathrm{E}_\tau$ *ma poichè* $\mathrm{E}_{\tau'} \supseteq \mathrm{E}_\tau$ *si ha* $\mathrm{K}_{\tau'}\mathrm{X} \cap \mathrm{E}_\tau = \mathrm{K}\mathrm{X} \cap \mathrm{E}_\tau = \mathrm{K}_\tau \mathrm{X}$.

Dimostriamo ora il teorema:

Siano $\mathrm{T}, \mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2$ nelle condizioni previste dall'enunciato della proprietà di Robinson e sia, per assurdo, $\mathrm{K}_{\tau_1 \cup \tau_2}(\mathrm{T}_1 \cup \mathrm{T}_2) = \mathrm{E}_{\tau_1 \cup \tau_2}$. Per la compattezza della logica esiste allora X_0 finito, $\mathrm{X}_0 \subseteq \mathrm{T}_1 \cup \mathrm{T}_2$, tale che $\mathrm{K}_{\tau_1 \cup \tau_1}(\mathrm{X}_0) = \mathrm{E}_{\tau_1 \cup \tau_2}$. $\mathrm{X}_0 \nsubseteq \mathrm{T}_1$ e $\mathrm{X}_0 \nsubseteq \mathrm{T}_2$, poiché altrimenti, se ad esempio $\mathrm{X}_0 \subseteq \mathrm{T}_1$ si avrebbe (per il lemma) $\mathrm{K}_{\tau_1}(\mathrm{X}_0) = \mathrm{K}_{\tau_1 \cup \tau_2}(\mathrm{X}_0) \cap \mathrm{E}_{\tau_1} = \mathrm{E}_{\tau_1}$, contro l'ipotesi che T_1 è coerente.

Abbiamo allora che esistono due sottoinsiemi propri non vuoti di X_0, X'_0 e X''_0, tali che $\mathrm{X}'_0 \subseteq \mathrm{T}_1$ e $\mathrm{X}''_0 \subseteq \mathrm{T}_2$.

Poniamo $x = \wedge \mathrm{X}'_0$ e $y = \wedge \mathrm{X}''_0$ (cfr. Proposizione 3).

Ora $\mathrm{K}_{\tau_1 \cup \tau_2}\{x, y\} = \mathrm{E}_{\tau_1 \cup \tau_2}$. Per Craig β esiste allora z, con $z \in \mathrm{E}_{\tau_1 \cap \tau_2} = \mathrm{E}_\tau$, tale che valga una delle due condizioni seguenti:

$$z \in \mathrm{K}_{\tau_1}\{x\} \text{ e } \mathrm{K}_{\tau_2}\{y, z\} = \mathrm{E}_{\tau_2}$$

$$z \in \mathrm{K}_{\tau_2}\{y\} \text{ e } \mathrm{K}_{\tau_1}\{x, z\} = \mathrm{E}_{\tau_1}.$$

Nel primo caso abbiamo:

se $z \in \mathrm{T}$ allora $z \in \mathrm{T}_2$ e quindi poiché $y \in \mathrm{T}_2$, T_2 sarebbe incoerente. Allora $z \notin \mathrm{T}$, quindi (poiché T è massimale) $\mathrm{T} \cup \{z\}$ sarebbe incoerente. Ma $x \in \mathrm{T}_1$, dunque anche $z \in \mathrm{T}_1$ e $\mathrm{T} \cup \{z\} \subseteq \mathrm{T}_1$, assurdo poiché T_1 è coerente.

Ragionamento analogo nel secondo caso. Il teorema è così provato.

Bibliografia

[1] Bell e Slomson (1971) – *Models and ultraproducts.* NHPC.

[2] Chang e Kleisler (1973) – *Model Theory.* NHPC.

[3] A.W. Jankowki (1982) – *An alternative characterisation of Elementary Logic.* « Bul. Acad. Polon. des Sci. », XXX (1-2), 198.

[4] R. Magari (1966) – *Calcoli generali e spazi* V_α . (I) « Le Matematiche », XXI (1).

[5] P. Mangani (1968) – *Calcoli generali con connettivi,* « Le Matematiche », XXIII (1).

[6] Marcja e Tulipani (1974) – *Questioni di teoria dei modelli per linguaggi universali positivi* (I). « Rend. Accademia Naz. Lincei », Serie VIII, *56* (6).

[7] Makowsky e Shelah (1979) – *The Theorems of Beth and Craig in abstract model theory* (I). « Trans. Amer. Math. Soc. », *256.*

[8] D. Mundici (1981) – *Applications of many-sorted Robinson consistency theorem.* « Zeit. Math. Logik », *27* (1).

[9] D. Mundici (1981) – *Robinson's consistency theorem in soft model theory.* « Trans. Amer. Math. Soc. », *263.*