Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Gaetano Fichera

Sul teorema di Cauchy-Morera per le funzioni analitiche di più variabili complesse

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **74** (1983), n.6, p. 336–350.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1983_8_74_6_336_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Analisi matematica. — *Sul teorema di Cauchy–Morera per le funzioni analitiche di più variabili complesse.* Nota (*) del Socio
GAETANO FICHERA.

SUMMARY. — A Cauchy–Morera theorem is proved for a function w of n complex variables, assuming only $w \in L^1_{loc}$. A related result of Bochner, concerning continuous functions, is extended to a larger function class.

Sia Ω un aperto dello spazio cartesiano $\mathbf{R}^{2n}$ delle $2n$ variabili reali $x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n$, sul quale si rappresenta lo spazio $\mathbf{C}^n$ delle n variabili complesse $z_1 = x_1 + iy_1, \cdots, z_n = x_n + iy_n$. Il teorema di Cauchy–Morera afferma che

La funzione a valori complessi $w(z_1, \cdots, z_n)$, continua in Ω, è funzione olomorfa in Ω di $z_1, \cdots, z_n$ se e solo se

$$\int_{\partial\sigma^{n+1}} w(z_1, \cdots, z_n)\, dz_1 \cdots dz_n = 0, \tag{1}$$

essendo σ^{n+1} un qualsiasi $n+1$-simplesso regolare contenuto in Ω (1).

Il teorema, classicamente noto per $n = 1$, sia per quanto concerne la necessità della (1) (Cauchy, 1825), sia per quanto attiene alla sua sufficienza (Morera, 1886), è stato oggetto di numerose ricerche per $n \geq 2$. Poincaré [1] per primo dimostrò, per $n = 2$, la necessità della (1) ed analogo risultato ottenne Volterra [2] qualche anno dopo. Il risultato di Poincaré trovasi incluso nel Trattato di Picard [3] (p. 253). Fra le varie dimostrazioni fornite per il teorema di Cauchy (necessità della condizione (1)) nel caso $n = 2$, occorre ricordare quella dovuta a Nalli e Andreoli [4], [5] per la generalità concessa a σ^3. Usando il calcolo delle forme differenziali esterne, non ancora sviluppatosi all'epoca di Poincaré e di Volterra, la dimostrazione della necessità della (1) per l'olomorfia di w in Ω è pressochè immediata, come ha fatto vedere Wirtinger [6], il quale ha anche ottenuto estensioni del teorema di Cauchy considerando condizioni integrali nelle quali σ^{n+1} viene sostituito con un $(n+l)$-simplesso $(1 \leq l \leq n)$. Di maggiore impegno è l'estensione al caso $n > 1$ del teorema di Morera (sufficienza della condizione (1)). Il problema si semplifica notevolmente supponendo la w funzione delle $2n$ variabili reali $x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n$ di classe $C^1(\Omega)$. In tali ipotesi, la sufficienza della (1) venne dimostrata da Volterra [2] e, successivamente, da

(*) Presentata nella seduta del 23 giugno 1983.

(1) Si veda nel prosieguo di questa Nota la definizione da noi assunta di k–simplesso regolare.

E. Pascal [7]. La questione diventa, però, veramente difficile se si suppone, soltanto, che w appartiene a $C^0(\Omega)$. Si deve a Severi [8] la prima dimostrazione del teorema di Morera, per $n=2$, nella sola ipotesi $w \in C^0(\Omega)$. Il risultato di Severi è stato esteso in varie direzioni da diversi Autori. In particolare Martinelli [9], ispirandosi alla dimostrazione data da Severi in [8], ha mostrato sufficienti per l'olomorfia di w le condizioni integrali, nelle quali σ^{n+1} viene sostituito con σ^{n+l}, introdotte da Wirtinger e delle quali, come si è sopra accennato, questo Autore aveva mostrato la necessità. Per una generalizzazione al caso $n \geq 2$ del teorema di Morera, si veda anche la Monografia [10] (p. 198).

Si deve a Bochner [11] un generale teorema, il quale contiene tutte le estensioni del teorema di Cauchy–Morera, comprese quelle dovute a Wirtinger ed a Martinelli (2).

Scopo di questa Nota è dimostrare il teorema di Cauchy–Morera per $n \geq 1$ e, più in generale, il teorema di Bochner nella sola ipotesi che sia $w \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ $(p \geq 1)$. Il conseguimento di tali obiettivi è reso possibile dalla preliminare dimostrazione dell'equivalenza di tre prolungamenti dell'operatore di differenziazione d per le forme differenziali esterne.

1. Detto m un intero positivo, consideriamo la funzione della variabile reale t così definita: $\mu(t) = c_m \exp[(t^2-1)^{-1}]$ per $|t| < 1$ e $\mu(t) = 0$ per $|t| \geq 1$, essendo

$$c_m = \left\{ \int_0^1 \exp[(t^2-1)^{-1}]\, t^{m-1}\, dt \right\}^{-1}.$$

La funzione $\mu(t)$ appartiene a $\mathring{C}^\infty(\mathbf{R})$ ed ha supporto contenuto in $[-1, 1]$. Si indichi con $x = (x_1, \cdots, x_m)$ il punto dello spazio cartesiano reale $\mathbf{R}^m$; $|x|$ denoti il modulo di x, cioè $|x| = \left(\sum_{h=1}^m x_h^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Per ogni $\varepsilon > 0$, si ponga: $\mu_\varepsilon(x) = (m\omega_m \varepsilon^m)^{-1} \mu(|x|/\varepsilon)$, essendo ω_m la misura del campo sferico di raggio 1 di $\mathbf{R}^m$.

Detto $B_\varepsilon(x)$ il campo sferico di $\mathbf{R}^m$ di centro il punto x e raggio ε, si ha:

$$\int_\Omega \mu_\varepsilon(y)\, dy = \int_{B_\varepsilon(0)} \mu_\varepsilon(y)\, dy = \int_{B_\varepsilon(x)} \mu_\varepsilon(x-y)\, dy = \int_\Omega \mu_\varepsilon(x-y)\, dy = 1$$

$$(dy = dy_1 \cdots dy_m).$$

Sia Ω un aperto di $\mathbf{R}^m$. D'ora in avanti indicheremo con A un generico aperto limitato la cui chiusura $\bar{A}$ sia contenuta in Ω. Indicheremo con ε_0 un numero

(2) Occorre dire che Bochner dimostra soltanto la parte « sufficiente » del teorema (estensione dei teoremi tipo Morera), laddove la dimostrazione della « necessità » (teoremi tipo Cauchy) è stata successivamente data da Aruffo [12].

positivo tale che la chiusura $\bar{A}_{\varepsilon_0}$ dell'intorno A_{ε_0} di A sia contenuta in Ω. Assumeremo sempre, anche quando non esplicitamente menzionato, $x \in A$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Sia f una funzione a valori complessi appartenente a $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Si consideri l'*operatore regolarizzante* (*Mollifier*, secondo la locuzione di Friedrichs [13])

$$M_\varepsilon f = \int_\Omega \mu_\varepsilon (x - y) f(y) \, dy .$$

Si ha anche

$$f^\varepsilon(x) \equiv M_\varepsilon f = \int_{B_\varepsilon(x)} \mu_\varepsilon (x - y) f(y) \, dy = \int_{B_\varepsilon(0)} \mu_\varepsilon (y) f(x + y) \, dy .$$

Sono ben note e, d'altronde, immediatamente verificabili, le seguenti proprietà dell'operatore M_ε (cfr. [13], [14]).

I. *La funzione* $f^\varepsilon(x)$ *appartiene a* $C^\infty(A)$ *e, se è* $\operatorname{supp} f \subset A$, *si ha* $f^\varepsilon(x) \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(A_\varepsilon)$. *Si ha inoltre, qualunque sia il multi-indice* α,

$$D^\alpha f^\varepsilon(x) = \int_\Omega [D^\alpha \mu_\varepsilon (x - y)] f(y) \, dy \qquad \left(D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}} \right) .$$

II. *Se è* $f(x) \in C^0(\Omega)$ *e se esiste la derivata parziale* $\partial f / \partial x_k$ *ed appartiene a* $C^0(\Omega)$, *si ha*: $\dfrac{\partial}{\partial x_k} M_\varepsilon f = M_\varepsilon \dfrac{\partial}{\partial x_k} f$.

In questa Nota indicheremo con $\mathscr{L}$ uno qualsiasi dei seguenti spazi di funzioni a valori complessi: 1) lo spazio $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ per ogni $p : 1 \leq p < \infty$; 2) lo spazio $C^0(\Omega)$. Definiremo al modo seguente, per ogni A del tipo anzidetto, la norma, relativa ad A, della funzione f di $\mathscr{L}$;

$$\|f\|_A \begin{cases} = \left(\displaystyle\int_A |f|^p \, dx \right)^{1/p} & \text{se } \mathscr{L} = L^p_{\text{loc}}(\Omega), \ 1 \leq p < \infty , \\ = \displaystyle\max_{\bar{A}} |f| & \text{se } \mathscr{L} = C^0(\Omega) . \end{cases}$$

Anche le proprietà, espresse dai lemmi che seguono, sono da considerarsi note (cfr. [13], [14]). Ne riportiamo, tuttavia, le semplici dimostrazioni.

III. *Siano* f *e* g *contenute in* $\mathscr{L}$. *Sia* $\operatorname{supp} g \subset A$. *Si ha* (*per* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$):

$$\int_\Omega f \, M_\varepsilon g \, dx = \int_\Omega (M_\varepsilon f) g \, dx .$$

Sia $\tilde{f}$ la funzione identicamente nulla in $\mathbf{R}^m - \Omega$ e coincidente con f in Ω. Si ha

$$\int_\Omega f\,\mathrm{M}_\varepsilon g\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^m} \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x \int_{\mathrm{B}_\varepsilon(0)} \mu_\varepsilon(y)\,g(x+y)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{\mathrm{B}_\varepsilon(0)} \mu_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y \int_{\mathbf{R}^m} \tilde{f}(x)\,g(x+y)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathrm{B}_\varepsilon(0)} \mu_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y \int_{\mathrm{A}} \tilde{f}(x-y)\,g(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{\mathrm{A}} g(x)\,\mathrm{d}x \int_{\mathrm{B}_\varepsilon(0)} \mu_\varepsilon(y)\,\tilde{f}(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_\Omega g(x)\,\mathrm{M}_\varepsilon f\,\mathrm{d}x\,.$$

IV. *Se è* $f \in \mathscr{L}$, *si ha* (*per* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$):

$$\| \mathrm{M}_\varepsilon f \|_{\mathrm{A}} \leq \| f \|_{\mathrm{A}_\varepsilon}\,. \tag{1.1}$$

Supponiamo $\mathscr{L} \equiv \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)\,,\ 1 < p < \infty$. Posto $q = p\,(p-1)^{-1}$, si ha:

$$\| \mathrm{M}_\varepsilon f \|_{\mathrm{A}} = \left(\int_{\mathrm{A}} \left| \int_\Omega \mu_\varepsilon(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y \right|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p} \leq$$

$$\left\{ \int_{\mathrm{A}} \left[\int_\Omega [\mu_\varepsilon(x-y)]^{1/q} [\mu_\varepsilon(x-y)]^{1/p} \,|\, f(y) \,|\, \mathrm{d}y \right]^p \mathrm{d}x \right\}^{1/p} \leq$$

$$\left\{ \int_{\mathrm{A}} \left[\left(\int_\Omega \mu_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y \right)^{p/q} \left(\int_\Omega \mu_\varepsilon(x-y) \,|\, f(y) \,|^p\, \mathrm{d}y \right) \right] \mathrm{d}x \right\}^{1/p} \leq$$

$$\left(\int_{\mathrm{A}} \left[\int_\Omega \mu_\varepsilon(x-y) \,|\, f(y) \,|^p\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \right\}^{1/p} = \left(\int_{\mathrm{A}_\varepsilon} | f(y) |^p\, \mathrm{d}y \int_{\mathrm{A}} \mu_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}x \right)^{1/p} \leq \| f \|_{\mathrm{A}_\varepsilon}.$$

Dalle diseguaglianze

$$\int_{\mathrm{A}} | f^\varepsilon(x) |\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathrm{A}} \mathrm{d}x \int_\Omega \mu_\varepsilon(x-y) \,|\, f(y) \,|\, \mathrm{d}y \leq \int_{\mathrm{A}_\varepsilon} | f(y) |\,\mathrm{d}y\,,$$

$$| f^\varepsilon(x) | \leq \int_{\mathrm{A}_\varepsilon} \mu_\varepsilon(x-y) \,|\, f(y) \,|\, \mathrm{d}y \leq \max_{\overline{\mathrm{A}}_\varepsilon} | f | \qquad (x \in \mathrm{A})\,,$$

si trae la (1.1) se $\mathscr{L} = \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, oppure se $\mathscr{L} = \mathrm{C}^0(\Omega)$.

V. *Se è* $f \in \mathscr{L}$, *si ha*:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| \mathrm{M}_\varepsilon f - f \|_{\mathrm{A}} = 0\,. \tag{1.2}$$

Sia dapprima $\mathscr{L} = C^0(\Omega)$. Dato $\sigma > 0$, sia $\delta_\sigma(f)$ tale che per $|x - \xi| < \delta_\sigma(f)$, $x \in \bar{A}_{\varepsilon_0}$, $\xi \in \bar{A}_{\varepsilon_0}$, sia $|f(x) - f(\xi)| < \sigma$. Abbiamo, per $\varepsilon < \min[\varepsilon_0, \delta_\sigma(f)]$ e $x \in \bar{A}$,

$$\left| f(x) - \int_\Omega \mu_\varepsilon(x-y) f(y)\, dy \right| \leq \int_\Omega \mu_\varepsilon(x-y) |f(x) - f(y)|\, dy =$$

$$\int_{B_\varepsilon(0)} \mu_\varepsilon(y) |f(x) - f(x+y)|\, dy < \sigma.$$

Questo prova la (1.2) se $\mathscr{L} = C^0(\Omega)$. Sia $\mathscr{L} = L^p_{\text{loc}}(\Omega)$. Denoti $\psi(x)$ una funzione di $C^0(\Omega)$ tale che $\|\psi - f\|_{A_{\varepsilon_0}} < \sigma$. Si ha, per $\varepsilon < \min[\varepsilon_0, \delta_\sigma(\psi)]$, ricordando la (1.1):

$$\|M_\varepsilon f - f\|_A \leq \|M_\varepsilon f - M_\varepsilon \psi\|_A + \|M_\varepsilon \psi - \psi\|_A + \|\psi - f\|_A <$$

$$2\|\psi - f\|_{A_{\varepsilon_0}} + (\text{mis } A)^{1/p} \sigma < [2 + (\text{mis } A)^{1/p}]\, \sigma.$$

Ciò completa la dimostrazione del lemma.

Sia u una forma differenziale esterna di grado k (semplicemente *k-forma*) a coefficienti complessi, che nel sistema di coordinate naturali di $\mathbf{R}^m$ sia rappresentata da

$$u = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} u_{i_1 \cdots i_k}(x)\, dx_{i_1} \cdots dx_{i_k}. \tag{1.3}$$

Diremo che u appartiene a $\mathscr{L}_k$ $[C^s_k(\Omega), \overset{\circ}{C}{}^\infty_k(\Omega)$, etc.] se ogni suo coefficiente $u_{i_1 \cdots i_k}$ appartiene a $\mathscr{L}$ $[C^s(\Omega), \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$, etc.]. Porremo, per $u \in \mathscr{L}$,

$$M_\varepsilon u = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} (M_\varepsilon u_{i_1 \cdots i_k})\, dx_{i_1} \cdots dx_{i_k} \quad , \quad \|u\|_A = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \|u_{i_1 \cdots i_k}\|_A .$$

Dai Lemmi I, II, III, IV, V seguono immediatamente i seguenti:

VI. *Se* $u \in \mathscr{L}_k$, *la k-forma* $M_\varepsilon u$ *appartiene a* $C^\infty_k(A)$. *Se* $\operatorname{supp} u \subset A$, *riesce* $M_\varepsilon u \in \overset{\circ}{C}{}^\infty_k(A_\varepsilon)$. *Se è* $u \in C^1_k(\Omega)$, *si ha in ogni punto di* A: $dM_\varepsilon u = M_\varepsilon du$.

VII. *Sia* $u \in \mathscr{L}_k$ *e* $\psi \in \mathscr{L}_{m-k}$. *Sia* $\operatorname{supp} \psi \subset A$. *Si ha*

$$\int_\Omega u \wedge M_\varepsilon \psi = \int_\Omega M_\varepsilon u \wedge \psi .$$

VIII. *Per ogni* $u \in \mathscr{L}_k$ *si ha*:

(1.4) $\|M_\varepsilon u\|_A \leq \|u\|_{A_\varepsilon}$; (1.5) $\lim_{\varepsilon \to 0} \|M_\varepsilon u - u\|_A = 0$.

Diremo che $u \in \mathscr{L}_k$ è il *differenziale debole* di $v \in \mathscr{L}_{k-1}$ se per ogni $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{m-k}(\Omega)$ si ha

$$\int_\Omega v \wedge d\varphi = (-1)^k \int_\Omega u \wedge \varphi . \tag{1.6}$$

È ovvia l'unicità del differenziale debole (quando esiste) di una $(k-1)$-forma v.

Diremo che $u \in \mathscr{L}_k$ è il *differenziale forte* di $v \in \mathscr{L}_{k-1}$ se per ogni aperto limitato A tale che $\bar{A} \subset \Omega$, esiste una successione $\{v^s\}$ di $(k-1)$-forme di $C^1_{k-1}(\bar{A})$ tale che

$$\lim_{s\to\infty} \| v^s - v \|_A = 0 \quad , \quad \lim_{s\to\infty} \| dv^s - u \|_A = 0 . \tag{1.7}$$

IX. *Condizione necessaria e sufficiente perchè $u \in \mathscr{L}_k$ sia il differenziale debole di $v \in \mathscr{L}_{k-1}$ è che u sia il differenziale forte di v.*

Questo teorema, di cui daremo una semplice dimostrazione, è caso particolare di un teorema assai più generale dovuto a Friedrichs [13].

La condizione è sufficiente. Sia $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{m-k}(A)$. Sia $\{v^s\}$ una successione per la quale si verificano le (1.7). Si ha:

$$\int_\Omega v^s \wedge d\varphi = (-1)^k \int_\Omega dv^s \wedge \varphi .$$

Passando al limite per $s \to \infty$, si trae la (1.6).

Si noti che, dall'essere il differenziale forte u di v anche il differenziale debole di v, segue l'indipendenza di u dalle particolari successioni per le quali sussistono le (1.7).

La condizione è necessaria. Sia A tale che $\operatorname{supp} \varphi \subset A$. Si ha, per i Lemmi VI e VII e per la (1.6),

$$\int_\Omega M_\varepsilon v \wedge d\varphi = \int_\Omega v \wedge M_\varepsilon d\varphi = \int_\Omega v \wedge dM_\varepsilon \varphi =$$

$$(-1)^k \int_\Omega u \wedge M_\varepsilon \varphi = (-1)^k \int_\Omega M_\varepsilon u \wedge \varphi .$$

Si ha d'altra parte

$$\int_\Omega M_\varepsilon v \wedge d\varphi = (-1)^k \int_\Omega dM_\varepsilon v \wedge \varphi .$$

Quindi

$$\int_{\Omega} (M_\varepsilon u - dM_\varepsilon v) \wedge \varphi = 0 ,$$

che, per l'arbitrarietà di φ, implica in A: $M_\varepsilon u = dM_\varepsilon v$. Poichè:

$$(1.8) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \| M_\varepsilon v - v \|_A = 0 \quad , \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \| dM_\varepsilon v - u \|_A = \lim_{\varepsilon \to 0} \| M_\varepsilon u - u \|_A = 0,$$

ne segue che u è il differenziale forte di v in Ω.

2. Un k–simplesso regolare σ^k di $\mathbf{R}^m$ $(1 \leq k \leq m)$ è individuato da una sua rappresentazione parametrica: $x = f(t)$, essendo $x = (x_1, \cdots, x_m)$ il punto di $\mathbf{R}^m$, $t = (t_1, \cdots, t_k)$ un punto di $\mathbf{R}^k$ e $f(t)$ una funzione m–vettoriale, la quale gode delle seguenti proprietà: a) $f(t)$ è di classe C^1 nel $(k+1)$–edro fondamentale $T^k : t_1 \geq 0, \cdots, t_k \geq 0, t_1 + \cdots + t_k \leq 1$; b) la matrice jacobiana $m \times k : \partial f / \partial t$ ha rango massimo (cioè k) in ogni punto di T^k; c) la corrispondenza posta da $f(t)$ fra T^k e $f(T^k)$ è biunivoca.

Considereremo sempre σ^k come un k–simplesso orientato, l'orientamento essendo quello introdotto dalla rappresentazione parametrica $x = f(t)$. Lo stesso orientamento è introdotto da ogni altra rappresentazione parametrica $x = \varphi(\tau)$ $(\tau \in T^k)$ tale che l'omeomorfismo di passaggio da questa a quella prima considerata, cioè l'omeomorfismo $t = \psi(\tau)$ di classe C^1 di T^k in sé, per il quale $f[\psi(\tau)] = \varphi(\tau)$, sia tale che det $\partial\psi / \partial\tau > 0$. D'ora in avanti, quindi, scrivendo: *k–simplesso*, intenderemo sempre: *k–simplesso regolare orientato.* Il codominio $f(T^k)$ della $f(t)$ dicesi *immagine* del k–simplesso σ^k e sarà indicata con $|\sigma^k|$. Il *bordo* $\partial\sigma^k$ di σ^k è costituito da $k+1$ $(k-1)$–simplessi, determinati dalla restrizione di $f(t)$ alla frontiera di T^k. L'orientamento di σ^k subordina un orientamento su ciascuno di tali $(k-1)$–simplessi, e, quindi, su $\partial\sigma^k$, in modo tale che, se è $\sigma^k \subset \Omega$ e $v \in C^1_{k-1}(\Omega)$, sussiste la formula di Green–Stokes

$$(2.1) \qquad \int_{\partial\sigma^k} v = \int_{\sigma^k} dv .$$

Ricordiamo che nel caso $k = 1$ il primo membro della (2.1) è da intendersi al modo seguente:

$$\int_{\partial\sigma^1} v = v(x^2) - v(x^1) ,$$

essendo x^1 e x^2 il punto iniziale e quello terminale dell'arco orientato σ^1. La k–forma u data da (1.3), definita nell'aperto Ω di $\mathbf{R}^m$, dicesi *sommabile su* σ^k $(\sigma^k \subset \Omega)$ se tutti i suoi coefficienti $u_{i_1 \cdots i_k}(x)$ sono sommabili su σ^k, se, cioè, ciascuna delle funzioni $u_{i_1 \cdots i_k}[f(t)]$ è sommabile (secondo Lebesgue) su T^k. In questo caso esiste l'integrale (di Lebesgue) di u esteso a σ^k ed è dato da

$$\int_{\sigma^k} u = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \int_{T^k} u_{i_1\cdots i_k}[f(t)] \left[\det \frac{\partial(f_{i_1}\cdots f_{i_k})}{\partial(t_1\cdots t_k)}\right] dt_1 \cdots dt_k \text{ (3)}.$$

Poniamo

$$U(x) = \left(\sum_{i_1<\cdots<i_k} |u_{i_1\cdots i_k}(x)|^2\right)^{1/2}.$$

Detta $d\sigma$ la misura dell'elemento k-dimensionale su $|\sigma^k|$, si ha

$$\left|\int_{\sigma^k} u\right| \leq \int_{|\sigma^k|} U \, d\sigma .$$

Se σ^k ha la rappresentazione parametrica: $x = f(t)$, con $\sigma^k(y)$ $(y \in \mathbf{R}^m)$ indichiamo il k-simplesso di rappresentazione parametrica: $x = f(t) + y$.

X. *Sia* $\sigma^k \subset A$ *e sia* $u \in L^1_{loc,k}(\Omega)$. *Per quasi tutti gli* y *di* $B_\varepsilon(0)$ *la k-forma* u *è sommabile su* $\sigma^k(y)$ *e la funzione di* y : $\int_{\sigma^k(y)} u$ *è sommabile in* $B_\varepsilon(0)$.

Poniamo:

$$g(x) = \int_{B_\varepsilon(x)} U(y)\, dy = \int_{B_\varepsilon(0)} U(x+y)\, dy .$$

La funzione $g(x)$ è continua in $\bar{A}$. Pertanto esiste l'integrale

$$\int_{|\sigma^k|} g \, d\sigma = \int_{|\sigma^k|} d\sigma_x \int_{B_\varepsilon(x)} U(y)\, dy = \int_{|\sigma^k|} d\sigma_x \int_{B_\varepsilon(0)} U(x+y)\, dy .$$

Ne segue, per il criterio di sommabilità di Tonelli ([15] p. 322) che la funzione $U(x+y)$ è sommabile in $|\sigma^k| \times B_\varepsilon(0)$. Quindi, per il teorema di Fubini ([15] p. 375), per quasi ogni $y \in B_\varepsilon(0)$, la funzione $|U(x+y)|$ è sommabile su $|\sigma^k|$. Esiste pertanto l'integrale $\int_{\sigma^k(y)} u$ per quasi ogni $y \in B_\varepsilon(0)$ ed è funzione di y sommabile in $B_\varepsilon(0)$.

(3) È ovvio constatare che la sommabilità di u su σ^k ed il valore di $\int_{\sigma^k} u$ hanno significato intrinseco, cioè sono indipendenti dal particolare sistema di coordinate impiegato in $\mathbf{R}^m$ e dalla rappresentazione parametrica di σ^k.

XI. *Sia* φ *una funzione di* $\mathring{C}^0[B_\varepsilon(0)]$. *Sia* $\sigma^k \subset A$ *e* $u^s \in \mathscr{L}_k$ $(s = 1, 2, \cdots)$. *Si abbia* $\lim_{s\to\infty} \| u^s \|_{A_{\varepsilon_0}} = 0$. *Riesce allora*

$$\lim_{s\to\infty} \int_{B_\varepsilon(0)} \varphi(y)\, dy \int_{\sigma^k(y)} u^s = 0\,. \tag{2.2}$$

Poniamo

$$\psi^s(x) = \int_{B_\varepsilon(0)} |\varphi(y)|\, U^s(x+y)\, dy = \int_\Omega |\varphi(y-x)|\, U^s(y)\, dy\,.$$

La $\psi^s(x)$ è continua in $\bar{A}$. Detto γ il massimo di $|\varphi|$ in $B_\varepsilon(0)$, si ha:

$$\psi^s(x) \le \gamma \int_{A_{\varepsilon_0}} U^s(y)\, dy \le \begin{cases} \gamma\,(\mathrm{mis}\, A_{\varepsilon_0})^{\frac{p-1}{p}} \, \| u^s \|_{A_{\varepsilon_0}} & , \quad \text{se } \mathscr{L} = L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) \\ \gamma\, \mathrm{mis}\, A_{\varepsilon_0} \, \| u^s \|_{A_{\varepsilon_0}} & , \quad \text{se } \mathscr{L} = C^0(\Omega)\,. \end{cases}$$

Ne segue la uniforme convergenza a zero della successione $\{\psi^s(x)\}$ in $\bar{A}$. Si ha:

$$\left| \int_{B_\varepsilon(0)} \varphi(y)\, dy \int_{\sigma^k(y)} u^s \right| \le \int_{B_\varepsilon(0)} |\varphi(y)|\, dy \int_{|\sigma^k|} U^s(x+y)\, d\sigma_x = \int_{|\sigma^k|} \psi^s\, d\sigma\,.$$

Da ciò la (2.2).

Diremo che $u \in \mathscr{L}_k$ è il *differenziale esteso* di $v \in \mathscr{L}_{k-1}$ se, per ogni k-simplesso σ^k contenuto in A, si ha per quasi tutti gli y di $B_\varepsilon(0)$:

$$\int_{\partial\sigma^k(y)} v = \int_{\sigma^k(y)} u\,. \text{ (4)} \tag{2.3}$$

Da (2.3) si trae (cfr. lemma X):

$$\int_{B_\varepsilon(0)} \mu_\varepsilon(y)\, dy \int_{\partial\sigma^k(y)} v = \int_{B_\varepsilon(0)} \mu_\varepsilon(y)\, dy \int_{\sigma^k(y)} u$$

e quindi

$$\int_{\partial\sigma^k} M_\varepsilon\, v = \int_{\sigma^k} M_\varepsilon\, u\,.$$

(4) Si noti che, se si considera il caso particolare: $\mathscr{L} = C^0(\Omega)$ e se v ed u soddisfano la condizione (2.3), allora la (2.3) è soddisfatta per tutti i k-simplessi contenuti in Ω. Si riottiene allora la definizione di differenziale generalizzato considerata da diversi Autori ([16], [17], [18], [19]). Nel caso in cui sia $k = 1$, $\mathscr{L} = L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, la classe delle funzioni (0–forme) v dotate di differenziale esteso coincide con quella delle funzioni assolutamente continue secondo Cesari [20] e se, lasciando $\mathscr{L}_1 = L^1_{\mathrm{loc},1}(\Omega)$, si fa l'ulteriore ipotesi: $v \in C^0_0(\Omega)$, si ottengono le funzioni assolutamente continue secondo Tonelli ([21]). Tali classi di funzioni vengono dalla (2.3), considerata per $k = 1$, definite intrinsecamente.

Poichè $M_\varepsilon v \in C_k^\infty(A)$, si ha per ogni $\sigma^k \in A$:

$$\int_{\partial\sigma^k} M_\varepsilon v = \int_{\sigma^k} dM_\varepsilon v$$

e quindi in A

$$dM_\varepsilon v = M_\varepsilon u \,. \tag{2.4}$$

Ne segue, se $v = 0$, per la (1.5), $u = 0$. Quindi il differenziale esteso di v, se esiste, è unico.

XII. *Condizione necessaria e sufficiente perchè $u \in \mathscr{L}_k$ sia il differenziale esteso di $v \in \mathscr{L}_{k-1}$ è che u sia il differenziale forte di v.*

La condizione è necessaria. Abbiamo visto che dalla (2.3) segue la (2.4). Dalle (1.8) segue allora che u è il differenziale forte di v. La condizione è sufficiente. Sia $\{v^s\}$ $[v^s \in C_{k-1}^1(\bar{A}_{\varepsilon_0})]$ tale che

$$\lim_{s\to 0} \| v^s - v \|_{A_{\varepsilon_0}} = 0 \quad , \quad \lim_{s\to 0} \| dv^s - u \|_{A_{\varepsilon_0}} = 0 \,.$$

Avremo, per il lemma XI, detta φ un'arbitraria funzione di $\mathring{C}^0[B_\varepsilon(0)]$,

$$\lim_{s\to\infty} \int_{B_\varepsilon(0)} \varphi(y)\, dy \int_{\partial\sigma^k(y)} v^s = \int_{B_\varepsilon(0)} \varphi(y)\, dy \int_{\partial\sigma^k(y)} v \,,$$

$$\lim_{s\to\infty} \int_{B_\varepsilon(0)} \varphi(y)\, dy \int_{\sigma^k(y)} dv^s = \int_{B_\varepsilon(0)} \varphi(y)\, dy \int_{\sigma^k(y)} u \,.$$

Si ha d'altra parte, tenendo presente la (2.1),

$$\int_{B_\varepsilon(0)} \varphi(y)\, dy \int_{\partial\sigma^k(y)} v^s = \int_{B_\varepsilon(0)} \varphi(y)\, dy \int_{\sigma^k(y)} dv^s \,.$$

Ne segue

$$\int_{B_\varepsilon(0)} \varphi(y) \left[\int_{\partial\sigma^k(y)} v - \int_{\sigma^k(y)} u \right] dy = 0$$

e, quindi, per l'arbitrarietà di φ, la (2.3) per quasi ogni $y \in B_\varepsilon(0)$ (5).

Abbiamo, come conclusione dei teoremi IX e XII,

(5) Questo teorema, nel caso particolare $\mathscr{L} = C^0(\Omega)$, trovasi, già dimostrato, con assai differente procedimento, in [18].

XIII. *I tre prolungamenti dell'operatore d: debole, forte ed esteso, coincidono.*

OSSERVAZIONE: Riguardando la dimostrazione del teor. XII, si riconosce che, per dimostrare che u è il differenziale forte di v, non è necessario supporre che la (2.3) sussista in corrispondenza ad ogni $\sigma^k \subset \Omega$. Basta che la (2.3) sia soddisfatta considerando, soltanto, i σ^k appartenenti ad una famiglia $\mathcal{F}^k$ di k-simplessi, la quale goda di questa proprietà: *se* $u \in \overset{0}{C}_k(\Omega)$ *e se per ogni* $\sigma^k \in \mathcal{F}^k$ *si ha* $\int_{\sigma^k} u = 0$, *riesce allora* $u = 0$ *in* Ω. È assai facile dare quanti si vogliono esempi di famiglie quali la $\mathcal{F}^k$, specie se si concede ai k-simplessi che la compongono di avere come *dominio base* in $\mathbf{R}^k$ un dominio diverso dal $(k+1)$-edro fondamentale T^k (ad esempio: l'intervallo quadrato: $|t_h| \leq 1$, $h = 1, \cdots, k$, il dominio sferico: $|t| \leq 1$, etc.)[6]. Su ciò non è il caso di insistere. Vogliamo solo notare che se la (2.3) è soddisfatta per i σ^k di una particolare $\mathcal{F}^k$, essa, per il teor. XII, è soddisfatta per ogni $\sigma^k \subset \Omega$.

3. Se con σ^k si indica il generico k-simplesso contenuto nell'aperto Ω di $\mathbf{R}^{2n}$, con $\varepsilon = \varepsilon(\sigma^k)$ indicheremo la distanza di $|\sigma^k|$ da $\partial\Omega$. Poichè, senza ledere la generalità, potremo sempre supporre $\Omega \neq \mathbf{R}^{2n}$, ε sarà un numero reale positivo. Sussiste la seguente estensione del teor. di Cauchy-Morera per le funzioni di $L^1_{loc}(\Omega)$.

XIV. *Sia la funzione a valori complessi* $w(z_1, \cdots, z_n) \equiv w(x_1, y_1, \cdots \cdots, x_n, y_n)$ *appartenente a* $L^1_{loc}(\Omega)$. *Condizione necessaria e sufficiente perchè* w *sia funzione olomorfa in* Ω *di* $z_1, \cdots, z_n$ *è che, per ogni* $\sigma^{n+1} \subset \Omega$, *si abbia*

$$\int_{\partial\sigma^{n+1}(\zeta)} w \, dz_1 \cdots dz_n = 0 \tag{3.1}$$

per quasi tutti gli ζ *contenuti nel campo sferico* $B_\varepsilon(0)$ *di* $\mathbf{R}^{2n}$ [7].

La necessità della condizione non esprime niente di nuovo rispetto a quanto già noto (cfr. ad es. [6]), dato che, posto $W = w \, dz_1 \cdots dz_n$ la olomorfia di w implica $dW = 0$ e quindi, per la (2.1), il sussistere della (3.1) per ogni $\zeta \in B_\varepsilon(0)$.

(6) Una famiglia $\mathcal{F}^k$ è quella costituita dai k-simplessi le cui immagini sono intervalli quadrati k-dimensionali, contenuti nell'intersezione (supposta non vuota) di ogni S^k di equazioni: $x_{s_1} = c_1, \cdots, x_{s_{m-k}} = c_{m-k}$ $(s_1 < \cdots < s_{m-k})$ con Ω ($c_1, \cdots, c_{m-k}$ costanti razionali arbitrarie). E questa stessa famiglia potrebbe, ulteriormente, ridursi.

(7) Dicendo che una w, appartenente a $L^1_{loc}(\Omega)$, è olomorfa in Ω, s'intende che essa coincide quasi ovunque in Ω con una funzione ivi olomorfa.

Per provare la sufficienza, si osservi che la (3.1), per il teor. XIII, implica

$$\int_\Omega W \wedge d\varphi = 0 \qquad (\forall \varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{n-1}(\Omega)). \tag{3.2}$$

Sia $\varphi = \psi_h \, d\bar z_1 \cdots (h) \cdots d\bar z_n$ $[\psi_h \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}_0(\Omega)]$. La (3.2) fornisce:

$$\int_\Omega w \frac{\partial \psi_h}{\partial \bar z_h} d\Omega = 0 \qquad (h = 1, \cdots, n \, ; \; d\Omega = dx_1 \, dy_1 \cdots dx_n \, dy_n). \tag{3.3}$$

Da ciò l'olomorfia di w in Ω (8).

Il teor. XIV rientra nel seguente, più generale, teorema, che estende allo spazio $\mathscr{L}$ un teorema ottenuto da Bochner [11] nel caso particolare $\mathscr{L} = C^0(\Omega)$.

XV. *Sia* $w \in \mathscr{L}$. *Siano* $s_1, \cdots, s_n$; $j_1, \cdots, j_n$ *due fissate permutazioni degli indici* $1, \cdots, n$. *Siano* α *e* β *due interi tali che* $0 \leq \alpha \leq n$, $0 \leq \beta \leq n$, $0 < \alpha + \beta < 2n$. *Si considerino le seguenti condizioni*: 1) *la funzione* w *ammette come derivate deboli appartenenti ad* $\mathscr{L}$ *le seguenti derivate parziali*:

$$\frac{\partial w}{\partial x_{s_{\alpha+h}}}, \; \frac{\partial w}{\partial y_{s_{\alpha+h}}} \qquad (h = 1, \cdots, n - \alpha); \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_{j_{\beta+k}}}, \; \frac{\partial w}{\partial y_{j_{\beta+k}}} \qquad (k = 1, \cdots, n - \beta); \tag{3.5}$$

2) *si ha* (*quasi ovunque in* Ω):

$$\frac{\partial w}{\partial z_{s_{\alpha+h}}} = 0 \qquad (h = 1, \cdots, n - \alpha); \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \bar z_{j_{\beta+k}}} = 0 \qquad (k = 1, \cdots, n - \beta). \tag{3.7}$$

É necessario e sufficiente, perchè w *soddisfi entrambe le condizioni* 1) *e* 2), *che per ogni* $\sigma^{\alpha+\beta+1} \subset \Omega$ *si abbia*:

$$\int_{\partial\sigma^{\alpha+\beta+1}(\zeta)} w(z) \, dz_{s_1} \cdots dz_{s_\alpha} \, d\bar z_{j_1} \cdots d\bar z_{j_\beta} = 0 \tag{3.8}$$

per quasi tutti gli $\zeta \in B_\varepsilon(0)$.

(8) Le (3.3) esprimono il fatto che w è una *soluzione debole* del sistema di Cauchy–Riemann. È allora ben noto, dalla teoria dei sistemi alle derivate parziali lineari di tipo ellittico, che w è olomorfa in Ω. Questo risultato è immediatamente deducibile dal prototipo dei *teoremi di regolarizzazione* per le equazioni ellittiche: il lemma di Caccioppoli–Weyl. Infatti, assumendo $\psi_h = \frac{\partial \psi}{\partial z_h}$ $(\psi \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega))$, le (3.3) implicano: $\int_\Omega w \, \Delta_2 \psi \, d\Omega = 0$ e quindi (cfr. ad es. [22] p. 42) l'armonicità di w in Ω. Dalle (3.3), con integrazione per parti, si trae che w è soluzione in senso ordinario del sistema di Cauchy–Riemann e quindi olomorfa in Ω.

Si ponga: $W = w \, dz_{s_1} \cdots dz_{s_\alpha} d\bar{z}_{j_1} \cdots d\bar{z}_{j_\beta}$. Sia $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{2n-\alpha-\beta-1}(\Omega)$. Si consideri l'equazione (3.2) con il significato ora attribuito a W ed a φ. Data la particolare struttura della forma W, possiamo limitarci a considerare solo forme φ del tipo

$$\varphi = \sum_{h=1}^{n-\alpha} \varphi_h \, dz_{s_{\alpha+1}} \cdots (s_{\alpha+h}) \cdots dz_{s_n} d\bar{z}_{j_{\beta+1}} \cdots d\bar{z}_{j_n} +$$

$$\sum_{k=1}^{n-\beta} \psi_k \, dz_{s_{\alpha+1}} \cdots dz_{s_n} d\bar{z}_{j_{\beta+1}} \cdots (j_{\beta+k}) \cdots d\bar{z}_{j_n} ,$$

con φ_h, ψ_k funzioni di $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega)$. La (3.2) è soddisfatta se e solo se

$$(3.9) \qquad \begin{aligned} &\int_\Omega w \frac{\partial \varphi_h}{\partial z_{s_{\alpha+h}}} \, d\Omega = 0 \qquad (h = 1, \cdots, n-\alpha), \\ &\int_\Omega w \frac{\partial \psi_k}{\partial \bar{z}_{j_{\beta+k}}} \, d\Omega = 0 \qquad (k = 1, \cdots, n-\beta). \end{aligned}$$

Se sono soddisfatte le condizioni 1), 2) dell'enunciato, sono allora soddisfatte le (3.9) e quindi la (3.2) che, teor. XIII, è equivalente alla (3.8). Per dimostrare la sufficienza della (3.8) supporremo $\mathscr{L} = L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ $(1 \le p < \infty)$. Le cose che diremo si modificano, in modo ovvio, nel caso più semplice $\mathscr{L} = C^0(\Omega)$. È opportuno porre $z_{s_{\alpha+h}} = \lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ (λ_1, λ_2 reali); $(z_1, \cdots (s_{\alpha+h}) \cdots, z_n) = \gamma$; $w(z_1, \cdots, z_n) = w(\gamma, \lambda)$. Sia $z^0 = (\gamma^0, \lambda^0) \in \Omega$. Sia D_r il disco di $\mathbf{C}^1 : |\lambda - \lambda^0| < r$ e B_r il campo sferico di $\mathbf{C}^{n-1} : |\gamma - \gamma^0| < r$. Il numero positivo r sia tale che $B_r \times D_r \subset \Omega$. Sia $\{a^s(\lambda)\}$ una successione di funzioni di $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(D_r)$ completa con la metrica di $C^1(\overline{D}_r)$ nella varietà $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(D_r)$ di $C^1(\overline{D}_r)$. Sia $b(\gamma)$ un'arbitraria funzione di $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(B_r)$. La (3.8) implica la (3.2) e questa le (3.9). Sarà allora (detta $d\omega$ la misura dell'elemento $(2n-2)$-dimensionale in $\mathbf{R}^{2n-2}$)

$$\int_{B_r} b \, d\omega \int_{D_r} w(\gamma, \lambda) \frac{\partial a^s}{\partial \lambda} \, d\lambda_1 \, d\lambda_2 = 0 .$$

Esiste allora un insieme N^s di misura nulla in B_r, tale che per ogni $\gamma \in B_r - N^s$ si ha:

$$\int_{D_r} w(\gamma, \lambda) \frac{\partial a_s}{\partial \lambda} \, d\lambda_1 \, d\lambda_2 = 0 .$$

Sia $N = \bigcup_{s=1}^{\infty} N^s$. Per $\gamma \in B_r - N$ si ha

$$\int_{D_r} w(\gamma, \lambda) \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \, d\lambda_1 \, d\lambda_2 = 0 ,$$

per ogni $\psi \in \overset{\circ}{C}{}_0^\infty(D_r)$. Ne segue che, per $\gamma \in B_r - N$, la $w(\gamma, \lambda)$ è funzione antiolomorfa di λ in D_r. Siano r_0 e r_1 tali che $0 < r_0 < r_1 < r$. Possiamo, per il teorema di Fubini sugli integrali multipli, scegliere quasi ovunque ρ in (r_1, r) in modo tale che la funzione $|w(\gamma, \lambda)|^p$ sia sommabile in $B_r \times \partial D_\rho$. Si ha, per $\gamma \in B_r - N$, $\lambda \in D_\rho$,

$$w_{\lambda_1}(\gamma, \lambda) = i w_{\lambda_2}(\gamma, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\partial D_\rho} \frac{w(\gamma, \lambda')}{(\bar{\lambda}' - \bar{\lambda})^2} d\bar{\lambda}' .$$

Quindi, per $\gamma \in B_{r_0} - N$, $\lambda \in D_{r_0}$,

$$|w_{\lambda_1}(\gamma, \lambda)|^p = |w_{\lambda_2}(\gamma, \lambda)|^p \le \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|w(\gamma, \rho e^{i\theta})|}{(\rho - r_0)^2} \rho \, d\theta\right)^p \le$$

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\rho^{p-1}}{(\rho - r_0)^{2p}} \int_0^{2\pi} |w(\gamma, \rho e^{i\theta})|^p \rho \, d\theta .$$

Segue da ciò, per i teoremi di Fubini e di Tonelli sugli integrali multipli, la sommabilità di $|w_{\lambda_1}|^p$, $|w_{\lambda_2}|^p$ in $B_{r_0} \times D_{r_0}$. Si ha poi, per ogni $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}_0^\infty(B_{r_0} \times D_{r_0})$,

$$\int_{B_{r_0} \times D_{r_0}} w_{\lambda_1} \varphi \, d\Omega = \int_{B_{r_0}} d\omega \int_{D_{r_0}} w_{\lambda_1} \varphi \, d\lambda_1 \, d\lambda_2 = -\int_{B_{r_0}} d\omega \int_{D_{r_0}} w \varphi_{\lambda_1} d\lambda_1 \, d\lambda_2 = -\int_{B_{r_0} \times D_{r_0}} w \varphi_{\lambda_1} d\Omega .$$

Pertanto w_{λ_1} è la derivata debole di w rispetto a λ_1. Similmente si ragiona per w_{λ_2}. La già constatata antiolomorfia di w rispetto a λ implica $w_\lambda = 0$. Sono state così dimostrate 1) e 2) per quanto attiene alle derivate (3.4) ed alle equazioni (3.6). In modo perfettamente analogo si ragiona per provare quanto concerne (3.5) e (3.7).

OSSERVAZIONE. – In conformità a quanto si osservò alla fine del § 2, le (3.1) e (3.8) seguitano ad essere condizioni sufficienti anche se soddisfatte, soltanto, relativamente a simplessi di famiglie $\mathcal{F}^{n+1}$ e $\mathcal{F}^{\alpha+\beta+1}$, rispettivamente.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. POINCARÉ (1887) – *Sur les résidus des intégrales doubles*, « Acta Mathem. », *9*, 321–380.

[2] F. VOLTERRA (1888) – *Sopra una estensione della teoria di Riemann sulle funzioni di variabili complesse*, « Rend. R. Acc. Lincei », IV, *4*, 196–202.

[3] E. PICARD (1893) – *Traité d'Analyse*, tome II, Gauthier-Villars, Paris.

[4] P. NALLI e G. ANDREOLI (1927) – *La formola di Green nel campo complesso e l'estensione del teorema di Cauchy alle funzioni di due variabili complesse*, « Rend. R. Acc. Lincei », VI, *6*, 92–96.

[5] P. NALLI e G. ANDREOLI (1928) – *Sull'area di una superficie, sugli integrali multipli di Stieltjes e sugli integrali doppi delle funzioni di due variabili complesse*, « Rend. Circ. Mat. Palermo », LII, 30–43.

[6] W. WIRTINGER (1937) – *Ein Integralsatz über analytische Gebilde in Gebiete von mehren complexen Veränderlichen*, « Monatsch. f. Math. u. Phys. », *45*, 418–431.

[7] E. PASCAL (1917) – *Il teorema di Cauchy-Morera esteso agli integrali doppi delle funzioni di variabili complesse*, « Rend. R. Acc. Sci. Napoli », *23*, 73–78.

[8] F. SEVERI (1931) – *Sur une proprieté fondamentale des fonctions analytiques de plusieurs variables*, « C.R. Acad. d. Sciences », *192*, 596–599.

[9] E. MARTINELLI (1938) – *Alcuni teoremi integrali per le funzioni analitiche di più variabili complesse*, « Mem. R. Acc. Italia », IX, 269–283.

[10] V. S. VLADIMIROV (1966) – *Methods of the Theory of Functions of many Complex Variables*, The M.I.T. Press, Cambridge, Mass.

[11] S. BOCHNER (1953) – *The theorem of Morera in several variables*, « Ann. di Matem. pura e appl. », IV, *34*, 27–39.

[12] G. ARUFFO (1953) – *Forme differenziali di classe* 0 *e funzioni di più variabili complesse*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », VIII, *14*, 381–385.

[13] K. O. FRIEDRICHS (1944) – *The identity of weak and strong extensions of differential operators*, « Trans. Amer. Math. Soc. », *55*, 132–151.

[14] G. FICHERA (1958) – *Premesse ad una teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali*, Corsi I.N.d.A.M. Ed. Veschi, Roma.

[15] G. FICHERA (1953) – *Lezioni sulle trasformazioni lineari*, « Ist. Matem. Univ. Trieste », Ed. Veschi, Roma.

[16] E. CARTAN (1945) – *Leçons sur les invariants integraux*, Hermann, Paris.

[17] P. GILLIS (1943) – *Sur quelques théoremes de la théorie des formes differentielles alternées*, « Bull. Ac. R. Belgique », 175–186.

[18] B. SEGRE (1955) – *Sul differenziale delle forme esterne di classe* 0, « Sem. Matem. Univ. Messina », *1*, 1–9.

[19] G. ARUFFO (1952–1953) – *Sul differenziale generalizzato delle forme differenziali esterne*, Note I e II, « Rend. Acc. Naz. Lincei, VIII », *13*, 367–372 e *14*, 13–18.

[20] L. CESARI (1936) – *Sulle funzioni a variazione limitata*, « Ann. R. Scuola Norm. Sup. Pisa », II, *25*, 299–313.

[21] L. TONELLI (1928–29) – *Sulle funzioni di due variabili assolutamente continue*, « Mem. R. Acc. Sci. Ist. Bologna », VIII, *6*, 81–88.

[22] C. B. MORREY Jr. (1966) – *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*, Die Grundlagen d. math. Wissensch. in Einzeldarst. Bd. 130, Springer, Berlin–Heidelberg–New York.