Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Roberto Peirone

Γ-limiti e minimi di Pareto

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **74** (1983), n.6, p. 322–330.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1983_8_74_6_322_0>

Analisi matematica. — *Γ–limiti e minimi di Pareto.* Nota di ROBERTO PEIRONE, presentata (*) dal Corrisp. E. DE GIORGI.

SUMMARY. — The notion of Γ-limit is extended from the case of functions with values in $\overline{\mathbf{R}}$ to the case of those with values in an arbitrary complete lattice and the problem of convergence of Pareto minima related to a convex cone is considered.

INTRODUZIONE

Negli ultimi anni è stata introdotta una nuova nozione di convergenza per funzioni a valori reali, la Γ–convergenza, che ha già avuto numerose applicazioni in molti campi di ricerca e specialmente nel calcolo delle variazioni, poiché essa si è rivelata particolarmente adatta allo studio della convergenza di minimi e massimi di funzionali (vedi [1], [10], [11], [13]). In questo lavoro, che riprende ed amplia molti risultati contenuti in [15], e che segue l'impostazione di [10], si estende la nozione di Γ–limite dal caso di funzioni a valori in $\overline{\mathbf{R}}$ a quello delle funzioni a valori in un reticolo completo qualunque e si studia il problema della convergenza dei minimi di Pareto relativi ad un cono convesso di $\mathbf{R}^n$.

1. CONVERGENZA IN RETICOLI

Richiamo le definizioni di operatori elementari di tipo G, come esposti in [10].

Indico con Y un reticolo completo (ricordo che un insieme Y con un ordinamento parziale $\leq$ si dice reticolo completo se per ogni sottoinsieme A di Y esistono in Y l'estremo superiore e l'estremo inferiore di A, indicati con $\sup A$ e $\inf A$). Se X è uno spazio topologico e x è un punto di X, indico con $I_X(x)$ la famiglia degli intorni di x in X.

Sia f una funzione a valori nel reticolo completo Y. Si definiscono i seguenti quattro operatori $G(+, X+, Y)$, $G(+, X-, Y)$, $G(-, X+, Y)$,

(*) Nella seduta dell'8 gennaio 1983.

$G(-, X-, Y)$, mediante

$$\begin{cases} \operatorname{dom} G(+, X+, Y)f = \{A \mid A \subseteq X,\ A \cap \operatorname{dom} f \neq \varnothing\} \\ [G(+, X+, Y)f](A) = \sup\limits_{x \in A \cap \operatorname{dom} f} f(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{dom} G(+, X-, Y)f = \operatorname{dom} G(+, X+, Y)f \\ [G(+, X-, Y)f](A) = \inf\limits_{x \in A \cap \operatorname{dom} f} f(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{dom} G(-, X+, Y)f = \{x \in X \mid I_X(x) \subseteq \operatorname{dom} f\} \\ [G(-, X+, Y)f](x) = \inf\limits_{A \in I_X(x)} f(A) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{dom} G(-, X-, Y)f = \operatorname{dom} G(-, X+, Y)f \\ [G(-, X-, Y)f](x) = \sup\limits_{A \in I_X(x)} f(A). \end{cases}$$

Quindi gli operatori $G(+, X\pm, Y)$ trasformano funzioni del punto $x \in X$ in funzioni *dell'insieme* $A \subseteq X$, mentre gli operatori $G(-, X\pm, Y)$ operano in senso contrario.

Passo ora a definire gli operatori parziali per funzioni di più variabili, Se f è una funzione a valori in Y di k argomenti (cioè $\operatorname{dom} f \subseteq D_1 \times \cdots \times D_k$) e g è uno degli operatori definiti in precedenza, si può definire l'operatore parziale g_h $(h = 1, \cdots, k)$ ponendo $(g_h f)(x_1, \cdots, x_{h-1}, \lambda, x_{h+1}, \cdots, x_k) = t$ se, e solo se, $[g(\varphi)](\lambda) = t$, ove $\varphi(\xi) = f(x_1, \cdots, x_{h-1}, \xi, x_{h+1}, \cdots, x_k)$.

Componendo gli operatori di tipo G finora considerati si ottengono gli operatori di tipo Γ. Precisamente:

DEFINIZIONE 1. Se $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ sono simboli scelti tra + e —, si pone

$$\Gamma(X_1 \alpha_1, \cdots, X_k \alpha_k)(Y) = G_k(-, X_k \alpha_k, Y) \cdots$$
$$\cdots G_1(-, X_1 \alpha_1, Y)\, G_1(+, X_1 \alpha_1, Y) \cdots G_k(+, X_k \alpha_k, Y).$$

Per mezzo degli operatori di tipo Γ è ora immediata la definizione degli operatori di tipo K o operatori di Kuratowski generalizzati.

DEFINIZIONE 2. Dati Z spazio topologico e f_i $(i = 1, 2)$ funzioni con $\operatorname{dom} f_i \subseteq X_1 \times \cdots \times X_k$ e $\operatorname{Im} f_i \subseteq P(Z)$, si pone $K(X_1 \alpha_1, \cdots, X_k \alpha_k, Z\beta) f_1 = f_2$ se, e solo se, $[\Gamma(X_1 \alpha_1, \cdots, X_k \alpha_k, Z\beta)(\overline{\mathbf{R}}, \leq)]\, \varphi_1 = \varphi_2$ dove

$$\varphi_i(x_1, \cdots, x_k, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \in f_i(x_1, \cdots, x_k) \\ 0 & \text{se } y \notin f_i(x_1, \cdots, x_k) \end{cases}$$ e $\leq$ è l'ordinamento usuale su $\overline{\mathbf{R}}$.

Data una funzione f a valori in Z indico con $\operatorname{sing} f$ la funzione a valori in $P(Z)$ che ad $x \in \operatorname{dom} f$ associa l'insieme costituito dal solo elemento $f(x)$. Per il confronto fra operatori di tipo Γ e operatori di tipo K è utile tener conto della proposizione seguente.

PROPOSIZIONE 1. *Se il reticolo completo* Y *è totalmente ordinato ed è dotato della topologia che ha per aperti gli insiemi del tipo* $\{x \mid x > a\}$ *con* $a \in Y$, *allora* $\operatorname{dom} \Gamma(X_1 \alpha_1, \cdots, X_k \alpha_k)(Y) f = \operatorname{dom} K(X_1 \alpha_1, \cdots, X_k \alpha_k, Y+)(\operatorname{sing} f)$ e $\Gamma(X_1 \alpha_1, \cdots, X_k \alpha_k)(Y) f = \sup(K(X_1 \alpha_1, \cdots, X_k \alpha_k, Y+)(\operatorname{sing} f))$.

Da questo risultato e dalla definizione 2 segue che, nel caso di reticoli completi totalmente ordinati (tra cui $\overline{\mathbf{R}}$), gli operatori di tipo Γ sono esprimibili mediante operatori di tipo K e quindi molte proprietà degli operatori di tipo Γ si traducono in proprietà degli operatori di tipo K.

Per gli operatori di tipo K e di tipo Γ si possono usare anche altre notazioni. Per esempio si può scrivere

$$K(X_2 \alpha_2, \cdots, X_k \alpha_k, Z\beta) \max_{x_1' \xrightarrow{X_1} x_1} \lim f(x_1', x_2, \cdots, x_k)$$

invece di

$$[K(X_1 +, X_2 \alpha_2, \cdots, X_k \alpha_k, Z\beta) f](x_1, x_2, \cdots, x_k)$$

e

$$K(X_2 \alpha_2, \cdots, X_k \alpha_k, Z\beta) \min_{x_1' \xrightarrow{X_1} x_1} \lim f(x_1', x_2, \cdots, x_k)$$

invece di

$$[K(X_1 -, X_2 \alpha_2, \cdots, X_k \alpha_k, Z\beta) f](x_1, x_2, \cdots, x_k)$$

e se

$$A = K(X_2 \alpha_2, \cdots, X_k \alpha_k, Z\beta) \max_{x_1' \xrightarrow{X_1} x_1} \lim f(x_1', x_2, \cdots, x_k) =$$

$$= K(X_2 \alpha_2, \cdots, X_k \alpha_k, Z\beta) \min_{x_1' \xrightarrow{X_1} x_1} \lim f(x_1', x_2, \cdots, x_k),$$

si porrà

$$A = K(X_2 \alpha_2, \cdots, X_k \alpha_k, Z\beta) \lim_{x_1' \xrightarrow{X_1} x_1} f(x_1', x_2, \cdots, x_k).$$

Il riferimento ad X_1 sarà omesso se chiaro dal contesto [ad esempio se $X_1 = \overline{\mathbf{N}}$ $(= \mathbf{N} \cup \{+\infty\})$ con la topologia usuale].

Se $X_1 = \overline{\mathbf{N}}$ e $\operatorname{dom} f = \mathbf{N}$ si osservino le seguenti interpretazioni:

$$K(Z+) \max_{h \to \infty} \lim A_h = \{z \in Z \mid \forall U \in I_Z(z) \quad U \cap A_h \neq \varnothing \text{ frequentemente}\},$$

$$K(Z+) \min_{h \to \infty} \lim A_h = \{z \in Z \mid \forall U \in I_Z(z) \quad U \cap A_h \neq \varnothing \text{ definitivamente}\}.$$

Per gli operatori di tipo Γ si considererà sempre nel seguito il caso in cui $X_1 = \overline{N}$, $X_2 = X$ e si porrà $f(h, x) = f_h(x)$ (considerando cioè f come una successione di funzioni). Si scriverà in tal caso:

$$\Gamma(X \pm)(Y) \max \lim_{h \to \infty} f_h(x) = [\Gamma(\overline{N} +, X \pm)(Y) f](+\infty, x),$$

$$\Gamma(X \pm)(Y) \min \lim_{h \to \infty} f_h(x) = [\Gamma(\overline{N} -, X \pm)(Y) f](+\infty, x),$$

omettendo il riferimento ad Y nel caso in cui Y sia $\overline{\mathbf{R}}$ con l'ordinamento usuale.

Esplicitamente $\Gamma(X-)(Y) \max \lim_{h \to \infty} f_h(x) = \sup_{U \in I_X(x)} \inf_{k \in N} \sup_{h \geq k} \inf_{z \in U \cap \operatorname{dom} f_h} f_h(z)$ e simili interpretazioni valgono negli altri casi.

Se un punto x di X è tale che $t = \Gamma(X \pm)(Y) \max \lim_{h \to \infty} f_h(x) = \Gamma(X \pm)(Y) \min \lim_{h \to \infty} f_h(x)$, si pone $t = \Gamma(X \pm) \lim_{h \to \infty} f_h(x)$ e si dice che f_h $\Gamma(X \pm)$ converge in x a t.

Nelle definizioni date in questo paragrafo si può anche considerare il caso in cui Y, anziché essere un reticolo completo, è un reticolo condizionatamente completo (ossia ogni sottoinsieme limitato di Y ammette in Y estremo superiore e estremo inferiore), e la funzione è limitata (o la successione di funzioni è equilimitata). Infatti in tali casi le operazioni indicate sono ancora possibili.

2. MINIMI DI PARETO

In questo paragrafo si studiano i minimi di Pareto relativi agli ordinamenti indotti dai coni di $\mathbf{R}^n$.

Comincio col richiamare le prime definizioni.

DEFINIZIONE 3. Un sottoinsieme non vuoto C di $\mathbf{R}^n$ è detto cono (di vertice 0) se $ax \in C$ ogni qualvolta $x \in C$ e a è un numero reale non negativo. Un cono convesso C si dice regolare se $\overline{C} \cap (\overline{-C}) = \{0\}$.

Nel seguito per cono intenderò sempre cono convesso, regolare, a parte interna non vuota. Inoltre considererò sempre coni C che verificano una delle seguenti condizioni:

a) C è chiuso

b) $C \setminus \{0\}$ è aperto.

Nel caso *b*) dirò per brevità che C è aperto.

Si osservi che se C è un cono aperto, allora $\overset{\circ}{\overline{C}} = C \setminus \{0\}$, mentre se C è un cono chiuso, allora $\overline{\overset{\circ}{C}} = C$. Da questo si deduce che esiste una corrispondenza biunivoca tra i coni aperti e i coni chiusi di $\mathbf{R}^n$.

Dato un cono C, posso considerare la relazione $\leq_C$ definita ponendo $a \leq_C b$ se, e solo se, $b - a \in C$. Si vede facilmente che $\leq_C$ è una relazione d'ordine parziale, che si dice associata a C.

DEFINIZIONE 4. Dato un cono C, si dice che G è una famiglia di generatori di C se $G \subseteq C$ e per ogni $x \in C$ esistono $a_i \geq 0$ e $g_i \in G$ $(i = 1, \cdots, m)$ tali che $x = \sum_{i=1}^{m} a_i g_i$.

Da [4] XV § 2 segue facilmente la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 2. *Per un cono* C *di* $\mathbf{R}^n$ *sono equivalenti le seguenti condizioni.*

a) Esiste una famiglia di generatori di C composta da n elementi linearmente indipendenti.

b) $\mathbf{R}^n$ è un reticolo con la relazione d'ordine parziale $\leq_C$.

c) $\mathbf{R}^n$ è un reticolo condizionatamente completo con la relazione d'ordine parziale $\leq_C$.

Se tali condizioni sono soddisfatte C è necessariamente chiuso.

DEFINIZIONE 5. Dati un sottoinsieme A di $\mathbf{R}^n$ e un cono C di $\mathbf{R}^n$ si pone:

a) $\mathrm{MINOR}_C\, A = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \forall y \in A \;\; y \not<_C x\}$

b) $\mathrm{MIN}_C\, A = A \cap \mathrm{MINOR}_C\, A$

c) $\mathrm{INF}_C\, A = \bar{A} \cap \mathrm{MINOR}_C\, A$.

Se $x \in A$ e per ogni $y \in A$ $x \leq_C y$ (cioè se x è il minimo di A rispetto a $\leq_C$) si scrive $x = \min_C A$.

Nelle precedenti definizioni si può omettere il riferimento al cono C quando non vi sia possibilità di equivoco.

Osservazione 1:

a) $x = \min_C A \Rightarrow \{x\} = \mathrm{MIN}_C\, A$

b) $\mathrm{MINOR}_C\, A = \bigcap_{y \in A} [y + [\mathbf{R}^n \setminus (C \setminus \{0\})]]$.

c) Fissato A, MINOR_C, MIN_C e INF_C sono funzioni decrescenti di C.

d) Se C è aperto $\mathrm{MINOR}_C\, A$ è chiuso.

e) In generale $\mathrm{INF}_C\, A \supseteq \mathrm{MIN}_C\, \bar{A}$. Se C è aperto $\mathrm{INF}_C\, A = \mathrm{MIN}_C\, \bar{A}$.

Gli elementi di $\mathrm{MIN}_C\, A$ sono detti i *minimi di Pareto di A.*

3. CONVERGENZA DI MINIMI DI PARETO

Ricordo che se (X, d) è uno spazio metrico compatto e Φ^* è la famiglia dei chiusi non vuoti di X, si può porre su Φ^* una distanza H, detta di Hausdorff, così definita: $H(F_1, F_2) = \sup_{x \in F_1} d(x, F_2) + \sup_{x \in F_2} d(x, F_1)$. La convergenza in H equivale alla K–convergenza nel senso che, se A è un sottoinsieme chiuso di X e (A_h) è una successione di chiusi di X, $A = K(X+)\lim_{h\to\infty} A_h$ se, e solo se, $H(A_h, A) \underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Nel seguito T indicherà un compatto di $\mathbf{R}^n$.

Il primo risultato sui rapporti tra K–limiti e minimi di Pareto è il seguente:

TEOREMA 1. *Sia* (E_h) *una successione di sottoinsiemi di* T *e sia* $E = K(T+)\lim_{h\to\infty} E_h$.

Allora:

$$K(T+)\max\lim_{h\to\infty} \mathrm{INF}_C\, E_h \subseteq \mathrm{MIN}_C\, E \quad \text{se C è un cono aperto,}$$

$$K(T+)\min\lim_{h\to\infty} \mathrm{INF}_C\, E_h \supseteq \mathrm{MIN}_C\, E \quad \text{se C è un cono chiuso.}$$

Restringendosi a considerare insiemi chiusi, il risultato precedente può essere precisato meglio dal seguente teorema:

TEOREMA 2. *Sia* E *chiuso in* T, *e sia* H *la metrica di Hausdorff di* T. *Allora, se* C *è un cono aperto, valgono le seguenti uguaglianze*:

$$\mathrm{MIN}_C\, E = K(T+)\max\lim_{F \xrightarrow{H} E} \mathrm{MIN}_C\, F = K(T+)\max\lim_{F \xrightarrow{H} E} \mathrm{MIN}_{\bar{C}}\, F\,,$$

$$\overline{\mathrm{MIN}_{\bar{C}}\, E} = K(T+)\min\lim_{F \xrightarrow{H} E} \mathrm{MIN}_C\, F = K(T+)\min\lim_{F \xrightarrow{H} E} \mathrm{MIN}_{\bar{C}}\, F\,.$$

Considero ora una semiretta r di $\mathbf{R}^n$ uscente dall'origine e pongo $C_\rho = \{x \in \mathbf{R}^n$ tale che l'angolo formato da $[0, x]$ e r è minore di $\rho\}$. Fisso ρ_0 e ρ_1 con $0 < \rho_0 < \rho_1 < \pi/2$. Si verifica facilmente che se $\rho_0 \leq \rho \leq \rho_1$ C_ρ è un cono.

Vale il seguente teorema:

TEOREMA 3. *Sia* (E_h) *una successione di chiusi di* T *e sia* $E_\infty = K(T+)\lim_{h\to\infty} E_h$.

Allora, posto $\delta_h(x) = \sup\{\rho \mid \rho_0 \leq \rho \leq \rho_1$ e $x \in \mathrm{MIN}_{C_\rho} E_h\}$ ($\delta_h(x) = \rho_0$ se $x \notin \mathrm{MIN}_{C_{\rho_0}} E_h$) $\forall h \in \overline{\mathbf{N}}$, si ha: $\delta_\infty(x) = \Gamma(T+)\lim_{h\to\infty} \delta_h(x)$.

Tratto adesso il caso di successioni di funzioni a valori in P (T).

LEMMA 1. *Sia* X *uno spazio topologico compatto e sia* (f_h) *una successione di funzioni da* X *in* P(T). *Allora* $\bigcup_{x\in X} [K(X+, T+) \max \lim_{h\to\infty} f_h(x)] = K(T+) \max \lim_{h\to\infty} \left[\bigcup_{x\in X} f_h(x)\right]$.

COROLLARIO 1. *Sia* X *uno spazio topologico compatto e sia* (f_h) *una successione di funzioni da* X *in* P(T). *Allora, se* $f(x) = K(X+, T+) \lim_{h\to\infty} f_h(x) \; \forall x \in X$, *posto* $E_h = \mathrm{INF}_C\left(\bigcup_{x\in X} f_h(x)\right)$ ed $E = \mathrm{MIN}_C\left(\bigcup_{x\in X} f(x)\right)$, *si ha*:

$$K(T+) \max \lim_{h\to\infty} E_h \subseteq E \qquad \text{se C è aperto},$$

$$K(T+) \min \lim_{h\to\infty} E_h \supseteq E \qquad \text{se C è chiuso.}$$

PROPOSIZIONE 3. *Sia* X *uno spazio topologico arbitrario, sia* (f_h) *una successione di funzioni da* X *in* P(T), *e sia inoltre* f *una funzione da* X *in* P(T) *tale che* $f(x) = K(X+, T+) \lim_{h\to\infty} f_h(x) \; \forall x \in X$. *Sia* C *un cono aperto. Se* x_h *è una successione di punti di* X *convergente ad* $\bar{x}$ *e* t_h *è una successione di punti di* T *convergente a* t, *tale che per ogni* h $t_h \in f_h(x_h) \cap \mathrm{MIN}_C\left(\bigcup_{x\in X} f_h(x)\right)$, *allora* $t \in f(\bar{x}) \cap \mathrm{MIN}_C\left(\bigcup_{x\in X} f(x)\right)$.

Considero ora, sempre per funzioni a valori in P(T), una diversa nozione di convergenza.

DEFINIZIONE 6. Sia (f_h) una successione di funzioni dallo spazio topologico X in P(T), e sia x un punto di X. Scriverò $t = m(X, C) \lim_{h\to\infty} f_h(x)$ se $t \in K(X+, T+) \min \lim_{h\to\infty} f_h(x)$ e $t = \min_C [K(X+, T+) \max \lim_{h\to\infty} f_h(x)]$.

TEOREMA 4. *Sia* X *uno spazio topologico compatto, sia* (f_h) *una successione di funzioni da* X *in* P(T) *e sia* f *una funzione da* X *in* T *tale che* $f(x) = m(X, C) \lim_{h\to\infty} f_h(x) \; \forall x \in X$.

Posto $E_h = \mathrm{INF}_C\left(\bigcup_{x\in X} f_h(x)\right)$ ed $E = \mathrm{MIN}_C\{f(x) \mid x \in X\}$ si ha:

$$K(T+) \max \lim_{h\to\infty} E_h \subseteq E \qquad \text{se C è aperto},$$

$$K(T+) \min \lim_{h\to\infty} E_h \supseteq E \qquad \text{se C è chiuso}.$$

Osservazione 2. Questo teorema è stato enunciato per semplicità supponendo X compatto, ma vale, con lievi modifiche, supponendo le f_h equicoercive.

PROPOSIZIONE 4. *Sia* X *uno spazio topologico arbitrario, sia* f_h *una successione di funzioni da* X *in* P(T) *e sia* f *una funzione da* X *in* T *tale che* $f(x) = m(\mathrm{X}, \mathrm{C}) \lim_{h \to \infty} f_h(x)\ \forall x \in \mathrm{X}$. *Se il cono* C *è aperto, se* (x_h) *è una successione di punti di* X *convergente ad* $\bar{x}$ *e* t_h *è una successione di punti di* T *convergente a* t, *tale che per ogni* h $t_h \in f_h(x_h) \cap \mathrm{MIN_C}\left[\bigcup_{x \in \mathrm{X}} f_h(x)\right]$, *allora* $f(\bar{x}) = t$ *e* $t \in \mathrm{MIN_C}\{f(x) \mid x \in \mathrm{X}\}$.

Concludo con alcuni risultati validi quando il cono C è chiuso e (f_h) è una successione di funzioni da X in T (indicherò con $\langle\ ,\ \rangle$ l'usuale prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$).

LEMMA 2.

a) *Sia* $x' \in \mathbf{R}^n$ *tale che* $\langle x', c\rangle \geq 0\ \forall c \in \mathrm{C}$. *Allora, se* $y = m(\mathrm{X}, \mathrm{C}) \lim_{h \to \infty} (\mathrm{sing}\ f_h)(x)$, *si ha*: $\langle x', y\rangle = \Gamma(\mathrm{X}-) \lim_{h \to \infty} \langle x', f_h(x)\rangle$.

b) *Sia* $\mathrm{A} \subseteq \mathbf{R}^n$ *tale che* $c \in \mathrm{C}$ *se, e solo se,* $\langle x', c\rangle \geq 0\ \forall x' \in \mathrm{A}$. *Sia poi* $\bar{x}' \in \mathbf{R}^n$ *tale che* $\langle \bar{x}', c\rangle > 0\ \forall c \in \mathrm{C} \setminus \{0\}$ *e sia* $\mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \{\bar{x}'\}$. *Se* $\forall x' \in \mathrm{B}\ \langle x', y\rangle = \Gamma(\mathrm{X}-) \lim_{h \to \infty} (\langle x', f_h(x)\rangle)$, *allora* $y = m(\mathrm{X}, \mathrm{C}) \lim_{h \to \infty} (\mathrm{sing} f_h)(x)$.

Osservazione 3. Dato un cono C, per il teorema di Hahn–Banach, esiste $\bar{x}' \in \mathbf{R}^n$ tale che $\langle \bar{x}', c\rangle > 0\ \forall c \in \mathrm{C} \setminus \{0\}$.

COROLLARIO 2. $y = m(\mathrm{X}, \mathrm{C}) \lim_{h \to \infty} (\mathrm{sing} f_h)(x)$ *se, e solo se, per ogni* $x' \in \mathbf{R}^n$ *tale che* $\langle x', c\rangle \geq 0\ \forall c \in \mathrm{C}$ *si ha*: $\langle x', y\rangle = \Gamma(\mathrm{X}-) \lim_{h \to \infty} (\langle x', f_h(x)\rangle)$.

COROLLARIO 3. *Sia* C *un cono di* $\mathbf{R}^n$ *che ammette* n *generatori linearmente indipendenti* $g_1, \cdots, g_n$ *e che quindi, per quanto visto in precedenza, induce su* $\mathbf{R}^n$ *una struttura di reticolo condizionatamente completo.*

Siano $p_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ $(i = 1, \cdots, n)$ le forme lineari definite da

$$p_i\left(\sum_{j=1}^{n} x_j g_j\right) = x_i .$$

Allora

$$y = m(\mathrm{X}, \mathrm{C}) \lim_{h \to \infty} (\mathrm{sing}\ f_h)(x)$$

se, e solo se,

$$p_i(y) = \Gamma(\mathrm{X}-) \lim_{h \to \infty} (p_i \cdot f_h)(x) \quad \forall i = 1, \cdots, n$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(y) = \Gamma(\mathrm{X}-) \lim_{h \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (p_i \cdot f_h)(x) .$$

COROLLARIO 4. $y = m\,(\mathrm{X}\,,\mathrm{C})\lim_{h\to\infty}(\operatorname{sing} f_h)(x)$ *se, e solo se, per ogni cono* D *contenente* C *e tale che* $\leq_{\mathrm{D}}$ *induce su* $\mathbf{R}^n$ *una struttura di reticolo, si ha*:

$$y = \Gamma\,(\mathrm{X}\,-)\,(\mathbf{R}^n\,,\,\leq_{\mathrm{D}})\lim_{h\to\infty} f_h\,(x)\,.$$

Osservazione 4. Segue dai risultati precedenti che, contrariamente a quanto accade per la K–convergenza, per la $m\,(\mathrm{X}\,,\mathrm{C})$ convergenza, anche ammettendo condizioni piuttosto restrittive sullo spazio topologico X, non vale generalmente un risultato di compattezza; cioè, assegnata una successione $f_h : \mathrm{X} \to \mathrm{P}\,(\mathrm{T})$, generalmente non esiste alcuna sottosuccessione $m\,(\mathrm{X}\,,\mathrm{C})$ convergente.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. ATTOUCH (1979) – *Sur la Γ–convergence*; Séminaire Brézis–Lions, College de France.

[2] J. P. AUBIN (1979) – *Mathematical methods of game and economic theory*, « Studies in Mathematics & its applications », Vol. 7. North–Holland Publ. Comp. Amsterdam, New York, Oxford.

[3] J. P. AUBIN (1971) – *A Pareto minimum principle, Differential games and related topics*, H. W. Kuhn e G. P. Szegö ed., 147–175, North–Holland Publ. Comp. Amsterdam.

[4] G. BIRKHOFF (1979) - *Lattice Theory*, « Amer. Math. Soc. », Providence.

[5] G. BUTTAZZO (1977) – *Su una definizione generale dei Γ–limiti*, « Boll. Un. Math. Ital. », (5) *14 B*, 722–744.

[6] O. CALIGARIS e P. OLIVA (1981) – *Necessary and sufficient conditions for Pareto problems*, « Boll. Un. Mat. Ital. », (5) *18–B*, 177–216.

[7] L. CESARI e M. B. SURYANARAYANA (1978) – *An existence theorem for Pareto problems*, « Nonlinear Analysis », *2*, 225–233.

[8] L. CESARI e M. B. SURYANARAYANA (1976) – *Existence theorems for Pareto optimization in Banach spaces*, « Bull. Amer. Math. Soc. », *82*, 306–308.

[9] L. CESARI e M. B. SURYANARAYANA (1976) – *Existence theorems for Pareto problems and optimizations, Calculus of Variations and Control Theory*, D. L. Russel ed., 139–154, Academic Press, New York.

[10] E. DE GIORGI (1982) – *Generalized limits in Calculus of Variations; Topics in Functional Analysis 1980–1981*, « Quaderno della Scuola Normale Superiore di Pisa », 117–148.

[11] E. DE GIORGI (1979) – *Convergence problems for functionals and operators*; Proceed. Int. Meeting on « Recent Methods in Nonlinear Analysis » Roma 8–12 maggio 1978, ed. da E. De Giorgi, E. Magenes, U. Mosco, Pitagora ed., Bologna, 131–188.

[12] E. DE GIORGI (1980) – *New problems in Γ-convergence and G-convergence*; Proceed. Meeting on « Free Boundary problems », Pavia sett. otto. 1979, « Istituto Nazionale di Alta Matematica », Roma, vol. II, 183–194.

[13] E. DE GIORGI e T. FRANZONI (1975) – *Su un tipo di convergenza variazionale*, « Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Mat. Fis. Natur. », (8) *58*, 842–850.

[14] K. KURATOWSKI (1966) – *Topology*; Academic Press, New York.

[15] R. PEIRONE (1981) – *Γ–convergenza per funzioni a valori vettoriali*; tesi di laurea, Genova.