ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

BRUNO FIRMANI

**Sulle singolarità delle soluzioni di un problema di
Dirichlet per un'equazione iperbolica del secondo
ordine**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 74 (1983), n.4, p. 223–227.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1983_8_74_4_223_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *Sulle singolarità delle soluzioni di un problema di Dirichlet per un'equazione iperbolica del secondo ordine.* Nota di BRUNO FIRMANI, presentata (*) dal Socio G. FICHERA.

SUMMARY. — A solution u of a particular Dirichlet problem for a non-linear 2nd order hyperbolic equation is regular at any point of the boundary but one point. The kind of singularity which u exhibits at this point is investigated.

In questa nota viene proseguito lo studio di un problema di Dirichlet studiato già in [4] e [5] e si perviene alla classificazione delle singolarità presentate dalle soluzioni di questo problema. Si estendono, così, alcuni risultati ottenuti nei lavori [1] e [2] per l'equazione $u_{xy} = 0$.

Indichiamo con $\alpha(x)$ e $\beta(y)$ due funzioni reali appartenenti, rispettivamente, alle classi $C^1[0, 1]$ e $C^1[0, \sigma]$ e tali che:

- (1) $\alpha(0) = \beta(0) \quad , \quad \alpha(1) = \sigma \quad , \quad \beta(\sigma) = 1 \quad ,$
- (2) $\alpha'(x) > 0 \quad (0 \leq x \leq 1) \quad , \quad \beta'(y) > 0 \quad (0 \leq y \leq \sigma)$
- (3) $\alpha'(0) \beta'(0) < 1 \quad , \quad \alpha'(1) \beta'(\sigma) > 1 \quad .$

Risulti, inoltre, posto $\tau(x) = \beta[\alpha(x)]$:

- (4) $\tau(x) < x \quad (0 < x < 1) \quad .$

Sia $f(x, y, u)$ una funzione reale della classe $C^0([0, 1] \times [0, \sigma] \times (-\infty + \infty))$ verificante la relazione

- (5) $|f(x, y, u)| \leq H + Ku \quad (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sigma, u \text{ reale})$

con H e K costanti positive. Assunte comunque due funzioni $\varphi_1(x) \in C^1[0, 1]$ e $\varphi_2(y) \in C^1[0, \sigma]$ tali che

- (6) $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) \quad , \quad \varphi_1(1) = \varphi_2(\sigma)$

possiamo considerare il seguente problema di Dirichlet:

- (7) $u_{xy}(x, y) = f(x, y, u(x, y)) \quad (x, y) \in R'$

- (8) $u(x, \alpha(x)) = \varphi_1(x) \quad (0 \leq x < 1), \quad u(\beta(y), y) = \varphi_2(y) \quad (0 \leq y < \sigma) \quad .$

avendo indicato con R' il rettangolo $[0, 1] \times [0, \sigma]$.

(*) Nella seduta del 23 aprile 1983.

In [4] è dimostrato che il problema (7) (8) ammette almeno una soluzione « in grande » inoltre ogni soluzione è limitata. Se la funzione $f(x, y, u)$ verifica, invece della (5), la più restrittiva condizione di Lipschitz rispetto alla variabile u allora sussiste anche un teorema di unicità della soluzione. Le soluzioni appartengono inoltre alla classe $\mathcal{U}'$ delle funzioni continue con le loro derivate prime e con la derivata seconda mista in R' .

Introdotte le funzioni

$$(9) \quad \varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2[\alpha(x)] \quad (0 \leq x \leq 1)$$

e

$$(10) \quad \Psi[u_0, x] = \int_x^{\tau(x)} d\xi \int_0^y f(\xi, \eta, u_0(\xi, \eta)) d\eta \quad (0 \leq x < 1)$$

con $u_0(x, y) \in C^0(R')$, ogni soluzione del problema (7) (8) è anche soluzione della seguente equazione ⁽¹⁾:

$$(11) \quad u(x, y) = \varphi_2(y) + \int_{\beta(y)}^x d\xi \int_0^y f(\xi, \eta, u(\xi, \eta)) d\eta \\ + \sum_0^{\infty} \{ \Psi[u, \tau^h(x)] - \Psi[u, \tau^h[\beta(y)]] \} + \\ + \sum_0^{\infty} \{ \varphi[\tau^h(x)] - \varphi[\tau^h\{\beta(y)\}] \}. \quad (x, y) \in R'.$$

La funzione $\varphi_2(y)$ che compare nel secondo membro della (11) è una funzione della classe $C^1[0, \sigma]$ mentre la funzione $\int_{\beta(y)}^x d\xi \int_0^y f(\xi, \eta, u(\xi, \eta)) d\eta$ è una funzione della classe $\mathcal{U}'$ e, in virtù della limitatezza della funzione u , ammette derivate prime limitate e, quindi, può essere prolungata per continuità su tutto il rettangolo $[0, 1] \times [0, \sigma]$; neanche questa funzione presenta, quindi, singolarità.

Poniamo

$$(12) \quad v(x) = \sum_0^{\infty} \{ \Psi[u, \tau^h(x)] + \varphi[\tau^h(x)] \} \quad (0 \leq x < 1).$$

Poichè la funzione $\beta(y)$ è di classe 1 e monotona crescente, lo studio della singolarità della funzione $v(x)$ nel punto 1 consente di determinare completamente

(1) Cfr. [4]: (32), (31), (13) e Teorema V.

la singolarità della funzione u data dalla (11). La funzione $v(x)$ appartiene alla classe $C^1[0, 1]$, come è immediato constatare, inoltre, per la limitatezza della funzione u , essa risulta anche limitata con la sua derivata prima. Prolunghiamo ora la funzione $\Psi[u, x]$ su tutto l'intervallo $[0, 1]$ ponendo $\Psi[u, 1] = 0$; questa funzione, così prolungata, appartiene alla classe $C^0[0, 1] \cap C^1[0, 1]$ e la sua derivata prima risulta limitata.

Dalla teoria esposta in [2] si ha che la funzione $v(x)$ è soluzione del seguente problema funzionale:

$$(13) \quad v(x) - v[\tau(x)] = \Psi[u, x] + \varphi(x), \quad v(0) = 0 \quad (0 \leq x < 1).$$

Posto $\mu(x) = \tau^{-1}(x) = \alpha^{-1}[\beta^{-1}(x)]$, si osservi che risulta $0 \leq \mu'(x) < 1$ e consideriamo il problema funzionale

$$(14) \quad w(x) - w[\mu(x)] = \Psi[u, \mu(x)] + \varphi[\mu(x)], \quad w(1) = 0 \quad (0 < x \leq 1).$$

Questo problema, pur non rientrando in quelli studiati nel lavoro [2], in virtù della disuguaglianza $\mu'(1) < 1$, può essere studiato con le stesse tecniche impiegate in quella nota. Sia ρ un numero positivo minore di 1. Mostriamo ora che il problema (14) ammette una ed una sola soluzione continua in $[\rho, 1]$ e che tale soluzione è derivabile nell'intervallo $[\rho, 1]$, con derivata limitata. Dal teorema 1 di [3] si ha che il problema (14) ammette una soluzione continua se e solo se la serie

$$(15) \quad \sum_0^{\infty} \{ \Psi[u, \mu^{h+1}(x)] + \varphi[\mu^{h+1}(x)] \}$$

è continua in $[\rho, 1]$ e tale serie è l'unica soluzione di detto problema. Quindi dobbiamo ora dimostrare la continuità della serie (15) e la sua derivabilità.

Poniamo $\gamma(x) = \Psi[u, \mu(x)] + \varphi[\mu(x)]$ e sia $|\gamma'(x)| \leq L$. Mostriamo ora l'uniforme convergenza in $[\rho, 1]$ della (15). Riesce:

$$\left| \sum_{n+1}^{n+p} \gamma[\mu^h(x)] \right| = \left| \sum_{n+1}^{n+p} \{ \gamma[\mu^h(x)] - \gamma(1) \} \right| < L \sum_{n+1}^{n+p} \frac{d\mu^h(x)}{dx}.$$

Dai risultati contenuti nel lavoro [2] è facilmente dimostrabile la totale convergenza, in $[\rho, 1]$, della serie $\sum_0^{\infty} \frac{d\mu^h(x)}{dx}$ e così è conseguita la continuità della serie (15).

Sia ora $\rho < \rho' < 1$ e consideriamo la serie derivata della (15). Si ottiene

$$(16) \quad \left| \sum_0^{\infty} \frac{d\gamma[\mu^h(x)]}{dx} \right| = \left| \sum_0^{\infty} \gamma'[\mu^h(x)] \frac{d\mu^h(x)}{dx} \right| < L \sum_0^{\infty} \frac{d\mu^h(x)}{dx}.$$

Ne segue la totale convergenza della serie delle derivate in $[\rho, \rho']$, quindi la continuità e la limitatezza della derivata della serie (15) in $[\rho, \rho']$. Dai risultati

contenuti in [2] segue poi facilmente che l'ultima serie della (16) è limitata in $[\rho, 1)$.

Consideriamo ora la funzione $\mathfrak{D}(x) = v(x) + w(x)$. Le funzioni $\mathfrak{D}(x)$ e $v(x)$ presentano nel punto $x = 1$, la stessa singolarità essendo, nello stesso punto, la funzione $w(x)$ regolare. La funzione $\mathfrak{D}(x)$, come si verifica facilmente, è soluzione della equazione seguente:

$$\mathfrak{D}(x) - \mathfrak{D}[\mu(x)] = 0 \quad (0 < x < 1).$$

Una equazione di questo tipo è stata studiata e completamente risolta nel lavoro [2]; nello stesso lavoro è mostrato che la funzione $\mathfrak{D}$ assume tutti i valori del codominio in ogni intervallo del tipo $[\rho, \mu(\rho)]$, $[\mu(\rho), \mu^2(\rho)]$, $\dots$. Pertanto questo è anche il tipo di singolarità presentato dalla funzione $v(x)$ e, di conseguenza, della funzione $u(x, y)$. È, forse, interessante osservare che questa stessa singolarità è presentata dalla soluzione del problema di Dirichlet per l'equazione $u_{xy} = 0$, problema studiato nei lavori [1] e [2].

Supponiamo ora che le funzioni α e β verifichino le condizioni (1), (2) e la seguente:

$$(17) \quad \alpha'(0) \beta'(0) = 1 \quad , \quad \alpha'(1) \beta'(\sigma) = 1.$$

Assumiamo inoltre che esistano due numeri positivi p e q per i quali siano verificate le condizioni seguenti

$$(18) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \{1 - \tau'(x)\} x^{-p} > 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 1} \{\tau'(x) - 1\} (1 - x)^{-q} > 0.$$

e che la funzione $\varphi(x)$ verifichi la relazione

$$(19) \quad \varphi'(x) = o(x^{p+r}) \quad (\text{con } r > 0) \quad , \quad \varphi'(x) = o(1 - x)^{q+s} \quad (\text{con } s > 0)$$

che è più restrittiva della (16).

Nel lavoro [4] è dimostrato che sotto le ipotesi sopra indicate esiste almeno una soluzione « in grande » del problema (7) (8), la quale appartiene alla classe $\mathcal{U}'$ limitata. Anche in questo caso è possibile prolungare la funzione $\Psi[u, x]$ assumendo $\psi[u, 1] = 0$. Vogliamo ora mostrare che la somma della serie (15) è una funzione continua in $[\rho, 1]$, derivabile in $[\rho, 1)$ con derivata limitata. Dal lemma 1 di [4] si ha che la serie $\sum_0^{\infty} \varphi[\mu^{h+1}(x)]$ è della classe $C^1[\rho, 1]$. Consideriamo pertanto la serie

$$(20) \quad \sum_0^{\infty} \Psi[u, \mu^{h+1}(x)] \quad (\rho \leq x \leq 1).$$

Dalla monotonia della funzione $\mu(x)$, supposto $|u(x, y)| < M$, si ha:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n+1}^{n+p} \Psi[u, \mu^{h+1}(x)] \right| &= \left| \sum_{n+1}^{n+p} \int_{\mu^{h+1}(x)}^{\mu^{h+2}(x)} d\xi \int_0^{\alpha[\mu^{h+1}(x)]} f(\xi, \eta, u(\xi, \eta)) d\eta \right| \leq \\ &\leq \sum_{n+1}^{n+p} \int_{\mu^{h+1}(x)}^{\mu^{h+2}(x)} d\xi \int_0^{\alpha[\mu^{n+p+1}(x)]} |f(\xi, \eta, u(\xi, \eta))| d\eta \leq \\ &\leq (H + KM) \alpha[\mu^{n+p+1}(x)] \{ \mu^{n+p+2}(x) - \mu^{n+2}(x) \}. \end{aligned}$$

Poichè esiste il $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu^k(x) = 1$ (uniformemente in $[\rho, 1]$), segue immediatamente la uniforme convergenza della serie (20).

Sia ora $\rho < \rho' < 1$ e consideriamo la serie derivata della (30) in $[\rho, \rho']$. Può essere, poi, dimostrato, con un procedimento del tutto analogo a quello seguito per dimostrare il teorema XI di [4], che la serie derivata della (20) è uniformemente convergente in $[\rho, \rho']$ e la sua somma è limitata in $[\rho, 1)$. Possiamo allora considerare la funzione $v(x)$ definita dalla (12) e la funzione $\omega(x)$ soluzione del problema (14) che è data, anche in questo caso, dalla serie (15). Procedendo come nel caso precedente si può introdurre la funzione $\vartheta(x)$ la quale fornisce il tipo di singolarità presentata dalla funzione v e, conseguentemente, anche dalla soluzione del problema (7) (8) quando le curve α e β presentano un contatto.

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. FICHERA (1970-1971) - *Su un problema di Dirichlet per l'equazione $u_{xy} = 0$* , « Atti Accad. Sc. Torino », 105, 355-366.
- [2] G. FICHERA (1971) - *Studio delle singolarità della soluzione di un problema di Dirichlet per l'equazione $u_{xy} = 0$* , « Rend. Accad. Naz. Lincei », (VIII) 50, 6-17.
- [3] B. FIRMANI (1982) - *Sui casi singolari del problema di Goursat*, « Rend. Mat. », (VIII) 2, 237-256.
- [4] B. FIRMANI (1983) - *Su un problema di Dirichlet per un'equazione del secondo ordine di tipo iperbolico*, in corso di stampa sugli « Annali di Matematica ».
- [5] B. FIRMANI (1982) - *Condizioni per la regolarità della soluzione di un problema di Dirichlet per un'equazione iperbolica del secondo ordine*, « Rend. Accad. Naz. Lincei », (VIII), 73, 105-108.