Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Juan Morales

Sui gruppi finiti non abeliani a sottogruppi normali propri abeliani

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **74** (1983), n.4, p. 216–222.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1983_8_74_4_216_0>

Algebra. — *Sui gruppi finiti non abeliani a sottogruppi normali propri abeliani.* Nota di JUAN MORALES, presentata (*) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — In this paper we study finite non abelian solvable groups in which every proper normal subgroup is abelian, and non-solvable ones in which every proper normal subgroup is abelian and has a basis of at most two elements.

INTRODUZIONE

In un lavoro del 1978, M. G. Bianchi [1] ha classificato i gruppi finiti non ciclici in cui ogni sottogruppo normale proprio è ciclico. In seguito alla lettura di questo lavoro, mi sono posto un problema più generale: quello di determinare i gruppi non abeliani in cui ogni sottogruppo normale proprio è abeliano e dotato di una base costituita da al più due generatori. Nel corso della ricerca, ho visto che si poteva facilmente arrivare anche alla classificazione dei gruppi finiti risolubili non abeliani in cui ogni sottogruppo normale proprio è abeliano.

Nel presente lavoro ottengo quindi i seguenti risultati:

a) Sia G un gruppo finito risolubile non abeliano, dotato di almeno due sottogruppi normali massimali, e tale che ogni sottogruppo normale proprio di G sia abeliano. Allora G è un p-gruppo finito; quindi tutti i suoi sottogruppi sono abeliani, e G rientra quindi nella classificazione dei gruppi finiti non-abeliani minimali, data da Moreno-Miller [2] e da Redei [3]. Precisamente tali gruppi coincidono con i p-gruppi finiti G per cui $\phi(G) = Z(G)$ e $G/Z(G)$ è abeliano elementare di ordine p^2.

b) Sia G un gruppo finito risolubile non abeliano, avente un solo sottogruppo normale massimale, e tale che ogni sottogruppo normale proprio di G sia abeliano. Allora G è prodotto semidiretto di un p'-gruppo abeliano M con un p-gruppo ciclico finito $H = \langle h \rangle$, e tale che h induca in M un automorfismo di ordine p che non lasci fermo nessun elemento $\neq 1$ di $M_{p_i}/M_{p_i}^{p_i}$ $(i = 1, \cdots, r)$, essendo M_{p_i} la p_i-componente primaria di M, $(|M| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$ con $p_1, \cdots, p_r$ primi distinti). Viceversa, ogni gruppo di questa forma gode della proprietà richiesta.

c) Un gruppo finito non risolubile G gode della proprietà che ogni suo sottogruppo normale proprio è abeliano e dotato di una base costituita da al più due generatori se e solo se G è ampliamento centrale di un sottogruppo

(*) Nella seduta del 23 aprile 1983.

normale abeliano M dotato di una base costituita da al più due generatori con un gruppo semplice non abeliano, tale che $M = \phi(G)$.

TEOREMA 1. *Sia* G *un gruppo finito risolubile. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti*:

a) a.1 G non è abeliano,

a.2 Ogni sottogruppo normale proprio di G è abeliano,

a.3 G ha almeno due sottogruppi normali massimali.

b) b.1 G è un p-gruppo,

b.2 $G/Z(G)$ è abeliano elementare d'ordine p^2,

b.3 $\phi(G) = Z(G)$.

Dimostrazione: a) implica b):

Siano M, N sottogruppi normali massimali distinti di G, allora:

(1) $$G/M \cap N \text{ è abeliano.}$$

Infatti G/M, G/N sono abeliani, onde $G' \subset M$ e $G' \subset N$, e pertanto $G' \subset M \cap N$ e $G/M \cap N$ è abeliano.

(2) $G/M \cap N$ è abeliano d'ordine pq ove, $[G:M] = p$ e $[G:N] = q$ p, q primi.

(3) $$(1) \neq M \cap N \subset Z(G).$$

Infatti $M \subset C_G(M \cap N)$, $N \subset C_G(M \cap N)$ onde $G = MN \subset C_G(M \cap N)$, e $(1) \neq M \cap N$ perchè altrimenti $G = MN$ sarebbe abeliano.

(4) $$G/M \cap N \text{ è abeliano elementare d'ordine } p^2 .$$

Infatti altrimenti sarebbe ciclico ed essendo $M \cap N \subset Z(G)$, G sarebbe abeliano.

(5) $$G \text{ è un } p\text{-gruppo.}$$

Basta provare che $M \cap N$ ha ordine potenza di p. Supponiamo che $q \mid |M \cap N|$ con q primo, $p \neq q$.

Poichè $(1) \neq M \cap N \subset Z(G)$ si ha che $M \cap N = (M \cap N)_{p'} \times (M \cap N)_p$. $H = (M \cap N)_{p'}$ ha indice potenza di p in G, ed ha ordine primo con p, quindi è un p'-sottogruppo di Hall di G. Detto K un p-sottogruppo di Sylow di G, si ha $G = HK$. Ma $H \subset Z(G)$, onde $G = HK = H \times K$, con K sottogruppo normale proprio di G, e quindi abeliano. Segue che G è abeliano, il che è assurdo. Pertanto $M \cap N$ ha ordine potenza di p e G è anche esso un p-gruppo.

(6) $$M \cap N = Z(G).$$

Infatti, essendo G un p-gruppo non abeliano $[G : Z(G)] \geq p^2$; ma $M \cap N \subset Z(G)$ onde $[G : Z(G)] \leq p^2$ segue $[G : Z(G)] = p^2$, cioè $Z(G) = M \cap N$.

(7) $G/Z(G)$ è abeliano elementare d'ordine p^2.

Segue da (6) e (4).

(8) $$Z(G) \subset \phi(G).$$

Infatti essendo G un p-gruppo, ogni suo sottogruppo massimale è normale. Ma da (6) risulta che se M ed N sono sottogruppi normali massimali distinti di G è $M \cap N = Z(G)$, quindi ogni sottogruppo massimale di G contiene $Z(G)$, cioè $Z(G) \subset \phi(G)$.

(9) $$\phi(G) \subset Z(G).$$

Infatti $G/Z(G)$ è abeliano elementare.

(10) $$Z(G) = \Phi(G).$$

Da (5), (7) e (10) discende che *a*) implica *b*).

b) implica *a*):

Da b.2 segue che G non è abeliano. Da b.1 e b.2 segue che G ha almeno due sottogruppi normali massimali. Allora perchè si verifichi *a*) basta provare che ogni sottogruppo massimale è abeliano. Sia M un sottogruppo massimale di G; allora per b.3 $Z(G) = \phi(G) \subset M$ e per b.2 si ha che $|M/Z(G)| = p$. Segue che M è abeliano.

TEOREMA 2. *Sia* G *un gruppo finito risolubile. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti.*

a) a.1 G non è abeliano,

a.2 Ogni sottogruppo normale proprio di G è abeliano,

a.3 G ha un solo sottogruppo normale massimale.

b) b.1 G è prodotto semidiretto di un p'-gruppo abeliano M con un p-gruppo ciclico H (p primo).

b.2 Se h è un generatore di H, h induce in M un automorfismo d'ordine p che non lascia fermo nessun elemento $\neq 1$ di $M_{p_i}/M_{p_i}^{p_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, s)$ ove $|M| = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_s^{t_s}$ e M_{p_i} è la p_i-componente primaria di M.

Dimostrazione. a) implica *b*):

Sia N l'unico sottogruppo normale massimale di G. Allora

1) $[G : N] = p$ (p primo)

2) G/G' è un p-gruppo.

Infatti, essendo G/G' abeliano, se esiste un primo q tale che $q \mid G/G'|$, G/G' ha un sottogruppo normale T/G' d'indice q. Segue che T è normale in G con $[G : T] = q$, quindi T è normale massimale in G e pertanto $T = N$ e $p = q$.

3) G' è un p'-sottogruppo di Hall di G (e quindi, essendo normale, é l'unico p'-sottogruppo di Hall di G). Infatti essendo G' abeliano esso ha un solo p'-sottogruppo di Hall M, il quale è caratteristico in G' e quindi normale in G. Essendo G/G' e G'/M p-gruppi, si ha che G/M è un p-gruppo, e quindi M è l'unico p'-sottogruppo di Hall di G. G/M è un p-gruppo e ha soltanto un sottogruppo normale massimale, pertanto è ciclico e $G' \subset M$; ma è $M \subset G'$ quindi $G' = M$. Pertanto $G' = M$ è l'unico p'-sottogruppo di Hall di G.

4) $G = MH$, ove $M = G'$ e H è un p-sottogruppo di Sylow di G.

5) H è un p-gruppo ciclico.

Infatti G/M è ciclico e $G/M = MH/M \simeq H/M \cap H = H$. Pertanto b.1 è verificata, onde perchè si verifichi *b*) basta provare b.2.

Sia $h \in H$ un generatore di H. Allora da (1) segue che $h^p \in N$, e poichè N è abeliano e $M \subset N$, h^p induce l'identità in M, onde h induce in M un automorfismo d'ordine p. Sia $|M| = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_s^{t_s}$ e sia M_{p_i} la p_i-componente primaria di M. Essendo M_{p_i} caratteristico in M e $M_{p_i}^{p_i}$ caratteristo in M_{p_i} e in M si ha che h muta in se M_{p_i} e $M_{p_i}^{p_i}$, onde induce un automorfismo in $M_{p_i}/M_{p_i}^{p_i}$. Resta da dimostrare che h non fissa alcun elemento $\neq 1$ di $M_{p_i}/M_{p_i}^{p_i}$. Supponiamo che h muti in se $M_{p_i}^{p_i} b$ con $b \in M_{p_i}$, $b \notin M_{p_i}^{p_i}$. Allora $[h, b] \in M_{p_i}^{p_i}$. Ne segue che b normalizza il sottogruppo $K = (M_{p_1} \times M_{p_2} \times \cdots \times M_{p_{i-1}} \times M_{p_i}^{p_i} \times M_{p_{i+1}} \times \cdots \times M_{p_s}) H$, di incide p_i in G, e quindi massimale in G. Perchè $b \notin K$, si ha $N_G(K) \supsetneqq K$, e poichè K è massimale in G, si ha $N_G(K) = G$ cioè K normale in G contro l'ipotesi che G abbia un solo sottogruppo normale massimale. Segue che *a*) implica *b*).

b) implica a):

Poichè h induce in M un automorfismo d'ordine p, H^p centralizza M onde $N = MH^p = M \times H^p$ è un sottogruppo normale abeliano. Una volta che avremo dimostrato che N è l'unico sottogruppo normale massimale di G, si ha che ogni sottogruppo normale proprio di G è incluso in N e quindi abeliano. Supponiamo che G abbia un sottogruppo normale massimale $S \neq N$. Essendo G risolubile $[G : S]$ è un primo. Se $[G : S] = p$, si ha che $M \subset S$, essendo M l'unico p'-sottogruppo di Hall di G, onde $[G/M : S/M] = p$; ma G/M è ciclico, e quindi ha un solo sottogruppo di indice p onde $S/M = N/M$, $N = S$ contro l'ipotesi. Pertanto $[G : S] = p_i$ con $p_i \neq p$. Essendo S normale in G, S contiene tutti i sottogruppi di Sylov di G ad eccezione di M_{p_i}. Inoltre $[M_{p_i} : (M_{p_i} \cap S)] = p_i$, e pertanto $M_{p_i} \cap S \supset M_{p_i}^{p_i}$. Essendo $h \in S$ e S normale in G, si ha $[M_{p_i}, h] \subset S$ ed essendo M_{p_i} normale in G, $[M_{p_i}, h] \subset M_{p_i}$, onde $[M_{p_i}, h] \subset M_{p_i} \cap S$. Se M_{p_i} è ciclico, si ha che $M_{p_i} \cap S = M_{p_i}^{p_i}$, onde $[M_{p_i}, h] \subset M_{p_i}^{p_i}$; ne segue che h induce l'automorfismo identico in $M_{p_i}/M_{p_i}^{p_i}$, contro l'ipotesi. Se M_{p_i} non è ciclico, $(M_{p_i} \cap S)/M_{p_i}^{p_i}$ è un p_i-gruppo abeliano elementare, ed è mutato in sé da h perché è normale in $G/M_{p_i}^{p_i}$. Pertanto h fissa un p_i-sottogruppo del gruppo $M_{p_i}/M_{p_i}^{p_i}$ abeliano elementare. Per il teorema di Maschke, essendo h di ordine primo con p_i, h muta in sé anche un complemento $T/M_{p_i}^{p_i}$ di $(M_{p_i} \cap S)/M_{p_i}^{p_i}$ in $M_{p_i}/M_{p_i}^{p_i}$, onde $[T, h] \subset T$. Ma $[T, h] \subset [M_{p_i}, h] \subset M_{p_i} \cap S$, e quindi $[T, h] \subset T \cap (M_{p_i} \cap S) = M_{p_i}^{p_i}$. Pertanto h induce l'identità in $T/M_{p_i}^{p_i}$, contro l'ipotesi che h non fissa nessun elemento $\neq 1$ di $M_{p_i}/M_{p_i}^{p_i}$. Segue che b) implica a).

PROPOSIZIONE 3. *Sia* G *un gruppo finito non risolubile tale che ogni suo sottogruppo normale proprio sia abeliano e ammetta una base costituita da al più due generatori. Allora* G *ha un solo sottogruppo normale massimale* N, *che coincide col sottogruppo di Frattini* $\phi(G)$ *di* G.

Dimostrazione. Se G avesse due sottogruppi normali massimali N_1, N_2, sarebbe $G = N_1 N_2$ con N_1, N_2 normali e abeliani, onde G sarebbe nilpotente, il che è assurdo. Pertanto G ha un solo sottogruppo normale massimale N ed è $\phi(G) \subset N$ perché $\phi(G)$ è normale in G e $\neq G$.

Procediamo ora per induzione rispetto all'ordine di G. Sia P un sottogruppo normale minimale di G contenuto in N. Allora G/P verifica le ipotesi del teorema, onde, per l'ipotesi di induzione $\phi(G/P) = N/P$, cioè ogni sottogruppo massimale di G che contenga P, contiene anche N. Se è $\phi(G) \subsetneqq N$, deve quindi esistere un sottogruppo massimale M di G tale che $M \not\supset P$, cioè $G = MP$, $M \cap P = \{1\}$.

Essendo N abeliano è $C_G(P) \supset N$. Ma $C_G(P)$ è normale in G, onde, essendo N normale massimale, è $C_G(P) = N$ o $C_G(P) = G$. Se $C_G(P) = G$, è $M \subset C_G(P)$, quindi $P \subset C_G(M) \subset N_G(M)$, e poiché $M \subset N_G(M)$ si ha $G = MP \subset N_G(M)$, cioè M è normale in G, e quindi normale massimale in G, il che è assurdo perché $N \neq M$ ed N è l'unico sottogruppo normale massimale di G. Dovrà quindi essere $C_G(P) = N$.

Allora G/N è isomorfo al gruppo degli automorfismi indotti da G in P. Poiché N è abeliano e ammette una base costituita da al più due generatori, e $P \subset N$, P deve essere un p-gruppo abeliano elementare d'ordine p o p^2. Pertanto G/N, essendo isomorfo ad un sottogruppo del gruppo degli automorfismi di P, è isomorfo ad un sottogruppo di Z_{p-1} o di $GL(2, p)$, il che non può essere perché G/N è semplice non abeliano (visto che G è non risolubile, N normale massimale ed abeliano) mentre Z_{p-1} è abeliano e $GL(2, p)$ non ha sottogruppi semplici non abeliani. Si giunge quindi ad un assurdo, onde $N = \phi(G)$.

PROPOSIZIONE 4. *Sia* G *un gruppo finito non risolubile tale che ogni suo sottogruppo normale proprio sia abeliano e ammetta una base costituita da al più due generatori. Allora* G *ha un solo sottogruppo normale massimale* N, *coincidente col centro* Z (G) *di* G.

Dimostrazione. Che G abbia un solo sottogruppo normale massimale N risulta dalla proposizione 3. Proviamo che $N = Z(G)$. Poiché $Z(G) \subset N$, basta provare che $N \subset Z(G)$.

Sia R un p-sottogruppo di Sylow di N: esso è caratteristico in N, perché N è abeliano, quindi è normale in G. Siano A e B due sottogruppi di R normali in G e tali che $A \subsetneqq B \subsetneqq R$ e non esista alcun sottogruppo normale D di G tale che $A \subsetneqq D \subsetneqq B$. Allora $C_G(B/A) \supset N$; ma $C_G(B/A)$ è normale in G, onde, essendo N normale massimale in G, si ha $C_G(B/A) = N$ o $C_G(B/A) = G$.

Supponiamo $C_G(B/A) = N$. Allora G/N è isomorfo al gruppo degli automorfismi indotti da G in B/A. Ma B/A è abeliano elementare (perché è un fattore principale di G) ed è generabile con al più due elementi, onde ha ordine p o p^2. Pertanto G/N deve essere isomorfo ad un sottogruppo di Z_{p-1} o di $GL(2 \,.\, p)$, e ciò non può essere perché G/N è semplice non abeliano mentre Z_{p-1} è abeliano e $GL(2, p)$ non ha sottogruppi semplici non abeliani. Ne segue che $C_G(B/A) = G$.

Sia ora $\langle 1 \rangle = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_s = R$ una porzione di serie principale di G compresa tra $\langle 1 \rangle$ e R. Vogliamo provare che $C_G(R) = G$. In caso contrario, deve essere $C_G(R) = N$, perché $N \subset C_G(R)$ e $C_G(R)$ è normale in G. In base a quanto ora visto, G induce l'automorfismo identico in ciascuno dei fattori $\frac{A_{i+1}}{A_i}$ $(i = 0, \cdots, s-1)$ onde il gruppo degli automorfismi indotto da G in R è un p-gruppo, cioè se $C_G(R) = N$, G/N è un p-gruppo, il che è assurdo, perhcé G/N è semplice non abeliano. Segue che $C_G(R) = G$, cioè $R \subset Z(G)$. Quindi ogni sottogruppo di Sylow di N è in $Z(G)$, e pertanto $N \subset Z(G)$, c.d.d.

TEOREMA 5. *Sia G un gruppo finito non risolubile. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti.*

a) Ogni sottogruppo normale proprio di G è abeliano ed ammette una base costituita da al più due generatori.

b) G è un ampliamento centrale di un gruppo abeliano finito M, dotato di una base costituita da al più due generatori, con un gruppo semplice non abeliano e si ha $\phi(G) = M$.

Dimostrazione. *a*) implica *b*):

Sia M l'unico sottogruppo normale massimale di G. Allora M è abeliano ed ha una base costituita da al più due generatori e G/M è semplice non abeliano. Dalle proposizioni 3 e 4 segue che *a*) implica *b*).

b) implica *a*):

Sia N un sottogruppo normale proprio di G. Segue che $N \subset \phi(G)$ perché $N\phi(G)/\phi(G) \lhd G/\Phi(G)$; essendo $G/\phi(G)$ semplice segue che $N \subset \phi(G)$

oppure $N\phi(G) = G$. Se $N\phi(G) = G$, allora $N = G$, il che è assurdo perché N è un sottogruppo normale proprio. Pertanto $N \subset \phi(G) = M$ e N è abeliano e dotato di una base costituita da al più due generatori.

REFERENCES

[1] M. G. BIANCHI (1978) – *Sui gruppi a sottogruppi normale ciclici.* « Istituto Lombardo (Rend. Sc.) », *A 112*, 302–310.

[2] G. A. MILLER e H. MORENO (1903) – *Nonabelian groups in which every subgroup is abelian.* « Trans Am. Math. Soc. », *4*, 398–404.

[3] L. REDEI (1947) – *Das « schiefe Produkt » in der Gruppentheorie.* « Comment. Math. Helv. », *20*, 225–264.