
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ALESSANDRO SCARSELLI

Sulla intersezione delle classi normali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 74 (1983), n.4, p. 211–215.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1983_8_74_4_211_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 23 aprile 1983

Presiede il Presidente della Classe GIUSEPPE MONTALENTI

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Algebra. — *Sulla intersezione delle classi normali.* Nota di ALESSANDRO SCARSELLI, presentata (*) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — We prove that every abelian finite group is contained in the intersection of the nontrivial normal classes introduced by Zappa.

Una classe $\mathbf{F}$ di gruppi finiti risolubili è detta *normale* se:

- (1) $N \triangleleft G \in \mathbf{F} \Rightarrow N \in \mathbf{F}$
- (2) $G = N_1 \times N_2, N_i \in \mathbf{F} (i = 1, 2) \Rightarrow G \in \mathbf{F}$
- (3) Se $G = MH$ con $M \triangleleft G, H$ $\mathbf{F}$ -massimale in $G, H \cap M \triangleleft G$,
[H, M] $\not\subseteq H$ e $[N, H] \subseteq H$ per ogni $N \triangleleft G$ tale che $M \cap H \subseteq N \subseteq M$;
allora $M \in \mathbf{F}$.

Tali classi sono state introdotte da Zappa [1], nel contesto della Teoria delle classi di Fitting. Lo stesso autore [1, 2] pone il problema di determinare le classi normali minimali. Esso ha tra l'altro provato che ogni 2-gruppo abeliano è contenuto nella intersezione di tutte le classi normali non banali (ovvero non costituite dal solo gruppo identico) e ha determinato diverse classi di 2-gruppi non abeliani che godono della stessa proprietà.

In questo lavoro si affrontano gli analoghi problemi per i p -gruppi (con p primo dispari). Si prova che ogni p -gruppo abeliano è contenuto nella inter-

(*) Nella seduta del 12 febbraio 1983.

sezione di tutte le classi normali non banali (e quindi ogni gruppo abeliano) e si forniscono, per ogni primo dispari p , esempi di p -gruppi non abeliani godenti di tale proprietà.

TEOREMA 1. - *Se p è un numero primo, n un numero naturale, C_n il gruppo ciclico di ordine p^n e $\mathbf{F}$ una classe normale non banale, allora $C_n \in \mathbf{F}$.*

Dimostrazione. - Sia $C_n \notin \mathbf{F}$. Giacchè $C_1 \in \mathbf{F}$ [1], esisterà un numero naturale $1 < m \leq n$ tale che $C_m \notin \mathbf{F}$ e $C_r \in \mathbf{F}$ per ogni $1 \leq r < m$.

Indichiamo con $\mathbf{L}_m$ l'insieme dei p -gruppi di esponente p^{m-1} , che siano prodotto semidiretto di un p -gruppo abeliano di esponente minore o uguale a p^{m-1} con il gruppo ciclico di ordine p^{m-1} .

Supponiamo, in primo luogo, che $\mathbf{L}_m \subseteq \mathbf{F}$.

Sia $V = \langle u_1, u_2, \dots, u_p, y \mid u_i^{p^m} = 1 = y^{p^{m-1}}, [u_i, u_j] = 1 \text{ per ogni } i, j, [u_i, y] = u_i^{-1} u_{i+1}, \text{ per } 1 \leq i < p \text{ e } [u_p, y] = u_p^{-1} u_1 \rangle$.

Sia $\mathbf{H} = \{H \subseteq V \mid y \in H \text{ e } H \text{ ha esponente } p^{m-1}\}$ e $U = \langle u_1, u_2, \dots, u_p \rangle$. Siano $H_1, H_2 \in \mathbf{H}$, $H_1 = U_1 \langle y \rangle$, $H_2 = U_2 \langle y \rangle$, con $U_i \subseteq U$ ($i = 1, 2$). Essendo U abeliano, $U_1 U_2$ è un sottogruppo di U . Inoltre $U_i = H_i \cap U \triangleleft V$ e quindi $H_3 = U_1 U_2 \langle y \rangle$ è un sottogruppo di V .

Sia $g \in H_3$, $g = u_1 u_2 y^j$ con $u_i \in U_i$ ($i = 1, 2$) e $0 \leq j < p^{m-1}$.

$$\begin{aligned} g^{p^{m-1}} &= (u_1 u_2 y^j)^{p^{m-1}} = (u_1 u_2) (u_1 u_2)^{y^{-j}} (u_1 u_2)^{y^{-2j}} \dots (u_1 u_2)^{y^{-(p^{m-1}-1)j}} y^{jp^{m-1}} = \\ &= (u_1 u_1^{y^{-j}} \dots u_1^{y^{-(p^{m-1}-1)j}} y^{jp^{m-1}}) y^{-jp^{m-1}} (u_2 u_2^{y^{-j}} \dots u_2^{y^{-(p^{m-1}-1)j}} y^{jp^{m-1}}) y^{-jp^{m-1}} = \\ &= (u_1 y^j)^{p^{m-1}} (u_2 y^j)^{p^{m-1}} = 1. \end{aligned}$$

Dunque $H_3 \in \mathbf{H}$. Ne segue che $\mathbf{H}$ ha un unico elemento massimale, sia esso H . $H \in \mathbf{L}_m$ e quindi $H \in \mathbf{F}$, inoltre H è $\mathbf{F}$ -massimale in V , giacchè ogni sottogruppo di V che contenga propriamente H , possiede qualche elemento di periodo p^m , mentre $C_m \notin \mathbf{F}$.

Sia Ω l'insieme degli elementi di periodo p^{m-1} di U , ovvero $\Omega = \langle u_1^p, u_2^p, \dots, u_p^p \rangle$. Il gruppo $\Omega \langle y \rangle$ ha classe $p+1$ e non è regolare in quanto contiene elementi di periodo p^m . Posto

$$u_1^{-p} u_2^p = v_1, u_2^{-p} u_3^p = v_2, \dots, u_{p-1}^{-p} u_p^p = v_{p-1},$$

si ha che $K = \langle v_1, v_2, \dots, v_{p-1}, y \rangle$ ha classe p e quindi è regolare, di conseguenza ha esponente p^{m-1} e appartiene perciò ad $\mathbf{H}$. Ne segue che $K \subseteq H$.

Si ha $[u_1^p, y] = v_1 \in K \subseteq H$ e dunque $\Omega \subseteq N_V(H)$.

D'altra parte $[u_1, y] = u_1^{-1} u_2$ ha periodo p^m e quindi $[u_1, y] \notin H$ onde $H \not\triangleleft V$.

Sia $\mathbf{M} = \{M \subseteq U \langle y^p \rangle \mid M \not\subseteq N_V(H), H \subseteq N_V(M) \text{ e } M \supseteq \langle H \cap U, y^p \rangle\}$. ($U, y^p \in \mathbf{M}$ e quindi $\mathbf{M}$ possiede elementi minimali, sia M uno di essi. Sia

$G = MH$ Essendo $H = (H \cap U) \langle y \rangle$ è $[H : \langle H \cap U, y^p \rangle] = p$ e dunque $[MH : M] = [H : H \cap M] = [H : \langle H \cap U, y^p \rangle] = p$; perciò M è normale massimo in G . Inoltre $M \cap H = \langle H \cap U, y^p \rangle \triangleleft G$, $[H, M] \not\subseteq H$ e $[N, H] \subseteq H$ per ogni $N \triangleleft G$ tale che $M \cap H \subseteq N \subsetneq M$, data la minimalità di M in $\mathbf{M}$. Essendo $\mathbf{F}$ una classe normale, deve aversi $M \in \mathbf{F}$.

D'altra parte $M \not\subseteq N_V(H)$ e quindi $M \cap U \not\subseteq \Omega$. Ne segue che M contiene qualche elemento di periodo p^m . Si ha una contraddizione dal momento che $C_m \notin \mathbf{F}$.

Sia ora $L_m \notin \mathbf{F}$ e sia X di ordine minimo in $L_m \setminus \mathbf{F}$. Sarà $X = [A] \langle x \rangle$ con A abeliano di esponente minore o uguale a p^{m-1} , e x di periodo p^{m-1} . Sia $B \triangleleft X$, $B \subseteq A$ e $[A : B] = p$, $L = B \langle x \rangle$ e $y \in A \setminus B$. Ogni elemento di X può esprimersi in uno e un sol modo nella forma ax^i con $a \in A$ e $0 \leq i < p^{m-1}$ e l'applicazione $ax^r \xrightarrow{z} a(yx)^r$ risulta quindi un automorfismo di X il cui periodo eguaglia quello di y . Sia $G = [X] \langle z \rangle$ il relativo prodotto semidiretto e $t = xz$.

Il sottogruppo $M = \langle A, x^p, xz \rangle$ ha indice p in G e $L \not\subseteq M$, quindi $G = ML$. Inoltre $L \in \mathbf{F}$, data la minimalità di X in $L_m \setminus \mathbf{F}$ ed esiste quindi un sottogruppo $\mathbf{F}$ -massimale H di G , contenente L , cosicchè $G = MH$ con $M \triangleleft G$ e $H \mathbf{F}$ -massimale in G . Poichè $X = A \langle x \rangle \notin \mathbf{F}$ e $\langle L, y \rangle = X$, deve essere $y \notin H$, quindi $A \langle x \rangle \cap H = B \langle x \rangle$ e perciò $[x, z] = x^{-1} z^{-1} xz = x^{-1} yx \notin H$. Ne segue che $H \not\triangleleft G$. $B \triangleleft M$, M/B è abeliano e $H \cap M \supseteq B$, quindi $H \cap M \triangleleft M$; d'altra parte $H \cap M \triangleleft H$ e quindi $H \cap M \triangleleft MH = G$. Non essendo $H \triangleleft G$ è $[M, H] \not\subseteq H$. Sia $N \triangleleft G$ con $H \cap M \subseteq N \subsetneq M$ e $[N, H] \not\subseteq H$. Sia $S = B \langle x^p \rangle$, allora è $S \triangleleft G$. Sia $n \in N$ con $[n, H] \not\subseteq H$, allora $n = y^i (xz)^r c$ con $c \in S$ e $r \neq 0 (p)$, infatti $(xz)^p \in x^p z^p A$, ma $A \subseteq C_G(G/S)$ e quindi $A \subseteq N_G(H)$; $z^p \in N_G(H)$ giacchè centralizza A e z muta x in $y^p x \in H$. Anche $n^z \in N$ e quindi $y^i (yxxz)^r c \in N$; ne segue che $(yxxz)^{-r} (xz)^r \in N$. Ma $[y, xz] = y^{-1} z^{-1} x^{-1} yxz = y^{-1} x^{-1} yx = [y, x] \in B$ e quindi anche $y^{-r} (xz)^{-r} (xz)^r \in N$, ovvero $y^{-r} \in N$, ed essendo $r \neq 0 (p)$ è $y \in N$. Perciò anche $(xz)^r \in N$ e quindi $xz \in N$. Ne segue che $N \supseteq \langle A, x^p, xz \rangle = M$ onde $M = N$. Essendo $\mathbf{F}$ normale, si ha $M \in \mathbf{F}$. xz ha periodo almeno p^{m-1} , giacchè $(xz)^{p^{m-2}} \notin A$. Se xz avesse periodo maggiore, essendo $xz \in M \in \mathbf{F}$ dovrebbe aversi $C_m \in \mathbf{F}$ contro l'ipotesi. Quindi xz ha periodo p^{m-1} . Ne segue che l'applicazione $at^v \rightarrow ax^v$ è un isomorfismo tra $\langle A, t \rangle$ e $\langle A, x \rangle$. D'altra parte $\langle A, x \rangle \notin \mathbf{F}$ e quindi $\langle A, t \rangle \notin \mathbf{F}$. Ma $\langle A, t \rangle \subseteq M \in \mathbf{F}$ e si ha una contraddizione. Tale contraddizione prova che $C_n \in \mathbf{F}$ per ogni n .

TEOREMA 2. — *Ogni classe normale non banale $\mathbf{F}$ contiene i gruppi non abeliani di ordine p^n ed esponente p^{n-1} , per ogni primo dispari p e numero naturale $n \geq 3$.*

Dimostrazione. — Sia M un gruppo non abeliano d'ordine p^n ed esponente p^{n-1} ; essendo p dispari è $M = \langle a, b \mid a^{p^{n-1}} = b^p = 1, b^{-1}ab = a^{1+p^{n-2}} \rangle$.

Il gruppo M ammette un automorfismo z tale che $a^z = ab$ e $b^z = b$. Essendo $a^{z^p} = ab^p = a$ e $b^{z^p} = b$, z ha periodo p . Si può costruire il prodotto semidiretto $G = [M] \langle z \rangle$.

Sia $t = az$ e si ponga $K = \langle A, t \rangle$ e $H = \langle B, t \rangle$ ove $A = \langle a^p, b \rangle$ e $B = \langle a^p \rangle$. Si ha $t^p = (az)^p = aa^{z^{-1}}a^{z^{-2}} \dots a^{z^{-p+1}} = a(ab^{-1})(ab^{-2}) \dots (ab^{-p+1})$; d'altra parte $ab^{-i} = b^{-i}a^{1-ip^{n-2}}$, quindi

$$\begin{aligned} t^p &= \prod_{i=0}^{p-1} ab^{-i} = \prod_{i=0}^{p-1} b^{-i} a^{1-ip^{n-2}} = \left(\prod_{i=0}^{p-1} b^{-i} a \right) a^{\left(-\sum_{i=0}^{p-1} i \right) p^{n-2}} = \\ &= \left(\prod_{i=0}^{p-1} b^{-i} a \right) a^{-\binom{p}{2} p^{n-2}} = \prod_{i=0}^{p-1} b^{-i} a, \end{aligned}$$

giacchè $p \mid \binom{p}{2}$ essendo p dispari e il periodo di a è p^{n-1} . D'altra parte

$$\prod_{i=0}^n b^{-i} a = \left(\prod_{i=1}^{n+1} b^{-\binom{i}{2}} ab^{\binom{i}{2}} \right) b^{-\binom{n+1}{2}} e b^{-\binom{p}{2}} = 1,$$

quindi

$$\begin{aligned} t^p &= \prod_{i=0}^{p-1} b^{-i} a = \prod_{i=1}^p b^{-\binom{i}{2}} ab^{\binom{i}{2}} = \\ &= \prod_{i=1}^p a^{1+\binom{i}{2} p^{n-2}} = a^p a^{\left(\sum_{i=1}^p \binom{i}{2} \right) p^{n-2}} = a^p a^{\binom{p+1}{3} p^{n-2}}. \end{aligned}$$

Essendo p dispari si ha che $t \in \langle a^p \rangle$ mentre $t^p \notin \langle a^{p^2} \rangle$. Ne segue che $\langle t^p \rangle = \langle a^p \rangle$, quindi t ha periodo p^{n-1} e $H = \langle B, t \rangle = \langle a^p, t \rangle = \langle t \rangle$. Per il Teorema 1, si ha $H \in \mathbf{F}$. Si ha inoltre che $K = \langle A, t \rangle = \langle a^p, b, t \rangle = \langle b, t \rangle$, cioè K è un gruppo di ordine p^n ed esponente p^{n-1} , non abeliano (visto che b non è permutabile con $t = az$) e pertanto è isomorfo a M . Inoltre $H \not\subseteq K \not\subseteq G$. Non può esistere un sottogruppo $\bar{K} \neq K$ d'ordine p^n tale che $H \subseteq \bar{K}$, altrimenti sarebbe $H = K \cap \bar{K}$ e poichè K e $\bar{K}$ sono normali in G , anche H lo sarebbe, il che non può essere perchè

$$a^{-1} t^{-1} a t = a^{-1} z^{-1} a^{-1} a a z = a^{-1} z^{-1} a z = a^{-1} a b = b \notin H.$$

Possiamo ora distinguere due casi:

1) H non è $\mathbf{F}$ -massimale in G . Allora, visto che K è l'unico sottogruppo d'ordine p^n contenente H , si ha $K \in \mathbf{F}$ e quindi $M \in \mathbf{F}$, essendo M isomorfo a K .

2) H è $\mathbf{F}$ -massimale in G . Allora si ha $H \cap M = \langle a^p \rangle$ e quindi $H \cap M$ è normale in G . Inoltre $H/H \cap M$ non centralizza $M/H \cap M$ avendosi

$$[H, M] = \langle [t, a], [t, b] \rangle = \langle [z, a], [az, b] \rangle = \langle b, [az, b] \rangle \not\subseteq H.$$

Se poi N è un sottogruppo normale di G tale che $H \cap M \subsetneq N \subsetneq M$ si ha che $N/H \cap M$ è un sottogruppo normale d'ordine p di $G/H \cap M$ e pertanto è nel centro di $G/H \cap M$. Ne segue che $H/H \cap M$ centralizza $N/H \cap M$. Pertanto, in base alla definizione di classe normale è $M \in \mathbf{F}$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. ZAPPA (1981) – *Una osservazione sulle classi di Fitting normali*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 70, 1–5.
- [2] G. ZAPPA – *On the normal classes of finite soluble groups* (in corso di stampa).