Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Francesco Lacava

Alcune proprietà delle algebre di Boole principali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **74** (1983), n.3, p. 131–135.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1983_8_74_3_131_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1983.

② RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 12 marzo 1983

Presiede il Presidente della Classe Giuseppe Montalenti

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Logica matematica. — *Alcune proprietà delle algebre di Boole principali.* Nota di Francesco Lacava, presentata (*) dal Socio G. Zappa.

Summary. — In this paper some properties of principal Boolean algebras are studied.

0. Introduzione

Le algebre di Boole principali sono state introdotte per la prima volta da Mangani–Marcja in [2] allo scopo di fornire una caratterizzazione algebrica del concetto di modello saturato. Infatti la proposizione 3.3 di [2] afferma che: $A \models T$, $|A| > \aleph_0$ è saturato se e solo se $B(A)$ è principale. Da qui l'interesse a studiare le proprietà di questa classe di algebre. Questa nota vuole essere un primo passo in questa direzione.

1. Definizione 1.1. Un'algebra di Boole atomica B si dice *principale* se e solo se per ogni sotto algebra B_1 di B tale che $|B_1| < |At(B)|$ e per ogni ultrafiltro F di B_1 esiste un ultrafiltro principale G in B tale che $F = G \cap B_1$.

Osservazione. Ogni algebra di Boole contabile è principale. Il concetto è quindi interessante per algebre di Boole di cardinalità più che numerabile.

Proposizione 1.1. *Un'algebra di Boole* B *atomica è principale se e solo se per ogni* $F \subseteq B$ $|F| < |At(B)|$ *avente la f.i.p. esiste un* $a \in B$ *tale che* $a \leq f$ *per ogni* $f \in F$.

Dimostrazione. – Ovvia.

Definizione 1.2. Sia B un'algebra di Boole atomica e sia $b \in B$. Indichiamo con $|b|$ la cardinalità dell'insieme $A_b = \{a \in At(B) : a \leq b\}$. B si dice *uniforme* se e solo se per ogni $b \in B$ tale che $|b|$ è infinito si ha che $|b| = |At(B)|$.

(*) Nella seduta del 12 marzo 1983.

PROPOSIZIONE 1.2. *Ogni algebra di Boole principale è uniforme.*

Dimostrazione. – Supponiamo non sia uniforme e sia x un elemento infinito con $|x| < |\mathrm{A}t(\mathrm{B})|$. Consideriamo l'insieme $\mathrm{X} = \{a' : a \in \mathrm{A}_x\} \cup \{x\}$. $|\mathrm{X}| < |\mathrm{A}t(\mathrm{B})|$ e X ha la f.i.p. Infatti se fosse $a_1' \cap \cdots \cap a_n' \cap x = 0$ allora $x \leq a_1 \cup \cdots \cup a_n$ il che è assurdo. Allora esiste per la principalità un $\bar{a} \in \mathrm{A}t(\mathrm{B})$ con $\bar{a} \leq x$ e $\bar{a} \leq a'$ per ogni $a \in \mathrm{A}_x$ e ciò è assurdo perchè se $\bar{a} \leq x$ allora $\bar{a} \in \mathrm{A}_x$.

PROPOSIZIONE 1.3. *Ogni algebra di Boole atomica saturata è principale.*

Dimostrazione. Sia F una famiglia $|\mathrm{F}| < |\mathrm{A}t(\mathrm{B})|$ avente la f.i.p. Allora esiste $a \in \mathrm{A}t(\mathrm{B})$ tale che $a \leq f$ per ogni $f \in \mathrm{F}$. Infatti l'insieme di formule che affermano che : 1) x è un atomo; 2) $x \leq f$ per ogni $f \in \mathrm{F}$, è soddisfacibile; dalla saturazione di B segue l'asserto.

Osservazione. i) Esistono algebre di Boole principali e non saturate. Ad esempio $\mathrm{Z_A}$ con $|\mathrm{A}| = \aleph_1$ è principale [2], ma chiaramente non saturata.

ii) Esistono algebre di Boole uniformi e non principali.

Esempio (S. Tulipani) $\omega \times \mathrm{Z_A}$ con $|\mathrm{A}| > \aleph_0$ [1] è uniforme, superatomica ma non principale.

Nel seguito per algebra di Boole intenderemo sempre algebra di Boole atomica e piccola (cioè $|\mathrm{B}| = |\mathrm{A}t(\mathrm{B})|$). Se $\{b_i\}_{i \in \mathrm{I}}$ è una famiglia di elementi di un'algebra di Boole $\mathrm{B} \hookrightarrow 2^{\mathrm{A}t(\mathrm{B})}$, con $\bigcap_{i \in \mathrm{I}} b_i$ e $\bigcup_{i \in \mathrm{I}} b_i$ indicheremo rispettivamente l'inf $\{b_i\}_{i \in \mathrm{I}}$ e il sup $\{b_i\}_{i \in \mathrm{I}}$ in $2^{\mathrm{A}t(\mathrm{B})}$. Indicheremo inoltre con $\mathrm{Z}_0 = \{x \in \mathrm{B} : x = \bigcup_{i=1}^{n} a_i$ per opportuni $a_i \in \mathrm{A}t(\mathrm{B})\}$ e con $\mathrm{Z}_0' = \{x \in \mathrm{B} : x' \in \mathrm{Z}_0\}$.

DEFINIZIONE 1.3. Sia $b \in \mathrm{B}$; diremo che b è *couniforme* se $|b| = |b'| = |\mathrm{A}t(\mathrm{B})|$.

PROPOSIZIONE 1.4. *Sia* B *un'algebra di Boole uniforme di cardinalità* $k > \aleph_0$. B *è principale se e solo se per ogni famiglia* $\mathrm{F} = \{b_i\}_{i \in \mathrm{I}}$ $|\mathrm{I}| < k$ *di elementi couniformi si ha uno dei seguenti casi*:

1) $|\bigcap_{i \in \mathrm{I}} b_i| = k$;

2) *esiste finito* $\mathrm{I}_0 \subseteq \mathrm{I}$ *tale che* $\bigcap_{i \in \mathrm{I}_0} b_i \in \mathrm{Z}_0$.

Dimostrazione. Sia $\mathrm{G} = \{c_i\}_{i \in \mathrm{I}}$ $|\mathrm{I}| < k$, $c_i \in \mathrm{B}$ una famiglia con la f.i.p. e supponiamo per assurdo $\bigcap_{i \in \mathrm{I}} c_i = 0$. Allora $c_i \notin \mathrm{Z}_0$ per ogni i. Siano $\{c_j\}_{j \in \mathrm{J} \subseteq \mathrm{I}}$ elementi di G tali che $c_j \in \mathrm{Z}_0'$. Allora $(\bigcap_{j \in \mathrm{J}} c_j) \cap (\bigcap_{i \in \mathrm{I}-\mathrm{J}} c_i) = 0$ cioè $(\bigcap_{j \in \mathrm{J}} c_j)' \geq \bigcap_{i \in \mathrm{I}-\mathrm{J}} c_i$. Ma $(\bigcap_{j \in \mathrm{J}} c_j)' = \bigcup_{j \in \mathrm{J}} c_j'$ quindi $|(\bigcap_{j \in \mathrm{J}} c_j)'| < k$ perciò non può verificarsi il caso 1). Deve allora esistere $\mathrm{I}_0 \subseteq \mathrm{I} - \mathrm{J}$ finito tale che $\bigcap_{i \in \mathrm{I}_0} c_i \in \mathrm{Z}_0$; ma allora G non ha la f.i.p. contro l'ipotesi.

Sia $F = \{b_i\}_{i<k}$ una famiglia di elementi couniformi. Se $\bigcap_{i<k} b_i = c \in Z_0$ allora consideriamo la famiglia $G = F \cup \{c'\}$. Allora G non ha la f.i.p. cioè $\bigcap_{s=1}^{m} b_{i_s} \cap c' = 0$ per opportuni b_{i_s}. Ma allora $c \geq \bigcap_{s=1}^{m} b_{i_s} \in Z_0$.

Se $\bigcap_{i<k} b_i \notin Z_0$ e $|\bigcap_{i<k} b_i| = \alpha < k$, allora, indicata con $\{a_j\}_{j<\alpha}$ la famiglia degli $a_j \in At(B)$ tali che $a_j < \bigcap_{i<k} b_i$, si ha che la famiglia $G = \{b_i \cap a_i'\}_{i<\alpha} \cup \cup \{b_i\}_{\alpha<i<k}$ ha la f.i.p. ma $\cap G = 0$ contro l'ipotesi.

PROPOSIZIONE 1.5. *Siano* B_1, B_2 *algebre di Boole uniformi tali che* $|B_1| = |B_2|$ *e* $|B_1/Z_0| = |B_2/Z_0| < \aleph_0$. *Allora* $B_1 \sim B_2$.

Dimostrazione. Possiamo considerare $B_1 \hookrightarrow 2^{At(B_1)}$ e posto $\bar{B} = B_1/Z_0$ sarà $\bar{B} \overset{j}{\hookrightarrow} 2^{At(B_1)}$. Possiamo supporre, senza perdere di generalità, che gli elementi di $\bar{B}$ siano, nella loro rappresentazione in $2^{At(B_1)}$, couniformi. Siano $\{a_i\}_{i<n}$ gli atomi di $\bar{B}$. Detta f l'applicazione canonica di B_1 su $\bar{B}$, possiamo trovare una famiglia $\{x_i\}_{i<n}$ di elementi di B_1 a due a due disgiunti tali che $f(x_i) = a_i$. Sia $\bar{f}_i$ una biiezione fra $\{a \in At(B_1) : a < x_i\}$ e $\{z \in At(2^{At(B_1)}) : z < j(f(x_i))$. Sia $\bar{f}$ la riunione di $\{\bar{f}_i\}_{i<n}$. $\bar{f}$ è quindi una biiezione fra $At(B_1)$ e $At(2^{At(B_1)})$. Per dimostrare la tesi è sufficiente dimostrare che $B_1 \sim j(\bar{B})(Z_0)$.

Identifichiamo per comodità di scrittura $\bar{B}$ con $j(\bar{B})$. La $\bar{f}$ può essere estesa in modo naturale a $Z_0 \cup Z_0'$. Sia $b \in B_1$, allora $f(b) = \bigvee_{s=1}^{m} a_{i_s}$ $a_{i_s} \in At(B)$, cioè $f(b) = f(\bigvee_{s=1}^{m} x_{i_s})$ vale a dire $b = ((\bigvee_{s=1}^{m} x_{i_s}) \wedge z_0') \vee z_1$ $z_0, z_2 \in Z_0$. Estendiamo allora $\bar{f}$ definendo: $\bar{f}(b) = ((\bigvee_{s=1}^{m} a_{i_s}) \wedge \bar{f}(z_0')) \vee \bar{f}(z_1)$. È facile verificare che tale definizione è indipendente dalla scelta di z_0, z_1. Inoltre se $a \in At(B_1)$ e $a < b$ allora $\bar{f}(a) < \bar{f}(b)$ e viceversa. Segue quindi che $\bar{f}$ è un isomorfismo fra B_1 e $\bar{B}(Z_0)$.

2. DEFINIZIONE 2.1. Sia T una teoria elementare. Si dice che T ha l'*n–eliminazione dei quantificatori* (Q.E.^{n}) se, per ogni formula ψ con al più n variabili libere, esiste una formula φ priva di quantificatori tale che $T \vdash \psi \leftrightarrow \varphi$.

PROPOSIZIONE 2.1. *Sono equivalenti i seguenti*:

1) $B_n(T)$ *è generata dalle formule atomiche con al più n variabili libere*;

2) *per ogni modello* A *di* T *e per ogni sottostruttura* C *di* A *n–generata* $T \cup D(C)$ *è completa*;

3) T *ha* Q.E.^{n}

Dimostrazione. 1)$\leftrightarrow$3) ovvia; 2)$\rightarrow$3) vedi [3]. 3)$\rightarrow$2) Sia $\varphi(c_1, \cdots, c_n)$ un enunciato di L_C. Per ipotesi esiste ψ priva di quantificatori tale che $T \vdash \varphi(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow \psi$ quindi $T \vdash \forall x_1, \cdots, x_n (\varphi(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow \psi)$. D'altra parte $T \cup D(C) \vdash \psi$ oppure $T \cup D(C) \vdash \neg\psi$ e quindi da $T \cup D(C)$ è deducibile $\varphi(x_1, \cdots, c_n)$ oppure $\neg\varphi(c_1, \cdots, c_n)$.

COROLLARIO 2.1. *Sia* M *una struttura.* B (M) *è generata dalle formule atomiche se e solo se* T*h* (M_M) *ha* Q.E.[1]

COROLLARIO 2.2. *Sia* M *una struttura con* B (M) *generata dalle formule atomiche. Allora* M (x) $\underset{M}{\sim}$ M (y) *se e solo se il tipo su* M *di* x *è uguale al tipo su* M *di* y.

3. Sia $\langle L = \{R\}_{i<\omega}\rangle$ un linguaggio con ω simboli di relazione binaria. Indichiamo con $R^\infty E_k^n$ la teoria generata dagli assiomi che affermano che:

1) ogni R_i è una relazione di equivalenza;
2) ogni R_i ha esattamente n classi di equivalenza;
3) ogni classe di equivalenza ha almeno k elementi.

Poniamo $R^\infty E_\infty^2 = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^\infty E_k^2$.

PROPOSIZIONE 3.1. *Sia* A $\in$ Mod ($R^\infty E_\infty^2$). B (A) *è generata dalle formule atomiche.*

Dimostrazione. Per il Corollario 2.1 basta dimostrare che $T' = Th(A_A) \cup \cup D(\langle c\rangle)$ è completa. Sia B $\in$ Mod (T′) e sia $\varphi(b_1, \cdots, b_n)$ una formula esistenziale a parametri in B. Operiamo adesso la seguente trasformazione di φ: ogni qualvolta appare la sottoformula $xR_n b_i$ la sostituiamo con $xR_n a_i$ con $a_i \in$ A tale che $a_i R_n b_i$. Chiaramente la φ' così ottenuta è equivalente alla φ. D'altra parte la φ' afferma: 1) che esistono $x_1, \cdots, x_n$ che soddisfano a certe relazioni con elementi di A; 2) che sono diversi da alcuni $b_i \in$ B. Ora se in A esistono esattamente m elementi che soddisfano alle relazioni descritte da 1) allora la φ' è soddisfatta nel caso che gli elementi b_i non siano gli m elementi di A. Se gli elementi che soddisfano 1) sono infiniti allora φ' è sempre soddisfatta. Quindi T′ è model-completa e, poichè ha modello primo, è completa.

Sia B un'algebra di Boole contabile e sia F un suo ultrafiltro. Sia $L_B = \{\{R_i\}_{i\in F-\{1\}}, \bar{a}\}$ ove R_i sono simboli di relazione binaria e $\bar{a}$ è un simbolo di costante. Sia $\overline{D(B)}$ il diagramma di B espresso solo con elementi di F. Sia T_B la teoria contenente:

1) gli assiomi di $R^\infty E_\infty^2$;
2) per ogni formula α di $\overline{D(B)}$ l'enunciato ottenuto come segue:
   i) se $i \in F - \{1\}$ al posto di i si sostituisce $xR_i \bar{a}$;
   ii) al posto di 1 si sostituisce $x = x$;
   iii) al posto di $=$ si sostituisce $\leftrightarrow$;
   iv) al posto di i' si sostituisce $xR_i \bar{a}$;
   v) si identificano le operazioni $\vee$, $\wedge$ con i relativi simboli connettivi;
   vi) si considera la chiusura universale della formula così ottenuta.

PROPOSIZIONE 3.2. T_B *è completa e superstabile.*

Dimostrazione. Sia $L_B \upharpoonright i = \{\{R_i\}_{i<n}, \bar{a}\}$ e sia $T_i = T_B \upharpoonright i$ la restrizione di T_B al linguaggio $L_B \upharpoonright i$. T_i è completa per ogni i. Infatti se $A', A \in \mathrm{Mod}(T_i)$ con un semplice argomento di back and forth si può vedere che $A \equiv A'$. Da ciò segue che T_B è completa. Per la proposizione 3.1 e per il corollario 2.2 è sufficiente determinare la cardinalità delle estensioni non isomorfe di ogni modello di T_B per poter dimostrare la superstabilità della nostra teoria. Se $M \in \mathrm{Mod}(T_B)$ è facile osservare che una estensione propria $M(x)$ di M è determinata a meno di isomorfismi dalle condizioni $\{xR_i \bar{a}\}_{i \in I \subseteq F-\{1\}}$ e $\{\neg xR_j \bar{a}\}_{j \in F-(I \cup \{1\})}$. Le estensioni sono quindi $2^{\aleph_0}$ da cui l'asserto.

TEOREMA 3.1. *Sia* B *un'algebra di Boole contabile. Per ogni* $k \geq 2^{\aleph_0}$ *esiste un'algebra di Boole principale* $\bar{B}$ *di cardinalità* k *tale che* $\bar{B}/Z_0 \sim B$.

Dimostrazione. Se M è un modello saturato di T_B di cardinalità k allora $(B(M)/Z_0) \sim B$ e per la proposizione 3.3 di [2] è principale e quindi la tesi.

COROLLARIO 3.1. *Sia* B *un'algebra di Boole uniforme con* $|B| = k \geq 2^{\aleph_0}$ *e* $|B/Z_0| = n < \aleph_0$. *Allora* B *è principale ed è univocamente determinata dalla coppia* (k, n).

Dimostrazione. Segue dalla proposizione 1.5 e dal teorema 3.1.

Ringrazio la prof. A. Marcja e il prof. P. Mangani per le interessanti discussioni e per i preziosi suggerimenti.

BIBLIOGRAFIA

[1] G.W. DAY (1967) – *Superatomic boolean algebras.* «Pac. J. of Math.», *23*, 479–489.
[2] P. MANGANI e A. MARCJA (1980) – *Shelah rank for Boolean algebras and some application to elementary theories I*, «Algebra Universalis», *10*, 247–257.
[3] G. SACKS (1972) – *Saturated model theory*, Benjamin.