
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

VINCENZO DE RIENZO, ANGELO MESSINA

**Alcune questioni sulla conduzione del calore in mezzi
compositi**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 73 (1982), n.5, p. 122–131.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1982_8_73_5_122_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Fisica matematica. — *Alcune questioni sulla conduzione del calore in mezzi compositi.* Nota di VINCENZO DE RIENZO (*) e ANGELO MESSINA (*), presentata (**) dal Corrisp. G. SESTINI.

SUMMARY. — The so-called diffraction problem for the heat equation is considered in a semi-infinite medium consisting of a sequence of different layers. Existence and uniqueness of the solution for the problem with no initial condition is proved and it is shown that periodic solutions are generated by periodic data on the boundary. A general method for calculating periodic solutions is discussed, taking into account possible thermal resistances between the layers.

1. INTRODUZIONE

La conduzione del calore in mezzi compositi è un argomento classico [1], [2], ma ancora attuale per la molteplicità delle sue applicazioni [3], [4], [5], [6]. Il problema della determinazione della temperatura in mezzi compositi sottoposti a condizioni al contorno periodiche è stato affrontato da vari autori (ad esempio [7], [8], [9]). Non sembra però che esista in letteratura una trattazione teorica dei seguenti aspetti: esistenza di soluzioni periodiche; convergenza di serie di soluzioni elementari dell'equazione del calore, mediante le quali sia possibile rappresentare soluzioni periodiche; stabilità delle soluzioni periodiche rispetto alle perturbazioni.

Questo studio viene condotto nel presente lavoro per un mezzo stratificato seminfinito. È interessante osservare che l'uso di soluzioni elementari del tipo « onde termiche spazialmente attenuate » consente di esprimere in maniera molto semplice l'evoluzione termica dovuta a una legge sinusoidale della temperatura superficiale. Così ad esempio le onde termiche trovate in [9] mediante un laborioso uso della trasformata di Laplace, si ottengono immediatamente applicando il metodo rapidamente descritto nel § 5. Tale metodo si presta anche nel caso di condizioni al contorno di tipo più generale o di contatto termico imperfetto fra i singoli strati e infine alla costruzione di serie del tipo di Fourier che risolvono il problema con generiche condizioni al contorno di tipo periodico.

Per semplificare la trattazione teorica dei §§ 2, 3, 4, ci limiteremo a considerare un sistema composto da due soli strati in ciascuno dei quali le proprietà termiche sono costanti, in assenza di sorgenti di calore e supponendo il contatto termico perfetto tra i due strati. Il passaggio al caso generale non presenta particolari difficoltà.

(*) Istituto di Matematica Applicata, Università di Bari, Fac. Ing. Via Re David 200, 70125 Bari.

(**) Nella seduta del 25 novembre 1982.

2. IL PROBLEMA DI CONDUZIONE SENZA CONDIZIONI INIZIALI

Data una funzione $\phi(t)$, $-\infty < t < +\infty$, continua a tratti e limitata, dette k_1, k_2 e $1/a_1^2, 1/a_2^2$ rispettivamente le conducibilità termiche e le diffusività dei singoli strati consideriamo il seguente problema che sarà richiamato nel seguito con simbolo P $(-\infty, +\infty)$:

$$(2.1) \quad u_{1xx} - a_1^2 u_{1t} = 0 \quad \text{in} \quad S_1 \equiv \{(x, t) : x \in (0, h), t \in (-\infty, +\infty)\},$$

$$(2.2) \quad u_{2xx} - a_2^2 u_{2t} = 0 \quad \text{in} \quad S_2 \equiv \{(x, t) : x \in (h, +\infty), t \in (-\infty, +\infty)\},$$

$$(2.3) \quad u_1(0, t) = \phi(t), \quad -\infty < t < +\infty,$$

$$(2.4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u_2(x, t) = 0, \quad -\infty < t < +\infty,$$

$$(2.5) \quad u_1(h, t) = u_2(h, t), \quad -\infty < t < +\infty,$$

$$(2.6) \quad k_1 u_{1x}(h, t) = k_2 u_{2x}(h, t), \quad -\infty < t < +\infty.$$

Definiamo soluzione del problema (2.1)–(2.6) una coppia di funzioni reali $\{u_1(x, t), u_2(x, t)\}$ tali che:

i) $u_1(x, t)$ sia in $C^{2,1}(S_1)$, soddisfi in S_1 l'equazione (2.1), sia continua fin sul contorno al più escluso un insieme di punti di misura nulla appartenenti ad $x=0$, nei quali sia verificata la condizione

$$\liminf \phi(t) \leq \liminf u_1(x, t) \leq \limsup u_1(x, t) \leq \limsup \phi(t);$$

nei punti di continuità di $\phi(t)$ sia soddisfatta la (2.3);

ii) esista continua per $-\infty < t < +\infty$ $u_{1x}(h, t) = \lim_{x \rightarrow h^-} u_{1x}(x, t)$;

iii) $u_2(x, t)$ sia in $C^{2,1}(S_2)$, soddisfi in S_2 l'equazione (2.2), sia continua su $x=h$ e verifichi la (2.4) uniformemente rispetto a t in intervalli limitati;

iv) esista continua per $-\infty < t < +\infty$ $u_{2x}(h, t) = \lim_{x \rightarrow h^+} u_{2x}(x, t)$;

v) u_1 e u_2 soddisfino le condizioni di raccordo (2.5), (2.6);

vi) u_1 e u_2 siano limitate per $t \leq T$, qualunque sia $T \in (-\infty, +\infty)$.

Osservazione 2.1. Nessuna sostanziale modifica va apportata nel seguito se nella (2.4) si sostituisce lo zero con una costante qualsiasi.

Nel § 4 dimostreremo il seguente teorema:

TEOREMA 2.1. *Se $\phi(t)$ è continua a tratti e limitata in ogni intervallo del tipo $(-\infty, T)$, il problema P $(-\infty, +\infty)$ ammette una ed una sola soluzione.*

Ne seguirà il

COROLLARIO 2.1. *Se inoltre $\phi(t)$ è periodica, con periodo P , la soluzione $\{u_1(x, t), u_2(x, t)\}$ del problema (2.1)–(2.6) è periodica con lo stesso periodo.*

Infatti la coppia $\{u_1(x, t + P), u_2(x, t + P)\}$ è ovviamente anche soluzione del problema (2.1)–(2.6) con $\phi(t)$ periodica di periodo P . Poichè la soluzione è unica, essa è periodica di periodo P .

Questi risultati sono noti per il caso di uno strato limitato omogeneo (v. ad esempio [10]), ma le tecniche di dimostrazione non si adattano con immediatezza al caso qui esaminato. Sarà necessario ottenere preliminarmente alcuni risultati sul problema ai valori iniziali e al contorno.

3. IL PROBLEMA DI CONDUZIONE CON I VALORI INIZIALI

Consideriamo il problema $P(0, T)$ relativo alle equazioni (2.1), (2.2) rispettivamente in $(0, h) \times (0, T]$ e in $(h, +\infty) \times (0, T]$, per qualche assegnato $T > 0$. Naturalmente occorre aggiungere le condizioni iniziali

$$(3.1) \quad u_1(x, 0) = f_1(x), \quad 0 < x < h \quad ; \quad u_2(x, 0) = f_2(x), \quad x > h$$

con f_1, f_2 continue a tratti e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 0$.

Costruiamo la soluzione di questo problema come limite della successione $\{u_1^{(n)}, u_2^{(n)}\}$ delle soluzioni dei problemi di diffrazione $P^{(n)}(0, T)$ nei rettangoli $(0, n) \times (0, T)$, per ogni intero $n > h$, che rispetto al precedente ha il dato aggiuntivo

$$(3.2) \quad u_2^{(n)}(n, t) = 0$$

e con la seguente modifica della condizione iniziale

$$(3.3) \quad u_2^{(n)}(x, 0) = f_2^{(n)}(x) = \begin{cases} f_2(x), & h < x \leq n-1, \\ (n-x)f_2(x-1), & n-1 \leq x \leq n. \end{cases}$$

Lo spazio funzionale nel quale pensiamo collocate le $\{u_1, u_2\}$, ovvero le $\{u_1^{(n)}, u_2^{(n)}\}$, è definito in modo simile alle (i)–(vi) del § 2 con ovvie modifiche. Per i problemi nei rettangoli $(0, n) \times (0, T)$ è noto un risultato di esistenza e unicità (cfr. [11], Teorema 13.1, p. 227).

Osservazione 3.1. Per i problemi $P^{(n)}(0, T)$ e $P(0, T)$ vale il *principio di massimo* (nella forma forte) e conseguentemente è garantito che $P(0, T)$ ha al più una soluzione. Ciò si dimostra mediante un classico argomento che fa intervenire sia il principio di massimo forte per gli ordinari problemi di conduzione, sia il teorema di Vyborny–Friedman [12]. In conseguenza di ciò vale per i suddetti problemi un teorema di *unicità*.

Passiamo ora a dimostrare il

LEMMA 3.1. *Dato $\varepsilon > 0$, esiste n_0 tale che per ogni $n > n_0$ ed $m > n$ risulta $|u_2^{(m)}(n, t)| < \varepsilon$.*

Detto $M = \max \{ \max |\phi(t)|, \max |f_1(x)|, \max |f_2(x)| \}$, per il principio di massimo (Osservazione 4.1) $|u_2^{(m)}(h, t)| \leq M$.

Consideriamo ora la funzione $\tilde{u}(x, t)$ soluzione del seguente problema:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \tilde{u}_{xx} - a_2^2 \tilde{u}_t &= 0 & , & \quad x > h, \quad 0 < t \leq T, \\ \tilde{u}(h, t) &= M & , & \quad 0 < t \leq T, \\ \tilde{u}(x, 0) &= |f_2(x)| & , & \quad x > h, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{u}(x, t) &= 0 & , & \quad 0 < t \leq T. \end{aligned}$$

Si trova

$$(3.5) \quad \tilde{u}(x, t) = M \operatorname{erfc} \frac{x-h}{2\sqrt{t/a_2}} + \int_h^\infty G(x-h, t; \xi, 0) |f_2(\xi)| d\xi,$$

con

$$\operatorname{erfc} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta,$$

$$G(x-h, t; \xi, 0) = \Gamma(x-h, t; \xi, 0) - \Gamma(h-x, t; \xi, 0)$$

dove Γ è la soluzione fondamentale dell'equazione (3.4).

Risulta

- i) $\tilde{u}(x, t) \geq |u_2^{(m)}(x, t)|$, $h \leq x \leq m$, $0 < t \leq T$;
- ii) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_0 tale che $\tilde{u}(n, t) < \varepsilon$ per $n > n_0$.

Infatti le funzioni $\tilde{u} \pm u_2^{(m)}$ verificano la (3.4) in $(h, m) \times (0, T)$ e sono non negative sul contorno parabolico, da cui segue i) per il principio di massimo.

Per dimostrare ii) osserviamo che in $(0, T)$ il primo termine al secondo membro della (3.5) è minore di $\varepsilon/2$ per x maggiore di un opportuno x_0 . Preso poi $R > 0$ in modo che $|f_2(x)| < \varepsilon/4$ per $x > R$, il secondo termine nella (3.5) è maggiorato dalla soluzione w del problema di Cauchy per la (3.4) avente per $t=0$ il dato $w(x, 0) = M$ per $-\infty < x < R$ e $w(x, 0) = \varepsilon/4$ per $x > R$, cioè da:

$$\frac{1}{2} \left\{ M \operatorname{erfc} \frac{x-R}{2\sqrt{t/a_2}} + \frac{1}{4} \varepsilon \left[\frac{x-R}{2\sqrt{t/a_2}} + 1 \right] \right\},$$

che risulta anch'esso minore di $\varepsilon/2$ per x sufficientemente grande e $t \in (0, T)$.

LEMMA 3.2. *Il problema di diffrazione $P(0, T)$ ammette per ogni $T > 0$ una ed una sola soluzione $\{u_1, u_2\}$ che è limite uniforme della successione $\{u_1^{(n)}, u_2^{(n)}\}$.*

Posto $v_1(x, t) = u_1^{(m)}(x, t) - u_1^{(n)}(x, t)$, $v_2(x, t) = u_2^{(m)}(x, t) - u_2^{(n)}(x, t)$, tali funzioni sono rispettivamente maggiorate in valore assoluto da w_1 e w_2 , che risolvono un problema del tipo $P^{(n)}(0, T)$, coi dati $w_1(0, T) = w_1(x, 0) = 0$ e

$$w_2(n, t) = |u_2^{(m)}(n, t) - u_2^{(n)}(n, t)| = |u_2^{(m)}(n, t)|, \quad 0 < t \leq T,$$

$$w_2(x, 0) = \begin{cases} 0 & , \quad h < x < n-1, \\ |u_2^{(m)}(x, 0) - u_2^{(n)}(x, 0)| < \varepsilon, & n-1 \leq x \leq n. \end{cases}$$

Tenendo conto del Lemma 3.1 si ha $w_2(n, t) < \varepsilon$ se $n > n_0$ e per il principio di massimo risulta infine:

$$|w_1(x, t)| \leq \varepsilon \quad \text{per } 0 < x < h, \quad 0 < t \leq T,$$

e

$$|w_2(x, t)| \leq \varepsilon \quad \text{per } h < x < n, \quad 0 < t \leq T, \quad n > n_0.$$

Segue l'uniforme convergenza delle successioni $u_1^{(n)}(x, t)$, $u_2^{(n)}(x, t)$. I rispettivi limiti $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ soddisfano il problema di diffrazione $P(0, T)$, come si verifica immediatamente sfruttando la uniforme hölderianità [11] delle derivate di $u_1^{(n)}(x, t)$, $u_2^{(n)}(x, t)$ in ogni rettangolo del tipo $[h - \delta, h + \delta] \times [\delta_1, T]$ con $\delta, \delta_1 > 0$, unitamente a noti risultati circa le famiglie di soluzioni di equazioni paraboliche [12].

LEMMA 3.3. *La soluzione del problema $P(0, T)$ con $\phi(t) = 0$ tende a zero per $t \rightarrow +\infty$ uniformemente rispetto ad x in intervalli limitati.*

Non si perde in generalità se a $f_1(x)$ si impone la condizione aggiuntiva $f_1(0) = 0$, $|f_1(x)| \leq Lx$ per qualche costante $L > 0$. Infatti, tenendo conto del fatto che $\phi = 0$, tale condizione è soddisfatta da $u_1(x, t_0)$ per ogni $t_0 > 0$, che può essere assunto come nuovo istante iniziale.

È ora semplice constatare che possono scegliersi due funzione $F_1(x) \in C^2[0, h]$, $F_2(x) \in C^2[h, +\infty)$ tali che:

$$F_1(x) \geq |f_1(x)|, \quad 0 < x < h; \quad F_2(x) \geq |f_2(x)|, \quad x > h,$$

e che

$$F_1'(x) > 0, \quad F_1''(x) < 0, \quad F_1(0) = 0;$$

$$F_2'(x) > 0, \quad F_2''(x) < 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F_2(x) < \infty, \quad F_2' \text{ e } F_2'' \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow +\infty,$$

$$k_1 F_1'(h^-) = k_2 F_2'(h^+), \quad \frac{1}{a_1^2} F_1''(h^-) = \frac{1}{a_2^2} F_2''(h^+).$$

Sia ora $\{w_1, w_2\}$ l'unica soluzione (Lemma 3.2) del problema di diffrazione $P(0, +\infty)$ coi dati

$$\begin{aligned} w_1(0, t) &= 0 \quad 0 < t \quad ; \quad w_1(x, 0) = \frac{1}{a_1^2} F_1''(x), \quad 0 < x < h, \\ w_2(x, 0) &= \frac{1}{a_2^2} F_2''(x), \quad x > h \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} w_2(x, t) = 0, \quad 0 < t. \end{aligned}$$

Applicando il principio di massimo si trova che $w_1(x, t)$ e $w_2(x, t)$ sono limitate e non positive. Definite le due funzioni:

$$\begin{aligned} U_1(x, t) &= F_1(x) + \int_0^t w_1(x, \tau) d\tau, \quad 0 < x < h, \quad 0 < t, \\ U_2(x, t) &= F_2(x) + \int_0^t w_2(x, \tau) d\tau, \quad x > h, \quad 0 < t, \end{aligned}$$

si verifica che esse soddisfano il problema di diffrazione con dati:

$$\begin{aligned} U_1(0, t) &= 0, \quad 0 < t \quad ; \quad U_1(x, 0) = F_1(x), \quad 0 < x < h, \\ U_2(x, 0) &= F_2(x), \quad x > h \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} U_2(x, t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_2(x). \end{aligned}$$

Poichè $U_{1t}(x, t) = w_1(x, t)$, $U_{2t}(x, t) = w_2(x, t)$, si ha $U_{1t}(h, t) = U_{2t}(h, t) \leq 0$, $0 < t$.

Le funzioni $U_1(h, t)$, $U_2(h, t)$ hanno quindi un limite $U_\infty \geq 0$ per $t \rightarrow +\infty$. È noto poi [12] che:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} U_1(x, t) &= \frac{U_\infty}{h} x, \quad 0 \leq x \leq h, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} U_2(x, t) &= U_\infty, \quad x \geq h, \end{aligned} \tag{3.6}$$

uniformemente rispetto ad x in intervalli limitati; poichè inoltre, come si è notato, le funzioni $U_{1xx} = w_1$, $U_{2xx} = w_2$ sono limitate, ne viene che tale convergenza uniforme si estende anche alle derivate U_{1x} , U_{2x} . Se quindi fosse $U_\infty > 0$, le (3.6) porterebbero una contraddizione alla condizione $k_1 U_{1x}(h, t) = = k_2 U_{2x}(h, t)$. Di conseguenza $U_\infty = 0$ e poichè $U_1(x, t) > |u_1(x, t)|$, $U_2(x, t) > |u_2(x, t)|$ la tesi è provata.

4. DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2.1

Supponiamo che $\{u_1, u_2\}$ e $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ siano due soluzioni di $P(-\infty, +\infty)$ con gli stessi dati. Le differenze $u_1 - \bar{u}_1$ e $u_2 - \bar{u}_2$ sono rispettivamente maggiorate in valore assoluto dalle funzioni V_1 e V_2 che risolvono il problema di diffrazione (2.1)–(2.6) col dato nullo, nella medesima classe funzionale.

Per la vi), per ogni fissato T , esiste $M \in \mathbf{R}^+$ tale che:

$$V_1(x, T) < M, \quad 0 < x < h \quad \text{e} \quad V_2(x, T) < M, \quad x > h.$$

Pertanto è possibile maggiorare V_1 e V_2 per $t > T$ con le funzioni $\bar{V}_1, \bar{V}_2$ che risolvono per $t > T$ un problema di diffrazione coi dati;

$$\bar{V}_1(0, T) = 0, \quad \bar{V}_1(x, T) = \bar{V}_2(x, T) = M, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{V}_2(x, t) = M.$$

Il Lemma 3.3 consente allora di affermare che comunque si fissi un punto $(x_0, t_0) \in [0, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$, facendo tendere T a $-\infty$ si ottiene $V_1(x_0, t_0) = V_2(x_0, t_0) = 0$, da cui l'unicità.

Per quanto riguarda l'esistenza della soluzione poniamo $\forall n \in \mathbf{N}$

$$f_n(x) = \phi(-n) \frac{h-x}{h}$$

e chiamiamo $\{u_1^{(n)}, u_2^{(n)}\}$ la soluzione (Lemma 3.2) di $P(-n, +\infty)$ coi dati

$$u_1^{(n)}(0, t) = \phi(t), \quad t > -n; \quad u_1^{(n)}(x, -n) = f_n(x), \quad 0 < x < h,$$

$$u_2^{(n)}(x, -n) = 0, \quad x > h; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u_2^{(n)}(x, t) = 0, \quad t > -n.$$

Dimostriamo che la successione $\{u_1^{(n)}(x, t), u_2^{(n)}(x, t)\}$ converge uniformemente a una coppia $\{u_1, u_2\}$ che è soluzione del problema $P(-\infty, +\infty)$.

Per $m > n$ le differenze $u_1^{(m)}(x, t) - u_1^{(n)}(x, t)$ e $u_2^{(m)}(x, t) - u_2^{(n)}(x, t)$ sono rispettivamente maggiorate in valore assoluto dalle funzioni $W_1(x, t)$, $W_2(x, t)$ che risolvono un problema dello stesso tipo coi dati

$$W_1(0, t) = 0, \quad t > -n; \quad W_1(x, -n) = M, \quad 0 < x < h,$$

$$W_2(x, -n) = 0, \quad x > h; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} W_2(x, t) = 0, \quad t > -n,$$

dove M rappresenta una maggiorazione di $|u^{(m)} - u^{(n)}|$ per $t < 0$, ricavabile a priori.

Per il Lemma 3.3, $\lim_{t \rightarrow +\infty} W_1(x, t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} W_2(x, t) = 0$ uniformemente rispetto ad x in ogni intervallo $[0, L]$ limitato.

Preso comunque t_0 si può quindi affermare che esiste n_0 tale che per ogni $n > n_0$ risulta

$$|W_1(x, t)| < \varepsilon, \quad |W_2(x, t)| < \varepsilon \quad \text{in} \quad [0, L] \times [t_0, +\infty).$$

Ciò implica che in ogni semistriscia di questo tipo $\{u_1^{(n)}, u_2^{(n)}\}$ converge uniformemente ad una coppia $\{u_1, u_2\}$. Per verificare che tale coppia è la soluzione del problema (2.1)-(2.6) si procede come nel Lemma 3.2.

Osservazione 4.1. Se $\phi(t)$ è limitata allora vale il principio di massimo $|u_i| \leq \sup |\phi|$, $i=1, 2$. Tale disuguaglianza è infatti verificata dalle funzioni $u_i^{(n)}$.

5. METODO DELLE ONDE TERMICHE ATTENUATE

Risolviamo ora il problema $P(-\infty, +\infty)$ assegnando come condizione al contorno sul piano $x=0$ anzichè la temperatura, la seguente combinazione lineare tra flusso e temperatura

$$(5.1) \quad \alpha u_1(0, t) + \beta u_{1x}(0, t) = \gamma \sin \omega t,$$

dove α, β, γ sono costanti reali assegnate ($\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$). Supposto, inoltre, il mezzo composto da n strati, il problema è così schematizzato

$$(5.2) \quad u_{jxx} - a_j^2 u_{jt} = 0 \quad , \quad x_{j-1} < x < x_j, \quad j=1, 2, \dots, n;$$

$$x_0 = 0 \quad , \quad x_n \rightarrow \infty \quad , \quad -\infty < t < +\infty,$$

$$(5.3) \quad \alpha u_1(0, t) + \beta u_{1x}(0, t) = \gamma \sin \omega t, \quad -\infty < t < +\infty,$$

$$(5.4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x, t) = 0 \quad , \quad -\infty < t < +\infty,$$

$$(5.5) \quad u_j(x_j, t) = u_{j+1}(x_j, t) \quad , \quad -\infty < t < +\infty,$$

$$(5.6) \quad k_j u_{jx}(x_j, t) = k_{j+1} u_{(j+1)x}(x_j, t) \quad , \quad -\infty < t < +\infty,$$

dove x_j ($j=1, 2, \dots, n-1$) rappresenta la j -esima superficie interna di separazione e k_j ed $1/a_j^2$ sono rispettivamente la conducibilità termica e la diffusività del j -mo strato.

Usiamo soluzioni elementari dell'equazione (5.2) del tipo

$$(5.7) \quad u_j(x, t) = (A_j e^{-s_j x} + B_j e^{s_j x}) e^{i\omega t}$$

dove A_j e B_j sono costanti complesse, i è l'unità immaginaria e $s_j = \nu_j(1+i)$, $\nu_j = a_j \sqrt{\omega/2}$, $j=1, 2, \dots, n$.

Imponendo le condizioni (5.5), (5.6) alle (5.7) si trovano per le costanti A_j, B_j le seguenti espressioni

$$A_j = \frac{1 + \mu_j}{2} e^{(s_j - s_{j+1})x_j} A_{j+1} + \frac{1 - \mu_j}{2} e^{(s_j + s_{j-1})x_j} B_{j+1},$$

$$B_j = \frac{1 - \mu_j}{2} e^{-(s_j + s_{j+1})x_j} A_{j+1} + \frac{1 + \mu_j}{2} e^{-(s_j - s_{j+1})x_j} B_{j+1},$$

$$\text{con } \mu_j = k_{j+1} s_{j+1} / k_j s_j, \quad j=1, 2, \dots, n-1.$$

Per la (5.4) $B_n = 0$ ed è possibile esprimere facilmente in funzione di A_n tutte le altre costanti; infine la condizione (5.3) permette il calcolo di A_n .

Nel caso di contatto termico non perfetto la (5.5) viene sostituita dalla

$$k_j u_{jx}(x_j, t) = \rho_j [u_j(x_j, t) - u_{j+1}(x_j, t)], \quad (j = 1, 2, \dots, n-1)$$

con ρ_j costanti e le espressioni di A_j e B_j diventano:

$$\begin{aligned} A_j &= \frac{\rho_j k_j s_j + (\rho_j - k_j s_j) k_{j+1} s_{j+1}}{2 \rho_j k_j s_j} e^{(s_j - s_{j+1}) x_j} A_{j+1} + \\ &+ \frac{\rho_j k_j s_j - (\rho_j - k_j s_j) k_{j+1} s_{j+1}}{2 \rho_j k_j s_j} e^{(s_j + s_{j+1}) x_j} B_{j+1}, \\ B_j &= \frac{\rho_j k_j s_j - (\rho_j + k_j s_j) k_{j+1} s_{j+1}}{2 \rho_j k_j s_j} e^{-(s_j + s_{j+1}) x_j} A_{j+1} + \\ &+ \frac{\rho_j k_j s_j + (\rho_j + k_j s_j) k_{j+1} s_{j+1}}{2 \rho_j k_j s_j} e^{-(s_j - s_{j+1}) x_j} B_{j+1}, \\ & \qquad \qquad \qquad j = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

6. CALCOLO DELLE SOLUZIONI PERIODICHE

Il metodo esposto si estende al caso di condizioni al contorno del tipo

$$\alpha u_1(0, t) + \beta u_{1x}(0, t) = \phi(t)$$

con $\phi(t)$ periodica.

TEOREMA 6.1. *Sia $\phi(t)$ periodica e tale che la sua serie di Fourier converga uniformemente e sia ϕ_N la somma parziale N-esima di tale serie. Allora la successione $\{u_1^N, u_2^N\}$ delle soluzioni di P $(-\infty, +\infty)$ col dato $u_1^N(0, t) = \phi_N(t)$ converge uniformemente alla soluzione $\{u_1, u_2\}$.*

Limitandosi per semplicità al caso $\beta = 0$, la dimostrazione è una immediata conseguenza del principio di massimo di cui all'Osservazione 4.1.

BIBLIOGRAFIA

- [1] H. S. CARSLAW e J. C. JAEGER (1969) - *Conduction of Heat in Solids*. Oxford University Press, London; 2nd Ed.
- [2] J. CRANK (1957) - *The Mathematics of Diffusion*, Oxford, New York and London.
- [3] C. W. TITTLE (1965) - *Boundary Value Problems in Composite Media: Quasi-Orthogonal Functions*, « Journal of Applied Physics. », Voll. 36, 4, 1486-1488.
- [4] J. PADOVAN (1974) - *Generalized Sturm-Liouville Procedure for Composite Domain Anisotropic Transient Conduction Problems*. « AIAA Journal », Vol. 12, NO 8, August 1158-1160.

- [5] J. GOSSE (1978) – *Sur la conduction thermique variable dans un mur composite à propriétés constantes*. « C. R. Acad. Sc. Paris », t. 286, Serie B, 303–306.
- [6] P. DUHAMEL e J. GOSSE (1980) – *Analyse Thermique d'un Mur Composite soumis sur une face a une variation en creneaux de la Temperature*. Heat Mass Transfer, Vol. 23, 1663–1671.
- [7] VÁCLAV VODIČKA (1956) – *Geschichteter Kreiszyylinder in Felde periodischer Temperaturschwankungen*. « Z. A. M. P. », 7, 422–427.
- [8] E. W. DEEG (1962) – *A General Method for Calculating Temperature or Concentration in Laminated Systems*. « Ann. der Physik », VII F 10, 74–85.
- [9] D. S. PARASNIS (1976) – *Effect of a Uniform Overburden on the Passage of a Thermal Wave and the Temperatures in the Underlying Rock*. « Geophys. J. R. astr. Soc. », 46, 189–192.
- [10] J. R. CANNON – *Some heat conduction problems*. In pubblicazione.
- [11] O. A. LADYZENSKAJA, V. A. SOLONNIKOV e N. N. URAL'CEVA – *Linear and quasi-linear Equations of Parabolic Type*. Translations of Mathematical Monographs.
- [12] A. FRIEDMAN (1964) – *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. Prentice — Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J.