Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Massimo Lorenzani

Una proprietà di $P^{n-}Y$

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **73** (1982), n.5, p. 116–121.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1982_8_73_5_116_0>

Geometria algebrica. — *Una proprietà di* $P^n - Y$. Nota di MASSIMO LORENZANI, presentata (*) dal Socio E. MARTINELLI.

SUMMARY. — Let Y be an s dimensional closed subscheme of P^n and $p(P^n - Y)$ the largest integer p such that $H^i(P^n - Y, L)$ is finite dimensional for all $i < p$ and for all locally free sheaves L on $P^n - Y$. If we introduce the same integer $p(P^n - Y^a)$ in the complex case, i.e. when L runs through the set of all locally free analytic sheaves on $P^n - Y^a$, we show that $p(P^n - Y^a) = n - s - 1$ if $p(P^n - Y) = n - s - 1$.

INTRODUZIONE

Sia U uno schema di tipo finito su di un campo k algebricamente chiuso. Indicheremo con $p(U)$ il più grande intero p tale che $\dim_k H^i(U, L) < +\infty$ per ogni $i < p$ e per ogni fascio localmente libero L su U ([5], p. 91). Di particolare interesse è determinare il valore di $p(U)$ quando U è un aperto di uno schema proprio non singolare X; ossia, $U = X - Y$, con Y chiuso di X. In tal caso, se $\dim X = n$ e $\dim Y = s$, si ha sempre $p(U) \geq n - s - 1$ ([5], Cor. 3.8, p. 101). D'altro canto, è semplice mostrare che esistono aperti U per i quali $p(U)$ risulta strettamente maggiore di $n - s - 1$. In altre parole, le sole dimensioni di X ed Y non determinano, in generale, il valore di $p(U)$. Se ci restringiamo però al caso in cui $X = P^n_k$, il problema si presenta sotto una luce diversa. R. Hartshorne ha dimostrato infatti che, se Y è un chiuso non singolare di P^n_k, allora $p(P^n_k - Y) = n - s - 1$ ([5], Theorema 5.2, p. 109). Basandosi su tale risultato, formulò la congettura seguente: per ogni chiuso Y di P^n_k di dimensione s si ha $p(P^n_k - Y) = n - s - 1$ ([5], Prob. 5.3, p. 109).

Attualmente, utilizzando altri risultati sulla coomologia di $P^n_k - Y$, è possibile stabilire l'uguaglianza $p(P^n_k - Y) = n - s - 1$ qualora Y sia localmente intersezione completa o, più generalmente, intersezione completa formale ([9], in car. 0; [7], in car. > 0).

Se introduciamo ora lo stesso intero nel caso analitico, precisamente il più grande intero p (che in questo caso indicheremo con $p(P^n_C - Y^a)$) tale che $\dim_C H^i(P^n_C - Y^a, L) < +\infty$ per ogni $i < p$ e per ogni fascio analitico L localmente libero su $P^n_C - Y^a$, possiamo chiederci quale sia la relazione tra i due interi. Scopo di questo lavoro è appunto quello di mostrare che, se è vera la congettura di Hartshorne, allora anche $p(P^n_C - Y^a) = n - s - 1$. È da rilevare però che tale risultato non include il caso in cui Y sia un chiuso singolare di dimensione $n - 2$. Questa difficoltà nasce dal fatto che, in generale, non è possibile stabilire, se $s = n - 2$, la disuguaglianza $p(P^n_C - Y^a) \geq 1$ deducendola

(*) Nella seduta del 25 novembre 1982.

da quella algebrica (cfr. Oss. 2). Per includere anche questo caso, si potrebbe cercare di ottenere per via analitica la disuguaglianza $p(P^n_C - Y^a) \geq n - s - 1$ dimostrando, ad esempio, che l'aperto $P^n_C - Y^a$ è strettamente $(s+1)$-pseudoconcavo ([5], p. 213). Un tale approccio comunque presenterebbe non poche difficoltà, di fatto tale proprietà è nota solo nel caso in cui Y^a è un chiuso non singolare.

Nella prima parte di questo lavoro saranno svolte alcune considerazioni sulla congettura di Hartshorne dalle quali è possibile dedurre che questa è vera per ogni chiuso di dimensione $n-1$. Nella seconda parte, si dimostrerà il risultato indicato in precedenza.

1. In questa sezione mostreremo che $p(P^n_k - Y) = n - s - 1$ per ogni chiuso Y di dimensione s qualora la stessa relazione sussista per i chiusi di dimensione pura.

Sia Y un chiuso di P^n_k. In virtù del Teorema 3.4 di [5], p. 96, il valore dell'intero $p(P^n_k - Y)$ è completamente determinato dalla classe dei fasci localmente liberi su P^n_k. Pertanto, se vogliamo mostrare che $p(P^n_k - Y) = n - s - 1$, dobbiamo ricercare un fascio localmente libero L su P^n_k tale che $\dim_k H^{n-s-1}(P^n_k - Y, L) = +\infty$. Tenendo conto della successione esatta di coomologia locale

$$\to H^i(P^n_k, L) \to H^i(P^n_k - Y, L) \to H^{i+1}_Y(P^n_k, L) \to H^{i+1}(P^n_k, L) \to$$

ciò equivale a dimostrare che $\dim_k H^{n-s}_Y(P^n_k, L) = +\infty$.

Sia $\{x_i\}$ il punto generico di una componente irriducibile di Y. Allora, $\operatorname{depth} L_{x_i} \geq n - s$ in quanto abbiamo la relazione

$$\operatorname{depth} L_{x_i} + \operatorname{proj\,dim} L_{x_i} = \dim O_{P^n_k, x_i},$$

ove $\dim O_{P^n_k, x_i} \geq n - s$ e $\operatorname{proj\,dim} L_{x_i} = 0$ poiché L_{x_i} è un modulo libero. Pertanto,

$$\operatorname{depth}_Y(L) = \inf_{x \in Y} \operatorname{depth} L_{x_i} \geq n - s .$$

Indichiamo ora con Y' l'unione di tutte le componenti irriducibili di Y aventi dimensione s, e siano $I_{Y'}$ e I_Y i fasci di ideali che definiscono Y' ed Y rispettivamente. Dalla successione esatta

$$0 \to I^m_{Y'}/I^m_Y \to O_{P^n_k}/I^m_Y \to O_{P^n_k}/I^m_{Y'} \to 0$$

otteniamo una successione esatta di fasci

$$0 \to \mathcal{E}xt^{n-s}_{O_{P^n_k}}(O_{P^n_k}/I^m_{Y'}, L) \to \mathcal{E}xt^{n-s}_{O_{P^n_k}}(O_{P^n_k}/I^m_Y, L) \to$$

(ricordiamo che $\mathcal{E}xt^i_{O_{P^n_k}}(G, L) = 0$ per ogni $i < n - s$ e per ogni fascio coerente

G su P^n_k tale che Supp (G) $\subseteq$ Y, [3], Prop. 3.7). Dal momento che i fasci di coomologia locale $H^i_Y(L)$ sono isomorfi, per ogni $i \geq 0$, a $\lim\limits_{\rightarrow} \mathit{Ext}^i_{O_{P^n_k}}(O_{P^n_k}/I^m_Y, L)$; e poiché il limite diretto è esatto, otteniamo la successione esatta di fasci

$$0 \to \mathcal{H}^{n-s}_{Y'}(L) \to \mathcal{H}^{n-s}_{Y}(L).$$

Inoltre, $\operatorname{depth}_Y(L) \geq \operatorname{depth}_{Y'}(L) = n - s$; pertanto, $\mathcal{H}^i_Y(L) = \mathcal{H}^i_{Y'}(L) = 0$ per ogni $i < n - s$ ([3], Theor. 3.8). La successione spettrale di coolmologia locale

$$H^p(P^n_k, \mathcal{H}^q_Y(L)) \Rightarrow H^{p+q}_Y(P^n_k, L)$$

ci assicura allora che $H^0(P^n_k, \mathcal{H}^{n-s}_{Y'}(L)) = H^{n-s}_{Y'}(P^n_k, L)$ e $H^0(P^n_k, \mathcal{H}^{n-s}_Y(L)) = H^{n-s}_Y(P^n_k, L)$. Di conseguenza, $H^{n-s}_{Y'}(P^n_k, L)$ è un sottospazio del gruppo di coomologia locale $H^{n-s}_Y(P^n_k, L)$ in virtù della successione esatta di cui sopra. In conclusione, se la congettura di Hartshorne è vera per i chiusi Y di P^n_k di dimensione pura s, è vera per ogni chiuso di P^n_k.

Come applicazione otteniamo il seguente risultato: *Se* Y *è un chiuso di* P^n_k *di dimensione* $n - 1$, *allora* $p(P^n_k - Y) = 0$.

Infatti, l'unione Y' di tutte le componenti irriducibili di dimensione $n - 1$ di Y è una ipersuperficie di P^n_k, per cui $P^n_k - Y'$ è affine. Allora, prendendo $L = O_{P^n_k}$, $H^0(P^n_k - Y', L)$ è uno spazio vettoriale di dimensione infinita. Quanto sopra ci assicura allora che $H^0(P^n_k - Y, L)$ è anch'esso uno spazio di dimensione infinita; in altre parole, $p(P^n_k - Y) = 0$.

Osservazione 1. Se Y_1 e Y_2 sono due chiusi di P^n_k, abbiamo la successione di Mayer–Vietoris ([6], p. 212) per la coomologia locale

$$\to H^i_{Y_1 \cap Y_2}(P^n_k, L) \to H^i_{Y_1}(P^n_k, L) \oplus H^i_{Y_2}(P^n_k, L) \to H^i_{Y_1 \cup Y_2}(P^n_k, L) \to$$
$$\to H^{i+1}_{Y_1 \cap Y_2}(P^n_k, L) \to .$$

Ora, se Y è un chiuso di P^n_k di dimensione pura ed Y_i le sue componenti irriducibili, procedendo per induzione sul numero delle Y_i per mezzo della successione esatta di cui sopra, la congettura di Hartshorne si può ridurre al caso in cui Y sia un chiuso irriducibile.

2. Sia X uno schema localmente noetheriano su C. Allora, indicheremo con X^a lo spazio analitico associato ad X, e con F^a il fascio analitico associato ad un fascio algebrico F su X ([4], Exp. XII). In [5], p. 222 abbiamo il seguente teorema di confronto tra la coomologia algebrica e quella analitica per un aperto di P^n_C:

TEOREMA 1. *Sia* Y *un chiuso di* P^n_C *di dimensione* s. *Allora, per ogni fascio localmente libero* L *su* $P^n_C - Y$:

(i) *i morfismi canonici* $H^i(P^n_C - Y, L) \to H^i(P^n_C - Y^a, L^a)$ *sono isomorfismi per ogni* $i < n - s - 1$.

(ii) *Se* $s \leq n-2$, *il funtore* $L \to L^a$ *è fedele sulla categoria dei fasci localmente liberi su* $P^n_C - Y$.

(iii) *Se* $s \leq n-3$, *il funtore* $L \to L^a$ *è un'equivalenza di categorie tra i fasci algebrici localmente liberi su* $P^n_C - Y$ *e quelli analitici localmente liberi su* $P^n_C - Y^a$.

Allo scopo di determinare il valore dell'intero $p(P^n_C - Y^a)$ a partire dalla situazione algebrica, risulterà di particolare importanza il risultato seguente.

PROPOSIZIONE 1. *Siano* X *uno schema localmente noetheriano su* C *di dimensione pura* n, *ed* Y *un sottoschema chiuso di* Y *di dimensione* s. *Se* L *è un fascio localmente libero su* $X - Y$, *allora i morfismi canonici*

$$\Theta_i : H^i_Y(L)^a \to H^i_{Y^a}(L^a)$$

tra i fasci di coomologia locale sono isomorfismi per ogni $i \leq n-s-1$, *mentre* Θ_{n-s} *è iniettivo.*

Dimostrazione. La prima parte della proposizione è un caso particolare del Theor. 1 di [8], dove viene anche mostrato che i fasci di coomologia locale $H^i_Y(L)$ e $H^i_{Y^a}(L^a)$ sono coerenti per ogni $i \leq n-s-1$. Pertanto, dobbiamo solamente dimostrare che il morfismo Θ_{n-s} è iniettivo.

Sia I il fascio di ideali che definisce Y. Sappiamo che i fasci $H^i_Y(L)$ sono isomorfi al $\varinjlim Ext^i_{O_{X,x}}(O_X/I^m, L)$, per ogni $i \geq 0$; quindi, per ogni $x \in X$, si ha $H^i_Y(L)_x = \varinjlim Ext^i_{O_{X,x}}(O_X/I^m_x, L_x)$. Ora, se x è un punto chiuso di X (ricordiamo che da un punto di vista insiemistico X^a può essere identificato con i punti chiusi di X), abbiamo anche

$$H^i_Y(L)^a_x = H^i_Y(L)_x \underset{O_{X,x}}{\otimes} O_{X^a,x} = \varinjlim Ext^i_{O_{X^a,x}}(O_{X^a,x}/(I^a_x)^m, L^a_x)\,.$$

Consideriamo ora il fascio analitico di coomologia locale $H^i_{Y^a}(L^a)$. Esiste la seguente successione spettrale ([10], p. 74):

$$\varinjlim Ext^p_{O_{X^a}}(O_{X^a}/(I^a)^m, H^q_{Y^a}(L^a)) \Rightarrow \varinjlim Ext^{p+q}_{O_{X^a}}(O_{X^a}/(I^a)^m, L^a)\,,$$

la quale vale anche per le fibre. Dal momento che i fasci $H^i_{Y^a}(L^a)$ sono coerenti per ogni $i \leq n-s-1$, le fibre $H^i_{Y^a}(L^a)_x$ sono $O_{X^a,x}$ moduli di tipo finito per gli stessi valori di i, ed il cui supporto è contenuto nel chiuso $V(I^a_x)$ di $\mathrm{Spec}(O_{X^a,x})$. Da ciò segue che

$$\varinjlim Ext^p_{O_{X^a,x}}(O_{X^a,x}/(I^a_x)^m, H^q_{Y^a}(L^a)_x) = 0\,,$$

per ogni $p \geq 1$, $0 \leq q \leq n-s-1$, in quanto il primo membro non è altro che la coomologia a supporto in $V(I^a_x)$ di un modulo il cui supporto è contenuto nel precedente. Di conseguenza,

$$\varinjlim Hom_{O_{X^a,x}}(O_{X^a,x}/(I^a_x)^m, H^i_{Y^a}(L^a)_x) = \varinjlim Ext^i_{O_{X^a,x}}(O_{X^a,x}/(I^a_x)^m, L^a_x)\,,$$

per ogni $i \leq n - s$. Ma per $i = n - s$ il secondo membro della precedente uguaglianza è proprio la fibra $H_{\mathrm{Y}}^{n-s}(\mathrm{L})_x^a$ del fascio $H_{\mathrm{Y}}^{n-s}(\mathrm{L})^a$. D'altro canto, $Hom_{\mathrm{O}_{\mathrm{X}^a,x}}(\mathrm{O}_{\mathrm{X}^a,x}/(\mathrm{I}_x^a)^m, H_{\mathrm{Y}^a}^{n-s}(\mathrm{L}^a)_x)$ è un sottomodulo della fibra $H_{\mathrm{Y}^a}^{n-a}(\mathrm{L}^a)_x$; precisamente il sottomodulo annullato dall'ideale $(\mathrm{I}_x^a)^m$. In conclusione, $H_{\mathrm{Y}}^{n-s}(\mathrm{L})_x^a$ è un sottomodulo di $H_{\mathrm{Y}^a}^{n-s}(\mathrm{L}^a)_x$ per ogni $x \in \mathrm{X}^a$; in altre parole, Θ_{n-s} è un morfismo iniettivo.

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente

TEOREMA 2. *Sia* Y *un sottoschema chiuso di* $\mathrm{P}_{\mathrm{C}}^n$ *di dimensione* s. *Allora, se* $p(\mathrm{P}_{\mathrm{C}}^n - \mathrm{Y}) = n - s - 1$, *anche* $p(\mathrm{P}_{\mathrm{C}}^n - \mathrm{Y}^a) = n - s - 1$ *purché* $s \neq n - 2$.

Dimostrazione. Consideriamo in primo luogo il caso $s \leq n - 3$. Allora, per il Teorema 1, ogni fascio analitico localmente libero su $\mathrm{P}_{\mathrm{C}}^n - \mathrm{Y}^a$ è algebrico; inoltre, la coomologia algebrica è isomorfa a quella analitica per ogni $i < n - s - 1$.

Supponiamo ora che $p(\mathrm{P}_{\mathrm{C}}^n - \mathrm{Y}) = n - s - 1$. Esiste quindi un fascio localmente libero L su $\mathrm{P}_{\mathrm{C}}^n$ (cfr. 1.) tale che $\dim_{\mathrm{C}} \mathrm{H}_{\mathrm{Y}}^{n-s}(\mathrm{P}_{\mathrm{C}}^n, \mathrm{L}) = +\infty$. Dal momento che $\mathrm{depth}_{\mathrm{Y}^a}(\mathrm{L}^a) = \mathrm{depth}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{L}) = n - 1$, ne segue che $H_{\mathrm{Y}}^i(\mathrm{L}) = H_{\mathrm{Y}}^i(\mathrm{L})^a = H_{\mathrm{Y}^a}^i(\mathrm{L}^a) = 0$, per ogni $i \leq n - s - 1$. Per quanto riguarda invece i fasci di coomologia locale di esponente $n - s$ abbiamo, in virtù della Prop. 1, la successione esatta

$$0 \to H_{\mathrm{Y}}^i(\mathrm{L})^a \to H_{\mathrm{Y}^a}^i(\mathrm{L}^a) \to$$

Per cui, passando alle sezioni globali, otteniamo la successione

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} 0 \to \mathrm{H}^0(\mathrm{P}_{\mathrm{C}}^n, H_{\mathrm{Y}}^{n-s}(\mathrm{L})^a) \to & \mathrm{H}^0(\mathrm{P}_{\mathrm{C}}^n, H_{\mathrm{Y}^a}^{n-s}(\mathrm{L}^a)) & \to \\ & \| \wr & \\ & \mathrm{H}_{\mathrm{Y}^a}^{n-s}(\mathrm{P}_{\mathrm{C}}^n, \mathrm{L}^a) & \end{array}$$

(l'isomorfismo verticale è l'analogo analitico di quello stabilito nella sezione precedente). Mostriamo ora che $\mathrm{H}^0(\mathrm{P}_{\mathrm{C}}^n, H_{\mathrm{Y}}^{n-s}(\mathrm{L})^a) = \mathrm{H}^0(\mathrm{P}_{\mathrm{C}}^n, H_{\mathrm{Y}}^{n-s}(\mathrm{L}))$. Al riguardo, basta tener conto dei seguenti fatti:

a) $$H_{\mathrm{Y}}^{n-s}(\mathrm{L}) = \varinjlim Ext_{\mathrm{O}_{\mathrm{P}_{\mathrm{C}}^n}}^{n-s}(\mathrm{O}_{\mathrm{P}_{\mathrm{C}}^n}/\mathrm{I}^m, \mathrm{L});$$

$$H_{\mathrm{Y}}^{n-s}(\mathrm{L})^a = \varinjlim Ext_{\mathrm{O}_{\mathrm{P}_{\mathrm{C}}^n}}^{n-s}(\mathrm{O}_{\mathrm{P}_{\mathrm{C}}^n}/\mathrm{I}^m, \mathrm{L})^a$$

b) sia la coomologia algebrica che quella analitica commutano, su $\mathrm{P}_{\mathrm{C}}^n$, con il limite induttivo,

c) $\mathrm{H}^0(\mathrm{P}_{\mathrm{C}}^n, Ext_{\mathrm{O}_{\mathrm{P}_{\mathrm{C}}^n}}^{n-s}(\mathrm{O}_{\mathrm{P}_{\mathrm{C}}^n}/\mathrm{I}^m, \mathrm{L})) = \mathrm{H}^0(\mathrm{P}_{\mathrm{C}}^n, Ext_{\mathrm{O}_{\mathrm{P}_{\mathrm{C}}^n}}^{n-s}(\mathrm{O}_{\mathrm{P}_{\mathrm{C}}^n}/\mathrm{I}^m, \mathrm{L})^a)$ per il teorema di confronto di Serre ([4], Exp. XII).

Allora, $\mathrm{H}_{\mathrm{Y}}^{n-s}(\mathrm{P}_{\mathrm{C}}^n, \mathrm{L}) = \mathrm{H}^0(\mathrm{P}_{\mathrm{C}}^n, H_{\mathrm{Y}}^{n-s}(\mathrm{L})) = \mathrm{H}^0(\mathrm{P}_{\mathrm{C}}^n, H_{\mathrm{Y}}^{n-s}(\mathrm{L})^a)$ è un sottospazio di $\mathrm{H}_{\mathrm{Y}^a}^{n-s}(\mathrm{P}_{\mathrm{C}}^n, \mathrm{L}^a)$ in virtù della successione esatta (*). Quindi, se

$\dim_C H^{n-s}_{Y^a}(P^n_C, L^a) = +\infty$, anche $H^{n-s}_{Y^a}(P^n_C, L^a)$ ha dimensione infinita. La successione esatta di coomologia locale nel caso analitico (cfr. 1. per l'analogo algebrico) ci assicura che $\dim_C H^{n-s-1}(P^n_C - Y^a, L^a) = +\infty$; ossia, $p(P^n_C - Y^a) = n - s - 1$.

Se $s = n - 1$, è ovvio che $p(P^n_C - Y^a) \geq 0$. D'altro canto, sappiamo che $p(P^n_C - Y) = 0$ (cfr. 1.); quindi, con la stessa argomentazione di cui sopra, concludiamo che $p(P^n_C - Y^a)$ vale sempre zero.

Osservazione 2. Per quanto riguarda il caso $s = n - 2$ la dimostrazione precedente ci permette di affermare che $p(P^n_C - Y^a) \leq 1$ se $p(P^n_C - Y) = 1$. Ora, però, non sappiamo se per ogni chiuso Y di P^n_C di dimensione $n - 2$ vale la disuguaglianza $p(P^n_C - Y^a) \geq 1$. Infatti, potrebbero esistere un chiuso Y ed un fascio analitico localmente libero su $P^n_C - Y^a$ che non ammette un'estensione coerente su P^n_C e tale che le sue sezioni globali siano uno spazio di dimensione infinita (si osservi come le condizioni espresse dal cor. VII. 4 di [2], che assicurano l'esistenza di un'estensione coerente di un fascio analitico, non coprano il caso in cui $s = n - 2$). In altre parole, non si può escludere che esista un chiuso Y tale che $p(P^n_C - Y^a) = 0$ quand'anche sia $p(P^n_C - Y) = 1$.

D'altro canto, se Y è non singolare, Barth ha mostrato in [1] che $P^n_C - Y^a$ è strettamente $(s + 1)$ pseudoconcavo, e ciò implica, per $s = n - 2$, che $p(P^n_C - Y^a) \geq 1$. Quindi, dal Teorema 2 possiamo dedurre che $p(P^n_C - Y^a) = 1$ se Y è non singolare. In conclusione, il problema rimane aperto solo per chiusi Y singolari di dimensione $n - 2$.

BIBLIOGRAFIA

[1] W. BARTH (1970) – *Der Abstand von einer algebraischen Mannigfaltigkeit im komplex-projectiven Raum*. «Math. Ann.», *187*, 150–162.

[2] J. FRISH e J. GUENOT (1969) – *Prolongement de faisceaux analytiques coherents*, «Inv. Math.», *7*, 321–343.

[3] A. GROTHENDIECK (1967) – *Local Cohomology*, «Lectures Notes Math.», *41*, Springer-Verlag.

[4] A. GROTHENDIECK (1971) – *Revêtements Etales et Groupe Fondamental*, «Lecture Notes Math.», *224*, Springer-Verlag.

[5] R. HARTSHORNE (1970) – *Ample Subvarieties of Algebraic Varieties*, «Lecture Notes Math.», *156*, Springer-Verlag.

[6] R. HARTSHORNE (1977) – *Algebraic Geometry*, «Graduate Text Math.», *57*, Spinger-Verlag.

[7] R. HARTSHORNE e R. S. SPEISER (1977) – *Local Cohomological dimension in characteristic* p, «Ann. Math.», *105*, 45–79.

[8] M. LORENZANI e A. MASCHIETTI (1976) – *Quelques remarques sur la cohérence des faisceaux de cohomologie locale*, «C. R. Acad. Sc. Paris», *283*, 783–785.

[9] A. OGUS (1973) – *Local Cohomological dimension of algebraic varieties*, «Ann. Math.», *98*, 327–365.

[10] Y-T. SIU e G. TRAUTMANN (1971) – *Gap-Sheaves and extension of Coherent Analytic Subsheaves*, «Lecture Notes Math.», *172*, Springer-Verlag.