Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Margareta Ignat

Sull'equilibrio relativo di un plasma radiativo in rotazione. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **73** (1982), n.1-4, p. 35–42.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1982_8_73_1-4_35_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1982.

Magnetofluidodinamica. — *Sull'equilibrio relativo di un plasma radiativo in rotazione.* Nota II di MARGARETA IGNAT, presentata (*) dal Socio C. AGOSTINELLI.

SUMMARY. — This paper studies the magnetodynamic equilibrium of a radiative, infinitely conducting plasma, undergoing both a rotation motion around a symmetry axis and a motion in the meridian plans.

It is assumed that on plasma acts its own gravitation.

In the second note the plasma is supposed to be polytropic and compressible. The stability criterion of such a splasma is also obtained.

§ 2. SUL CRITERIO DI STABILITÀ DI UN PLASMA POLITROPICO COMPRESSIBILE E RADIATIVO

Si tratta ora dell'equilibrio relativo di un plasma compressibile, politropico, radiativo, sottoposto alla propria gravitazione. Il sistema fondamentale di equazioni è in questo caso il seguente

$$
\text{(II)}\quad
\begin{aligned}
&\rho\left(\operatorname{rot} \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\operatorname{grad} v^2\right) = \mu \operatorname{rot}\mathbf{H}\times\mathbf{H} - \nabla p + \rho\nabla \mathrm{U} + \frac{1}{3}\nabla \mathrm{E}^{(\mathrm{R})}\,,\\
&\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) = 0\,,\\
&\operatorname{rot}(\mathbf{H}\times\boldsymbol{v}) = 0\,,\\
&\operatorname{div}\mathbf{H} = 0\,,\\
&\operatorname{div}\boldsymbol{q}^{(\mathrm{R})} + \alpha\,(c\mathrm{E}^{(\mathrm{R})} - 4\,\sigma\mathrm{T}^4) = 0\,,\\
&\frac{c}{3}\operatorname{grad}\mathrm{E}^{(\mathrm{R})} + \alpha\boldsymbol{q}^{(\mathrm{R})} = 0\,,\\
&\rho\mathrm{T}\,(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\mathrm{S} + \frac{4\,\mathrm{E}^{(\mathrm{R})}}{3}\operatorname{div}\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\mathrm{E}^{(\mathrm{R})} = \alpha\,(c\mathrm{E}^{(\mathrm{R})} - 4\,\sigma\mathrm{T}^4)\,,\\
&p = \mathrm{C}\rho^{\gamma}\,,
\end{aligned}
$$

dove: γ è l'indice politropico e C – una costante.

(*) Nella seduta del 25 giugno 1982.

Supponendo come al di sopra che il problema possiede una simmetria assiale e che la velocità è data da (1), calcoli analoghi a quelli del § 1, fatti colle (II.2)-(II.4), ci conducono alle

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{v} = \omega r \boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\Psi(\mathrm{V})}{\rho r} \operatorname{grad} \mathrm{V} \times \boldsymbol{e}_\varphi , \\
&\mathbf{H} = \operatorname{grad} \mathrm{V} \times \operatorname{grad} \varphi + r \mathrm{H}_\varphi \operatorname{grad} \varphi , \\
&r\mathrm{H}_\varphi = [\mu \mathrm{G}(\mathrm{V}) + r^2 \mathrm{F}(\mathrm{V}) \Psi(\mathrm{V})] \left[\mu - \frac{\Psi^2(\mathrm{V})}{\rho}\right]^{-1} , \\
&\omega = \left[\mu \mathrm{F}(\mathrm{V}) + \frac{\Psi(\mathrm{V}) \mathrm{G}(\mathrm{V})}{\rho r^2}\right] \left[\mu - \frac{\Psi^2(\mathrm{V})}{\rho}\right]^{-1} .
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Allora, tenendo conto dalla (II.8) e introducendo la funzione

$$
\mathrm{P}(\rho) = \int \frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} \mathrm{d}\rho = \frac{c\gamma}{\gamma - 1} \rho^{\gamma-1} ,
\tag{27}
$$

(II.1) diventa

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad} \left[\mathrm{P}(\rho) + \frac{v^2}{2} - \mathrm{U} - \omega r^2 \mathrm{F}\right] = \Bigg\{ \frac{\Psi}{\rho r} \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Psi}{r} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Psi}{r} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\right)\right] - \\
- \omega r^2 \frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{dV}} - \frac{\mathrm{H}_\varphi}{\rho r} \left[\mu \frac{\mathrm{dG}}{\mathrm{dV}} + \omega r^2 \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{dV}}\right] - \frac{\mu}{\rho} \frac{\nabla_2 \mathrm{V}}{r^2} \Bigg\} \operatorname{grad} \mathrm{V} + \frac{1}{3\rho} \operatorname{grad} \mathrm{E}^{(\mathrm{R})} .
\end{aligned}
$$

Facendo l'ipotesi che $\mathrm{E}^{(\mathrm{R})} = \mathrm{E}^{(\mathrm{R})}(\mathrm{V})$ (1), questa relazione può essere scritta sotto la forma

$$
\operatorname{grad} \left[\mathrm{P}(\rho) + \frac{v^2}{2} - \mathrm{U} - \omega r^2 \mathrm{F}\right] = \frac{\mathrm{dK}}{\mathrm{dV}} \operatorname{grad} \mathrm{V} ,
$$

da dove risulta

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\rho) + \frac{v^2}{2} - \mathrm{U} - \omega r^2 \mathrm{F} = \mathrm{K}(\mathrm{V}) + \text{const.} , \\
&\frac{\Psi}{\rho r} \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Psi}{\rho r} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial r}\right) + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\left(\frac{\Psi}{\rho r} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\right)\right] - \omega r^2 \frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{dV}} - \\
&- \frac{\mathrm{H}_\varphi}{\rho r} \left[\mu \frac{\mathrm{dG}}{\mathrm{dV}} + \omega r^2 \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{dV}}\right] - \frac{\mu}{\rho} \frac{\nabla_2 \mathrm{V}}{r^2} + \frac{1}{3\rho} \frac{\mathrm{dE}^{(\mathrm{R})}}{\mathrm{dV}} = \frac{\mathrm{dK}}{\mathrm{dV}} ,
\end{aligned}
\tag{28}
$$

(1) Similmente si può trattare il caso quando $\mathrm{E}^{(\mathrm{R})} = \mathrm{E}^{(\mathrm{R})}(\rho)$.

nella quale K è una funzione arbitraria di V. Il potenziale gravitazionale U può essere eliminato da (28_1) applicando ad ambi membri il Δ_2 di Laplace e ricordando l'equazione di Poisson

$$\Delta_2 U = -4 \pi f \rho ,$$

dove f è la costante dell'attrazione universale. Si ha così

$$(29) \quad \Delta_2 \left\{ P(\rho) - \omega r^2 \left(F - \frac{\omega}{2} \right) + \frac{\Psi'^2(V)}{2 r^2 \rho} (\operatorname{grad} V)^2 - K(V) \right\} + 4 \pi f \rho = 0 .$$

Eliminando il vettore $\boldsymbol{q}^{(R)}$ fra le equazioni radiative (II.5) e (II.6), risulta la relazione

$$(30) \quad \frac{d^2 E^{(R)}}{dV^2} (\operatorname{grad} V)^2 + \frac{dE^{(R)}}{dV} \Delta_2 V - \frac{3 \alpha^2}{c} (cE^{(R)} - 4 \sigma T^4) = 0 .$$

È da osservare infine che la (II.7), avendo in riguardo (26_1) si può scrivere sotto la forma

$$(31) \quad \frac{\Psi'(V)}{r} \left[T \left(\frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial S}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial S}{\partial r} \right) + \frac{4 E^{(R)}}{3 \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial r} \right) \right] =$$
$$= \alpha (cE^{(R)} - 4 \sigma T^4) .$$

Il problema si è ridotto dunque alla risoluzione delle equazioni (28_2), (29), (30) e (31) contenenti come incognite le funzioni: ρ, V, $E^{(R)}$ e T. Il resto delle incognite del sistema (II) si determinano poi successivamente dalle (26), (27) e (II.6).

Condizioni ai limiti. Per un plasma libero, sottoposto soltanto alla sua propria gravitazione, sul contorno deve annullarsi la densità ($\rho = 0$) e pure la componente normale del campo magnetico, cioè: $(\mathbf{H} - \mathbf{H}_0) \cdot \boldsymbol{n} = 0$, dove $\boldsymbol{n}$ è il versore della normale esterna alla superficie.

CASI PARTICOLARI

In ciò che segue ammettiamo nulla la componente trasversale del campo magnetico ($r H_\varphi = G(V) = 0$) e supponiamo anche che il movimento del plasma sia puramente rotatorio ($\Psi'(V) = 0$).

a) *Rotazione uniforme.*

Nelle condizioni in cui il plasma ha soltanto un moto di rotazione uniforme ($\omega = F(V) = \omega_0 = \text{cost.}$) e le funzioni di V : K e $E^{(R)}$ si scelgono lineari, cioè della forma

$$(32) \qquad K = -k_0 V \quad ; \quad E^{(R)} = \alpha_0 V ,$$

dove k_0 e α_0 sono delle costanti, le: (28_2), (29), (30) e (31) conducono, avendo in riguardo (27), alle

$$
\begin{aligned}
&\frac{C\gamma}{\gamma-1}\,\Delta_2\,\rho^{\gamma-1}+4\,\pi f\rho=2\,\omega_0^2\,,\\
(33)\qquad &\nabla_2\,V=\frac{\rho r^2}{\mu}\left(\frac{\alpha_0}{3\,\rho}+k_0\right)\quad;\quad \Delta_2\,V=0,\\
&E^{(R)}=\frac{4}{c}\,\sigma T^4\,.
\end{aligned}
$$

L'equazione (33_1) per la funzione ρ coincide coll'equazione di Emdem per l'equilibrio stellare. Come si vede essa non è affetta nè dalla presenza del campo magnetico nè dalla radiazione.

Introducendo le annotazioni

$$
(34)\qquad \nu=\frac{1}{\gamma-1}\quad;\quad \rho^{\gamma-1}=u\,,
$$

la (33_1) diventa

$$
(35)\qquad \Delta_2\,u+\frac{1}{C(\nu+1)}\,4\,\pi f u^{\nu}=\frac{2\,\omega_0^2}{C(\nu+1)}\,.
$$

Per trovare il criterio di stabilità, integriamo ambo i membri di (35) rispetto al volume τ occupato dal plasma (quale è limitato dalla superficie σ), ciò che ci dà

$$
(36)\qquad \int_{(\sigma)}\frac{du}{dn}\,d\sigma+\frac{4\,\pi f}{C(\nu+1)}\,m=\frac{2\,\omega_0^2}{C(\nu+1)}\,\tau\,,
$$

dove: $m=\int_{(\tau)}u^{\nu}\,d\tau=\int_{(\tau)}\rho\,d\tau$, è la massa totale del plasma chiusa nel volume τ.

Siccome nelle condizioni d'equilibrio di un plasma è necessario che si abbia $\dfrac{du}{dn}<0$, allora dalla (36) risulta il criterio di stabilità dato da Poincaré e specialmente

$$
(37)\qquad \omega_0^2<2\,\pi f\rho_m\,,
$$

in cui $\rho_m=\dfrac{1}{\tau}\int_{(\tau)}\rho d\tau$, è la densità media del plasma. Questo criterio stabilisce per un plasma in equilibrio relativo un limite superiore della velocità angolare di rotazione, che in questo caso non dipende dal campo magnetico o dalla radiazione.

Se si rinunzia alla ipotesi che $E^{(R)}$ è una funzione lineare di V, allora al posto del sistema (33) si ottiene il seguente

$$
\begin{aligned}
&\frac{C\gamma}{\gamma-1}\,\Delta_2\,\rho^{\gamma-1}+4\,\pi f\rho+k_0\,\Delta_2\,V=2\,\omega_0^2\,,\\
(38)\qquad &\frac{\mu}{\rho r^2}\,\nabla_2\,V=k_0+\frac{1}{3\,\rho}\,\frac{dE^{(R)}}{dV}\,,\\
&\Delta_2\,E^{(R)}=0\quad;\quad E^{(R)}=\frac{4}{c}\,\sigma T^4\,.
\end{aligned}
$$

Come si sa

$$\Delta_2\,V=\nabla_2\,V+\frac{2}{r}\,\frac{\partial V}{\partial r}\,.$$

Conformemente alla (2_2): $\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}=H_z=H_0+h_z\cong H_0$, dove H_0 è il campo magnetico applicato, diretto secondo l'asse di rotazione e h_z – la componente assiale del campo indotto, supposta trascurabile in confronto a H_0.

Utilizzando (38_2), si ottiene

$$\Delta_2\,V\cong\frac{\rho r^2}{\mu}\left(k_0+\frac{1}{3\,\rho}\,\frac{dE^{(R)}}{dV}\right)+2\,H_0\,,$$

ciò che sostituito in (38_1), colle (34), conduce alla

$$
\begin{aligned}
(39)\qquad &\Delta_2\,u+\frac{1}{C(\nu+1)}\left(4\,\pi f+\frac{k_0^2\,r^2}{\mu}\right)u^{\nu}+\\
&+\frac{1}{C(\nu+1)}\,\frac{k_0\,r^2}{3\,\mu}\,\frac{dE^{(R)}}{dV}=\frac{2\,(\omega_0^2-k_0\,H_0)}{C(\nu+1)}\,.
\end{aligned}
$$

Nelle condizioni quando k_0 si sceglie così che

$$(40)\qquad \omega_0^2=k_0\,H_0$$

e si ammette che essa sia sufficientemente piccola da poter trascurare i termini $\sim k_0^2$ e $\sim k_0\,\frac{dE^{(R)}}{dV}$ in confronto agli altri, la (39) si riduce all'equazione di Emdem

$$(41)\qquad \Delta_2\,u+\frac{4\,\pi f}{C(\nu+1)}\,u^{\nu}=0\,,$$

dalla quale si vede che il plasma può avere adesso una configurazione sferica. Invero, notando con ξ la distanza di un punto dal centro della sfera, dalla (41) risulterà allora che $u = u(\xi)$, rispettivamente $\rho = \rho(\xi)$. Scritta in un sistema di coordonate sferiche ξ, θ, φ, l'equazione (38_2) per la funzione V, diventa

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\sin\theta}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) = \frac{\rho(\xi)\,\xi^2 \sin^2\theta}{\mu}\left(k_0 + \frac{1}{3\rho(\xi)}\frac{dE^{(R)}}{dV}\right).$$

Cercando per V una soluzione della forma

$$V = \Phi(\xi)\sin^2\theta ,$$

si ottiene per Φ la seguente equazione

$$\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} - \frac{2}{\xi^2}\Phi = \frac{\rho(\xi)\,\xi^2}{\mu}\left(k_0 + \frac{1}{3\rho(\xi)}\frac{dE^{(R)}}{dV}\right).$$

Come si verifica subito essa possiede la soluzione

$$\Phi(\xi) = \frac{H_0\xi^2}{2} + \frac{\xi^4}{30\mu}\frac{dE^{(R)}}{dV} - \frac{k_0}{3\mu}\left[\xi^2\int_0^\xi \xi\rho(\xi)\,d\xi - \frac{1}{\xi}\int_0^\xi \xi^4\rho(\xi)\,d\xi\right],$$

la quale si annulla se $\xi \to 0$. Allora, si ha

$$\text{(42)}\qquad V = \frac{\xi^2}{2}H_0\sin^2\theta + \frac{\xi^4\sin^2\theta}{30\mu}\frac{dE^{(R)}}{dV} + \\ + \frac{k_0}{3\mu}\left[\xi^2\int_0^\xi \xi\rho(\xi)\,d\xi - \frac{1}{\xi}\int_0^\xi \xi^4\rho(\xi)\,d\xi\right]\sin^2\theta$$

e rispettivamente

$$\text{(43)}\qquad \begin{aligned} H_\xi &= \frac{1}{\xi^2\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\theta} = H_0\cos\theta + \frac{\xi^2\cos\theta}{15\mu}\frac{dE^{(R)}}{dV} + \\ &\quad + \frac{2k_0}{3\mu}\left[\int_0^\xi \xi\rho(\xi)\,d\xi - \frac{1}{\xi^3}\int_0^\xi \xi^4\rho(\xi)\,d\xi\right]\cos\theta , \\ H_\theta &= -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\xi} = -H_0\sin\theta - \frac{2\xi^2}{15\mu}\sin\theta\frac{dE^{(R)}}{dV} - \\ &\quad - \frac{k_0}{3\mu}\left[2\int_0^\xi \xi\rho(\xi)\,d\xi + \frac{1}{\xi^3}\int_0^\xi \xi^4\rho(\xi)\,d\xi\right]\sin\theta . \end{aligned}$$

Il criterio di stabilità quale risulta per integrazione è in questo caso il seguente

$$\text{(44)}\qquad \omega_0^2 < 2\pi f\rho_m + \frac{k_0}{2\mu}\frac{I}{\tau} + \frac{k_0}{6\mu}\frac{dE^{(R)}}{dV}\frac{I'}{\tau} + k_0 H_0 ,$$

dove: $I = \int_{(\tau)} r^2 \rho \, d\tau$ è il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione, mentre $I' = \int_{(\tau)} r^2 \, d\tau$. Dalla (44) si vede che adesso il criterio di stabilità contiene termini descriventi il contributo del campo magnetico e dei processi radiativi.

b) *Rotazione non uniforme.*

Supporremo la velocità angolare variabile della rotazione del plasma data da una funzione lineare di V, cioè

$$\omega = F(V) = \omega_0 (1 + \beta_0 V), \tag{44'}$$

dove β_0 è una costante piccola, dallo stesso ordine di grandezza di k_0. Trascurando i termini di second'ordine nelle costante k_0, β_0 e α_0, il sistema di equazioni (28_2), (29), (30) e (31) diventa nell'approssimazione considerata

$$\begin{aligned} &\Delta_2 \left\{ \frac{C\gamma}{\gamma - 1} \rho^{\gamma-1} - \beta_0 \omega_0^2 r^2 V \right\} + 4 \pi f \rho = 2 \omega_0^2 , \\ &\nabla_2 V = \frac{\rho r^2}{\mu} \left(k_0 - r^2 \omega_0^2 \beta_0 + \frac{\alpha_0}{3 \rho} \right) \quad ; \quad \Delta_2 V = 0 , \\ &E^{(R)} = \frac{4}{c} \sigma T^4 . \end{aligned} \tag{45}$$

Dalle (45_2) risulta immediatamente la condizione

$$\frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\rho r^2}{\mu} \left(k_0 - r^2 \omega_0^2 \beta_0 + \frac{\alpha_0}{3 \rho} \right) = 0 ,$$

dondé

$$\begin{aligned} \Delta_2 (r^2 V) &= r^2 \Delta_2 V + 4 r \frac{\partial V}{\partial r} + 4 V = \\ &= \frac{2 \rho r^4}{\mu} \left(r^2 \omega_0^2 \beta_0 - k_0 - \frac{\alpha_0}{3 \rho} \right) + 4 V . \end{aligned} \tag{46}$$

Allora, facendo l'ipotesi che ω_0^2 e i termini di second'ordine nelle costante k_0, α_0 e β_0 siano trascurabili, il sistema (45) si riduce allo

$$\begin{aligned} &\frac{C\gamma}{\gamma - 1} \Delta_2 \rho^{\gamma-1} + 4 \pi f \rho = 0 , \\ &\nabla_2 V = \frac{\rho r^2}{\mu} \left(k_0 + \frac{\alpha_0}{3 \rho} \right) \quad ; \quad \Delta_2 V = 0 , \\ &E^{(R)} = \frac{4 \sigma}{c} T^4 . \end{aligned} \tag{47}$$

Qui, la prima rappresenta l'equazione di Emdem. Essa mostra che pure nelle condizioni di una rotazione non uniforme, il plasma può avere una configurazione sferica, cioè la (47_1) possiede soluzioni del tipo: $\rho = \rho(\xi)$.

Non ci fermiamo alla (47_2) poichè essa coincide colla (38_2) la soluzione della quale fu già stabilita per le formule (42) e (43).

Infine, sostituendo (42) in (44′) e conservando soltanto i termini lineari nelle diverse costanti, si ottiene la seguente espressione per la velocità angolare di rotazione

$$\omega = \omega_0 (1 + \beta_0 V) \cong \omega_0 \left(1 + \beta_0 H_0 \frac{\xi^2 \sin^2 \theta}{2}\right).$$

Bibliografia

[1] C. Agostinelli (1966) - *Magnetofluidodinamica*, cap. III, Ed. Cremonese, Roma.

[2] C. Agostinelli (1970) - «Annali di Mat. Pura ed Applicata», IV, v. LXXXIV. pp. 171-186.

[3] T. Zeuli (1969) - «Atti dei Lincei», v. XLVI, fasc. 5, pp. 561-568.

[4] H. Poincaré (1902) - *Figures d'équilibre d'une masse fluide*, cap. I, p. 11, Paris, Gauthier-Villars.

[5] C. Agostinelli (1959) - «Annali di Matematica», v. XLVIII, pp. 193-208.