Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Gianni Dal Maso

Limiti di problemi di minimo per funzionali convessi con ostacoli unilaterali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **73** (1982), n.1-4, p. 15–20.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1982_8_73_1-4_15_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1982.

Calcolo delle variazioni. — *Limiti di problemi di minimo per funzionali convessi con ostacoli unilaterali.* Nota (*) di GIANNI DAL MASO, presentata dal Corrisp. E. DE GIORGI.

SUMMARY. — If the minimum problem $(\mathscr{P}_\infty)$ is the limit, in a variational sense, of a sequence of minimum problems with obstacles of the type

$$(\mathscr{P}_h) \qquad \min_{u \geq \varphi_h} \int_\Omega [f_h(x, \mathrm{D}u) + a(x, u)]\, \mathrm{d}x ,$$

then $(\mathscr{P}_\infty)$ can be written in the form

$$(\mathscr{P}_\infty) \qquad \min_u \left\{ \int_\Omega [f_\infty(x, \mathrm{D}u) + a(x, u)]\, \mathrm{d}x + \int_{\bar\Omega} g_\infty(x, \tilde u(x))\, \mathrm{d}\mu_\infty(x) \right\}$$

without any additional constraint.

INTRODUZIONE

In questa Nota si considerano successioni di problemi di minimo con ostacoli della forma

$$(\mathscr{P}_h) \qquad \min_{u \geq \varphi_h} \int_\Omega [f_h(x, \mathrm{D}u) + a(x, u)]\, \mathrm{d}x ,$$

e si mostra che, sotto opportune ipotesi, esse convergono ad un problema di minimo del tipo

$$(\mathscr{P}_\infty) \qquad \min_u \left\{ \int_\Omega [f_\infty(x, \mathrm{D}u) + a(x, u)]\, \mathrm{d}x + \int_{\bar\Omega} g_\infty(x, \tilde u(x))\, \mathrm{d}\mu_\infty(x) \right\} .$$

Più precisamente si mostra che, per ogni scelta della funzione $a(x, u)$ in un'opportuna classe di funzioni ammissibili, le successioni dei punti di minimo e dei valori minimi dei problemi $(\mathscr{P}_h)$ convergono, per $h \to +\infty$, al punto di minimo ed al valore minimo del problema $(\mathscr{P}_\infty)$.

Questioni di questo tipo, in ipotesi diverse sugli integrandi f_h o sugli ostacoli φ_h, sono state considerate da vari autori; per una bibliografia sull'argomento si veda [3], per un esempio in cui il problema limite non è più un problema con ostacolo si veda [2].

(*) Pervenuta all'Accademia il 20 luglio 1982.

In questa Nota si studia il caso in cui le φ_h siano completamente arbitrarie e le f_h siano funzioni convesse in Du verificanti opportune maggiorazioni (condizione (*b*) del Teorema 1).

I risultati ottenuti sono dello stesso tipo di quelli dimostrati in [8] e [4] per il caso

$$f_h(x, Du) = |Du|^2$$

ed in [1] per il caso

$$f_h(x, Du) = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}^{(h)}(x) D_i u D_j u .$$

Le dimostrazioni, che verranno esposte in un lavoro di prossima pubblicazione, si discostano notevolmente da quelle dei tre lavori citati, nei quali si sfrutta in maniera determinante la proprietà delle f_h di essere forme quadratiche in Du.

Un altro elemento di novità rispetto ai tre articoli anzidetti è costituito dal fatto che i risultati qui esposti sono ottenuti su un qualsiasi aperto limitato Ω con frontiera lipschitziana, mentre i teoremi dimostrati nei tre lavori precedenti valgono soltanto se Ω appartiene ad un'opportuna famiglia $\tilde{\mathcal{A}}$ di aperti, che dipende dalla successione di problemi presa in considerazione e che non sempre è facile da individuare.

1. Il risultato principale

Consideriamo fissati per tutto il seguito un intero $n \geq 1$ ed un numero reale p, con $1 < p < +\infty$.

Indicheremo con c_p la capacità di ordine $(1, p)$ definita, per ogni sottoinsieme E di $\mathbf{R}^n$, dalla formula

$$c_p(E) = \inf\{\|u\|^p_{W^{1,p}(\mathbf{R}^n)} : u \text{ s.c.i.}, \quad u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^n), \quad u(x) \geq 1 \quad \forall x \in E\},$$

dove s.c.i. sta per semicontinua inferiormente.

Diremo che una proprietà $\lambda(x)$ vale c_p–quasi ovunque su E (abbreviato c_p–q.o. su E) se esiste $E_0 \subseteq E$, con $c_p(E_0) = 0$, tale che $\lambda(x)$ sia verificata da ogni $x \in E - E_0$.

Se Ω è un aperto limitato con frontiera lipschitziana ed $u \in W^{1,p}(\Omega)$, per ogni $x \in \overline{\Omega}$ porremo per definizione

$$\tilde{u}(x) = \liminf_{r \to 0} \frac{1}{\operatorname{mis} \Omega_r(x)} \int_{\Omega_r(x)} u(y)\, dy$$

dove $\Omega_r(x) = \{y \in \Omega : |y - x| < r\}$.

Sia X uno spazio topologico, sia $\{F_h\}$ una successione di funzioni di X in $\overline{\mathbf{R}}$, sia x un elemento di X e sia $t \in \overline{\mathbf{R}}$. Seguendo [6] e [7] diremo che

$$t = \Gamma(X^-) \lim_{\substack{h \to \infty \\ y \to x}} F_h(y)$$

se e solo se

$$t = \sup_{U \in \mathscr{I}(x)} \liminf_{h \to \infty} \inf_{y \in U} F_h(y) = \sup_{U \in \mathscr{I}(x)} \limsup_{h \to \infty} \inf_{y \in U} F_h(y)$$

dove $\mathscr{I}(x)$ indica l'insieme degli intorni di x in X.

Esaurite queste premesse, siamo ora in grado di enunciare il seguente teorema.

TEOREMA 1. *Sia* Ω *un aperto limitato di* $\mathbf{R}^n$ *con frontiera lipschitziana, sia* $\{\varphi_h\}$ *una successione di funzioni di* $\overline{\Omega}$ *in* $\overline{\mathbf{R}}$ *e sia* $\{f_h\}$ *una successione di funzioni boreliane di* $\Omega \times \mathbf{R}^n$ *in* $[0, +\infty[$ *con le seguenti proprietà*:

(a) *per ogni* $x \in \Omega$ *e per ogni* $h \in \mathbf{N}$ *la funzione* $z \mapsto f_h(x, z)$ *è convessa su* $\mathbf{R}^n$;

(b) *esiste una costante* $C \geq 1$ *tale che per ogni* $(x, z) \in \Omega \times \mathbf{R}^n$ *e per ogni* $h \in \mathbf{N}$

$$0 \leq f_h(x, z) \leq C(1 + |z|^p)$$
$$f_h(x, 2z) \leq C(1 + f_h(x, z)).$$

Per ogni $h \in \mathbf{N}$ *e per ogni* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *poniamo*

$$\Psi_h(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega f_h(x, Du)\, dx & \textit{se} \quad \tilde{u} \geq \varphi_h \quad c_p\text{-q.o.} \quad \textit{su} \quad \overline{\Omega} \\ +\infty & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

Indichiamo con $X(\Omega)$ *lo spazio* $W^{1,p}(\Omega)$ *munito della topologia indotta da* $L^p(\Omega)$.

Supponiamo che esista un funzionale $\Psi_\infty : W^{1,p}(\Omega) \to [0, +\infty]$ *con le seguenti proprietà:*

(c) *per ogni* $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\Psi_\infty(u) = \Gamma(X(\Omega)^-) \lim_{\substack{h \to \infty \\ v \to \infty}} \Psi_h(v),$$

(d) *esiste* $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ *tale che* $\Psi_\infty(u_0) < +\infty$.

Allora esistono

(i) *una funzione boreliana* $f_\infty : \Omega \times \mathbf{R}^n \to [0, +\infty[$ *verificante le proprietà* (a) *e* (b),

(ii) *una funzione boreliana* $g_\infty : \overline{\Omega} \times \mathbf{R} \to [0, +\infty]$ *tale che per ogni* $x \in \overline{\Omega}$ *la funzione* $t \mapsto g_\infty(x, t)$ *sia convessa, decrescente, semicontinua inferiormente su* $\mathbf{R}$ *e converga a* 0 *per* $t \to +\infty$,

(iii) *una misura di Radon positiva* μ_∞ *appartenente a* $W^{-1,q}(\mathbf{R}^n)$ $(p^{-1}+q^{-1}=1)$,

(iv) *un numero reale* $\nu_\infty(\bar{\Omega})$, *con* $0 \leq \nu_\infty(\bar{\Omega}) < +\infty$,

tali che per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\Psi_\infty(u) = \int_\Omega f_\infty(x, Du)\, dx + \int_{\bar{\Omega}} g_\infty(x, \tilde{u}(x))\, d\mu_\infty(x) + \nu_\infty(\bar{\Omega}).$$

Se, al variare di u in $W^{1,p}(\Omega)$, il funzionale

$$\int_{\bar{\Omega}} g_\infty(x, \tilde{u}(x))\, d\mu_\infty(x) + \nu_\infty(\bar{\Omega}) \tag{1}$$

assume solo i valori 0 e $+\infty$, allora $\nu_\infty(\bar{\Omega}) = 0$ ed esiste una funzione $\varphi_\infty : \bar{\Omega} \to \bar{\mathbf{R}}$ tale che per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\int_{\bar{\Omega}} g_\infty(x, \tilde{u}(x))\, d\mu_\infty(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \tilde{u} \geq \varphi_\infty \ \ c_p\text{-q.o. su } \bar{\Omega} \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esistono però degli esempi in cui il funzionale (1) assume tutti i valori reali positivi (vedi [2]).

Osserviamo infine che nel funzionale limite Ψ_∞ l'integrale di g_∞ su $\partial\Omega$ può dare un contributo non trascurabile anche qualora la condizione di ostacolo $\tilde{u} \geq \varphi_h$ sia assegnata soltanto su Ω invece che su $\bar{\Omega}$ (cioè $\varphi_h = -\infty$ su $\partial\Omega$). Questo naturalmente non accade qualora $\varphi_h = -\infty$ al di fuori di un compatto contenuto in Ω.

2. Convergenza dei minimi

Esaminiamo ora le applicazioni del Teorema 1 allo studio dei limiti di soluzioni di problemi di minimo con ostacoli.

Ricordiamo innanzitutto che, qualunque sia la successione degli ostacoli $\{\varphi_h\}$, il teorema generale di compattezza della Γ-convergenza (vedi [10] Proposizione 3.1) assicura che la condizione (c) del Teorema 1 è verificata almeno da una sottosuccessione di $\{\Psi_h\}$.

Dal Teorema 1 e dal teorema generale che collega convergenza dei minimi e Γ-convergenza (vedi [9], [10] Corollario 2.4) si deduce il seguente corollario.

Corollario 2. *Supponiamo che siano verificate le ipotesi del Teorema 1 e che per ogni* $h \in \mathbf{N}$, $(x, z) \in \Omega \times \mathbf{R}^n$ *si abbia*

$$|z|^p \leq f_h(x, z).$$

Sia $a : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *una funzione boreliana con le seguenti proprietà:*

(a) *per ogni* $x \in \Omega$ *la funzione* $t \mapsto a(x, t)$ *è continua,*

(b) *esistono due costanti* $c_1, c_2 \in]0, +\infty[$ *ed una funzione* $\beta \in L^1(\Omega)$ *tali che per ogni* $(x, t) \in \Omega \times \mathbf{R}$ *si abbia*

$$c_1 |t|^p - \beta(x) \leq a(x, t) \leq c_2 |t|^p + \beta(x).$$

Per ogni $h \in \mathbf{N}$ *sia* u_h *un punto di minimo del funzionale*

$$\int_\Omega [f_h(x, Du) + a(x, u)]\, dx$$

nell'insieme $\{u \in W^{1,p}(\Omega) : \tilde{u} \geq \varphi_h \ c_p\text{–q.o. su } \overline{\Omega}\}$.

Allora la successione $\{u_h\}$ *è relativamente compatta in* $L^p(\Omega)$ *ed ogni sottosuccessione convergente della* $\{u_h\}$ *converge in* $L^p(\Omega)$ *verso un punto di minimo in* $W^{1,p}(\Omega)$ *del funzionale*

$$\int_\Omega [f_\infty(x, Du) + a(x, u)]\, dx + \int_{\overline{\Omega}} g_\infty(x, \tilde{u}(x))\, d\mu_\infty(x). \tag{2}$$

Inoltre si ha

$$\lim_{h\to\infty} \int_\Omega [f_h(x, Du_h) + a(x, u_h)]\, dx =$$

$$= \min_{u \in W^{1,p}(\Omega)} \left\{ \int_\Omega [f_\infty(x, Du) + a(x, u)]\, dx + \int_{\overline{\Omega}} g_\infty(x, \tilde{u}(x))\, d\mu_\infty(x) + \nu_\infty(\overline{\Omega}) \right\}.$$

In particolare, se il funzionale (2) ammette un unico punto di minimo u_∞ su $W^{1,p}(\Omega)$, allora l'intera successione $\{u_h\}$ converge ad u_∞ in $L^p(\Omega)$.

3. CONDIZIONI AL CONTORNO

Usando le tecniche di [5] è possibile dimostrare il seguente risultato sulla convergenza delle soluzioni di problemi di minimo con ostacoli e con condizioni al contorno di Dirichlet.

TEOREMA 3. *Supponiamo che siano verificate le ipotesi del Corollario 2.*

Sia $\{w_h\}$ *una successione in* $W^{1,p}(\Omega)$ *convergente debolmente in* $W^{1,p}(\Omega)$ *ad una funzione* w_∞. *Supponiamo che per ogni* $h \in \mathbf{N}$ *sia* $\tilde{w}_h \geq \varphi_h \ c_p$–q.o. *su* $\overline{\Omega}$.

Per ogni $h \in \mathbf{N}$ *sia* v_h *un punto di minimo del funzionale*

$$\int_\Omega [f_h(x, Du) + a(x, u)]\, dx$$

nell'insieme $\{u \in W^{1,p}(\Omega) : u - w_h \in W_0^{1,p}(\Omega), \tilde{u} \geq \varphi_h \ c_p\text{–q.o. su } \overline{\Omega}\}$.

Allora la successione $\{v_h\}$ *è relativamente compatta in* $L^p(\Omega)$ *ed ogni sotto-successione convergente di* $\{v_h\}$ *converge in* $L^p(\Omega)$ *verso un punto di minimo del funzionale*

$$\int_\Omega [f_\infty(x\,.\,Du) + a(x\,,u)]\,dx + \int_{\bar\Omega} g_\infty(x\,,\tilde u(x))\,d\mu_\infty(x) \tag{2}$$

nell'insieme $w_\infty + W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : u - w_\infty \in W_0^{1,p}(\Omega)\}$.

In particolare, se il funzionale (2) ha un unico punto di minimo v_∞ nell'insieme $w_\infty + W_0^{1,p}(\Omega)$, allora l'intera successione $\{v_h\}$ converge a v_∞ in $L^p(\Omega)$.

Osserviamo infine che nel Teorema 3 la limitazione $c_1 > 0$, imposta dalla condizione (b) del Corollario 2, può essere sostituita dalla seguente

$$c_1 > -\inf\left\{\int_\Omega |\,Du\,|^p\,dx : u \in W_0^{1,p}(\Omega)\,, \int_\Omega |\,u\,|^p\,dx = 1\right\}.$$

Bibliografia

[1] H. Attouch e C. Picard – *Asymptotic analysis of variational problems with constraints of obstacle type.* Publications Mathématiques d'Orsay.

[2] L. Carbone e F. Colombini (1980) – *On convergence of functional with unilateral constraints.* « J. Math. Pures Appl. », (9) *59*, 465–500.

[3] G. Dal Maso (1982) – *Limiti di problemi di minimo con ostacoli.* In « Studio di Problemi–Limite della Analisi Funzionale », Bressanone 7–9 settembre 1981, Pitagora editrice, Bologna, 79–100.

[4] G. Dal Maso e P. Longo (1980) – *Γ-limits of obstacles.* « Ann. Mat. Pura Appl. », (4) *128*, 1–50.

[5] G. Dal Maso e L. Modica (1981) – *A general theory of variational functionals.* In « Topics in Functional Analysis 1980–81 », Scuola Normale Superiore, Pisa.

[6] E. De Giorgi (1977) – *Γ-convergenza e G-convergenza.* « Boll. Un. Mat. Ital. », (5) *14*-A, 213–220.

[7] E. De Giorgi (1979) – *Convergence problems for functionals and operators.* In « Recent Methods in Non Linear Analysis », Rome, May 8–12, 1978, edited by E. De Giorgi, E. Magenes e U. Mosco, Pitagora editrice, Bologna, 131–188.

[8] E. De Giorgi, G. Dal Maso e P. Longo (1980) – *Γ-limiti di ostacoli.* « Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. », (8) *68*, 481–487.

[9] E. De Giorgi e T. Franzoni (1975) – *Su un tipo di convergenza variazionale.* « Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. », (8) *58*, 842–850.

[10] E. De Giorgi e T. Franzoni (1979) – *Su un tipo di convergenza variazionale.* « Rend. Sem. Mat. Brescia », *3*, 63–101.