
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

MARGARETA IGNAT

**Sull'equilibrio di un plasma radiativo in rotazione.
Nota I**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 72 (1982), n.6, p. 352–359.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1982_8_72_6_352_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Magnetofluidodinamica. — *Sull'equilibrio di un plasma radiativo in rotazione.* Nota I di MARGARETA IGNAT, presentata (*) dal Socio C. AGOSTINELLI.

SUMMARY. — This paper studies the magnetodynamic equilibrium of a radiative, infinitely conducting plasma, undergoing both a rotation motion around a symmetry axis and a motion in the meridian plans.

It is assumed that on plasma acts its own gravitation.

In the first nota the plasma is considered incompressible; for such a plasma the approximation of a perfect gas is valid.

INTRODUZIONE

In questo lavoro si studia l'equilibrio magnetodinamico di un plasma radiativo in rotazione sottoposto alla propria gravitazione con riferimento ad un plasma incompressibile nel § 1 ed ad uno compressibile nel § 2. Le condizioni d'esistenza del plasma stellare e qualche volta di quello di laboratorio, rendono opportuna la considerazione dei processi radiativi, processi che diventano significativi a temperature molto alte. In questo modo saranno estesi tenendo conto degli effetti radiativi alcuni lavori precedenti, [1, 2, 3], sull'equilibrio magnetodinamico di masse gassose, elettroconduttrici, rotanti e sottoposti alla propria gravitazione.

Se il plasma considerato è incompressibile (§ 1) e uniformemente rotante, lavorando nell'approssimazione di un gas perfetto si constata che la distribuzione della temperatura non dipende dal campo magnetico, per il plasma essendo possibili configurazioni d'equilibrio ellissoidali rotonde. La densità dell'energia di radiazione risulta allora una funzione armonica, collegata alla temperatura per la formula di Planck.

Nel § 2 si fa un studio analogo per un plasma compressibile politropico. I risultati così ottenuti sono poi particolareggiati supponendo che: 1) il plasma segue un movimento di rotazione uniforme intorno l'asse z , 2) H_φ , la componente trasversale del campo magnetico è nulla, 3) la densità dell'energia di radiazione, $E^{(R)}$, dipende solo dalla funzione del campo, V . In queste condizioni, lavorando nell'ipotesi che $E^{(R)}$ ed una funzione arbitraria, $K(V)$, sono funzioni

(*) Nella seduta del 25 giugno 1982.

lineari di V , si ritrova indipendentemente dal campo magnetico e dalla radiazione, il criterio di stabilità dato da Poicaré, [4]. Questo criterio precisa l'esistenza di un limite superiore per la velocità angolare di rotazione, ω_0 .

Nel caso più generale quando $E^{(R)}$ non è una funzione lineare di V e si ha $\omega_0^2 = k_0 H_0$ (dove k_0 è una costante e H_0 - il campo magnetico applicato), per il plasma risulta possibile una configurazione sferica. Allora, la densità del plasma è $\rho = \rho(\xi)$, dove ξ è la distanza di un punto qualsiasi dal centro della sfera. Conoscendo la densità si possono poi determinare la funzione del campo V , le componenti del campo magnetico ecc. Viene trovato pure il criterio di stabilità del plasma, che apparisce modificato in confronto al criterio di Poincaré. Così, il limite superiore della velocità angolare di rotazione dipende adesso anche dal campo magnetico e dalla radiazione.

Finalmente è stato analizzato il caso di un plasma in movimento di rotazione non uniforme, colla velocità angolare di rotazione data da una funzione lineare di V . Pure in questo caso si mette in evidenza per il plasma la possibilità d'esistenza di alcune configurazioni sferiche, trovandosi l'espressione corrispondente per ω .

§ 1. L'EQUILIBRIO MAGNETODINAMICO DI UN PLASMA GRAVITANTE RADIATIVO, INCOMPRIMIBILE

Siano i moti stazionari di un plasma radiativo, incomprimibile, avendo una conducibilità elettrica molto grande. Il sistema fondamentale di equazioni di MGDR è in questo caso il seguente

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \frac{\mu}{\rho_0} \text{rot } \mathbf{H} \times \mathbf{H} - \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} + \frac{E^{(R)}}{3\rho_0} - U \right), \\ \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad ; \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, \\ \text{rot } (\mathbf{H} \times \mathbf{v}) = 0, \\ \text{div } \mathbf{q}^{(R)} + \alpha (c E^{(R)} - 4 \sigma T^4) = 0, \\ \frac{c}{3} \text{grad } E^{(E)} + \alpha \mathbf{q}^{(R)} = 0, \\ \rho_0 T (\mathbf{v} \cdot \nabla) S + (\mathbf{v} \cdot \nabla) E^{(R)} = \alpha (c E^{(R)} - 4 \sigma T^4), \\ T = T(p, S), \text{ o, in particolare: } p = \rho_0 \frac{RT}{M}, \end{array} \right.$$

dove: ρ_0 - è la densità, $\mathbf{v}$ - la velocità, p - la pressione, $\mathbf{H}$ - l'intensità del campo magnetico, μ - la permeabilità magnetica, U - il potenziale gravitazionale, $E^{(R)}$ - la densità del energia di radiazione, $\mathbf{q}^{(R)}$ - il vettore di flusso di calore radiative, α - il coefficiente di assorbimento, σ - la costante di Stefan-Boltzmann, c - la

velocità della luce nel vuoto, S - l'entropia per unità di masse, T - la temperatura assoluta, R - la costante universale del gas e M - la massa molare.

Come si sa, (I.7₁) rappresenta l'equazione di stato, la quale è particolareggiata in (I.7₂) per un gas perfetto.

In ciò che segue si fa l'ipotesi che il plasma possieda oltre che un movimento di rotazione intorno l'asse z , in generale non uniforme, anche un moto nei piani meridiani. Allora il vettore della velocità scritto in un sistema di coordinate cilindriche, avrà l'espressione

$$(1) \quad \mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + \omega r \mathbf{e}_\varphi + v_z \mathbf{e}_z,$$

dove: $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$, sono i versori rispettivi e ω è la velocità angolare di rotazione.

In virtù della simmetria assiale del problema considerato, tutte le grandezze del sistema (I) sono indipendenti dall'angolo φ , essendo funzioni soltanto delle coordinate r e z . In queste condizioni (I.2₂) è identicamente soddisfatta se

$$(2) \quad H_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial z} \quad ; \quad H_z = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \quad ; \quad H_\varphi = \text{arbitrario}.$$

Dalla (I.3) risulta

$$(3) \quad \begin{aligned} v_z H_\varphi - \omega r H_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \\ \mathbf{H} \times \mathbf{v} = \text{grad } \Phi &\rightarrow v_r H_z - v_z H_r = 0, \\ \omega r H_r - v_r H_\varphi &= \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \end{aligned}$$

dove Φ è una funzione arbitraria. La (3₂) mostra che

$$\frac{v_r}{H_r} = \frac{v_z}{H_z} = \beta(r, z) \rightarrow v_r = \beta H_r \quad ; \quad v_z = \beta H_z,$$

ciò che sostituito nella (I.2₁), conduce alla

$$(4) \quad \beta = \Psi(V),$$

in cui Ψ è una funzione qualsiasi di V . Quindi

$$(5) \quad v_r = -\frac{\Psi(V)}{r} \frac{\partial V}{\partial z} \quad ; \quad v_z = \frac{\Psi(V)}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \quad ; \quad v_\varphi = \omega r.$$

Introducendo le componenti della velocità e del campo magnetico, date rispettivamente dalle (5) e (2), nelle (3₁) e (3₃) risulta subito che

$$(6) \quad \omega - \frac{\Psi(V)}{r} H_\varphi = F(V),$$

con F funzione arbitraria di V . In queste condizioni

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \omega r \mathbf{e}_\varphi + \frac{\Psi}{r} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{e}_z - \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{e}_r \right) = \omega r \mathbf{e}_\varphi + \frac{\Psi}{r} \text{grad } V \times \mathbf{e}_\varphi, \\ \text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v} &= - \left\{ \omega \text{grad } (\omega r^2) + \frac{\Psi}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Psi}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Psi}{r} \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right] \text{grad } V \right\} + \\ (7) \quad &+ \frac{\Psi}{r} \left[\frac{\partial}{\partial z} (\omega r^2) \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} (\omega r^2) \frac{\partial V}{\partial z} \right] \text{grad } \varphi, \end{aligned}$$

$$\mathbf{H} = r H_\varphi \text{grad } \varphi + \text{grad } V \times \text{grad } \varphi,$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} \times \mathbf{H} &= - \frac{\nabla_2 V}{r^2} \text{grad } V - \frac{1}{2 r^2} \text{grad } (r H_\varphi)^2 - \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) \frac{\partial V}{\partial z} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial z} (r H_\varphi) \frac{\partial V}{\partial r} \right] \text{grad } \varphi, \end{aligned}$$

dove

$$(8) \quad \nabla_2 V = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

In (7) abbiamo anche tenuto conto che $\mathbf{e}_\varphi = r \text{grad } \varphi$. Sostituendo (7₃) e (7₄) nella (I.1) risultano le seguenti due equazioni scalari

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial z} \left(\omega r^2 \Psi - \frac{\mu r}{\rho_0} H_\varphi \right) \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\omega r^2 \Psi - \frac{\mu r}{\rho_0} H_\varphi \right) \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \\ (9) \quad &- \omega \text{grad } (\omega r^2) - \frac{\Psi}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Psi}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Psi}{r} \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right] \text{grad } V + \\ &+ \frac{\mu}{\rho_0} \frac{\nabla_2 V}{r^2} \text{grad } V + \frac{\mu}{2 \rho_0 r^2} \text{grad } (r H_\varphi)^2 + \\ &+ \text{grad } \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} - U + \frac{E^{(R)}}{3 \rho_0} \right) = 0. \end{aligned}$$

La prima di loro conduce immediatamente alla

$$(10) \quad \omega r^2 \Psi - \frac{\mu}{\rho_0} r H_\varphi = - \frac{\mu}{\rho_0} G(V),$$

dove $G(V)$ può essere scelta ad arbitrio. Utilizzando il valore di ω data da (6), si trova

$$(11) \quad r H_\varphi = \left[\frac{\mu}{\rho_0} G(V) + r^2 F(V) \Psi(V) \right] \left[\frac{\mu}{\rho_0} - \Psi^2(V) \right]^{-1},$$

e poi

$$(12) \quad \omega = \left[\frac{\mu}{\rho_0} F(V) + \frac{\mu}{\rho_0 r^2} \Psi(V) G(V) \right] \left[\frac{\mu}{\rho_0} - \Psi^2(V) \right]^{-1}.$$

La (9₂), tenendo conto delle (11) e (12), si trasforma nella

$$\begin{aligned} & \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} - U + \frac{E^{(R)}}{3 \rho_0} - \omega r^2 F(V) \right) = \\ & = \left\{ \frac{\Psi}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Psi}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Psi}{r} \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right] - \omega r^2 \frac{dF}{dV} - \right. \\ & \left. - \frac{H_\varphi}{r} \left(\frac{\mu}{\rho_0} \frac{dG}{dV} + \omega r^2 \frac{d\Psi}{dV} \right) - \frac{\mu}{\rho_0} \frac{\nabla_2 V}{r^2} \right\} \text{grad } V. \end{aligned}$$

Poichè conformemente alla (7₁): $v^2 = \omega^2 r^2 + r^{-2} \Psi^2(V) (\text{grad } V)^2$, dalle relazioni dedotte si ottiene

$$\begin{aligned} & \frac{p}{\rho_0} - \omega r^2 \left(F(V) - \frac{\omega}{2} \right) + \frac{\Psi^2(V)}{2 r^2} (\text{grad } V)^2 + \\ & + \frac{E^{(R)}}{3 \rho_0} - U = K(V) + \text{const.}, \\ (13) \quad & \frac{\Psi}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Psi}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Psi}{r} \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right] - \omega r^2 \frac{dF}{dV} - \\ & - \frac{H_\varphi}{r} \left(\frac{dG}{dV} \frac{\mu}{\rho_0} + \omega r^2 \frac{d\Psi}{dV} \right) - \frac{\mu}{\rho_0} \frac{\nabla_2 V}{r^2} = \frac{dK}{dV}, \end{aligned}$$

dove K è una funzione qualsiasi di V .

Eliminando $q^{(R)}$ dalle (I.4) e (I.5), si trova l'equazione

$$(14) \quad \Delta_2 E^{(R)} - \frac{3 \alpha^2}{c} (c E^{(R)} - 4 \sigma T^4) = 0.$$

Allora, tenendo conto della (7₁), la (I.6) diventa

$$\begin{aligned} (15) \quad & \frac{\Psi}{r} \left\{ \rho_0 T \left(\frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial S}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial S}{\partial r} \right) + \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial E^{(R)}}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial E^{(R)}}{\partial r} \right\} = \\ & = \alpha (c E^{(R)} - 4 \sigma T^4). \end{aligned}$$

Dunque, il problema si è ridotto alla risoluzione delle equazioni (13)-(15) e (I.7), cioè di 5 equazioni nelle incognite: V , $E^{(R)}$, T , S e p . In ciò che riguarda le funzioni: Ψ , F , K e G , esse si scelgono da caso a caso secondo lo specifico problema considerato.

CASI PARTICOLARI

Lavorando nell'approssimazione del gas perfetto consideriamo adesso alcuni casi particolari notevoli.

a) *Rotazione uniforme.*

Se il moto del plasma si riduce ad una rotazione uniforme intorno l'asse di simmetria, colla velocità angolare costante ω_0 , allora le (11) e (12) si riducono alle

$$(16) \quad \omega = F(V) = \omega_0 = \text{cost.}; \quad r H_\varphi = G(V).$$

Scegliendo $K(V) = \text{cost.}$, le equazioni (13)–(15) porgono

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{RT}{M} - \frac{\omega_0^2 r^2}{2} - U + \frac{4\sigma T^4}{3\rho_0} &= \text{cost.}, \\ \nabla_2 V + \frac{1}{2} \frac{dG^2}{dV} &= 0, \\ \Delta_2 E^{(R)} &= 0; \quad E^{(R)} = \frac{4\sigma T^4}{c}. \end{aligned}$$

In questo caso

$$(18) \quad \mathbf{v} = \omega_0 r \mathbf{e}_\varphi; \quad \mathbf{H} = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{e}_r + H_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{e}_z,$$

mentre dalla (7₄), risulta

$$(19) \quad \text{rot } \mathbf{H} \times \mathbf{H} = 0.$$

Dalla (17₁) si vede che la distribuzione della temperatura non dipende dal campo magnetico. In ciò che concerne la densità dell'energia di radiazione, essa, conformemente alla (17₃), deve essere una funzione armonica.

Sia r la distanza dall'asse di rotazione e x, y, z le coordinate cartesiane aventi l'origine nel centro del plasma e gli asse Ox e Oy – uniformemente rotanti colla velocità angolare ω_0 intorno l'asse z . Allora.

$$(20) \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

ciò che introdotto nella (17₁) mostra che se la temperatura è costante, per il plasma sono possibili configurazioni d'equilibrio ellissoidali rotonde.

La funzione del campo, V , soddisfa all'equazione (17₂) nella quale G si può scegliere ad arbitrio. Così, se $G(V)$ è data da una funzione lineare, del tipo $G(V) = kV$, allora la (17₂) si semplifica:

$$(21) \quad \nabla_2 V + k^2 V = 0,$$

caso che fu analizzato in dettaglio in [5].

Una semplificazione più importante si ottiene scegliendo $G(V) = 0$, ciò che, in virtù della (16₂), significa $H_\varphi = 0$. Considerando anche $K = k_0 V$, cioè una funzione lineare, il sistema di equazioni (13)–(15) diventa

$$(22) \quad \begin{aligned} \frac{RT}{M} - \frac{\omega_0^2 (x^2 + y^2)}{2} - U - k_0 V + \frac{4 \sigma T^4}{3 \rho_0} &= \text{cost.}, \\ \nabla_2 V - \frac{\rho_0 r^2}{\mu} k_0 V &= 0, \\ \Delta_2 E^{(R)} &= 0 \quad ; \quad E^{(R)} = \frac{4}{c} \sigma T^4. \end{aligned}$$

Ora la funzione del campo, V , si determina dalla (22₂); poi dalla (22₁) si trova la temperatura e dalla

$$(23) \quad \mathbf{H} = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{e}_z,$$

l'intensità del campo magnetico.

Saranno possibili pure questa volta per il plasma figure elissoidali rotondi se la funzione V si determina colla (22₂) così che si annulla sul contorno.

b) Rotazione non uniforme

Assumendo nulla la componente trasversale del campo magnetico ($H_\varphi = 0$) e le funzioni K e ω date da espressioni lineari in V , si ha

$$(24) \quad \omega = F(V) = \omega_0 (1 + \beta_0 V) \quad ; \quad K = k_0 V \quad ; \quad r H_\varphi = G(V) = 0,$$

dove β_0 e k_0 sono delle costanti.

Conservando nelle (13)–(15) soltanto i termini lineari nelle diverse costanti che intervengono, si ottiene

$$(25) \quad \begin{aligned} \frac{RT}{M} - U - \frac{r^2 \omega_0^2}{2} - (k_0 + r^2 \omega_0^2 \beta_0) V + \frac{4 \sigma T^4}{3 \rho_0} &= \text{cost.}, \\ \nabla_2 V &= \frac{\rho_0 r^2}{\mu} (r^2 \omega_0^2 \beta_0 - k_0), \\ \Delta_2 E^{(R)} &= 0 \quad ; \quad E^{(R)} = \frac{4}{c} \sigma T^4. \end{aligned}$$

Qui, (25₂) serve alla determinazione di V , che introdotta nella (25₁) ci permette di trovare la temperatura. Poi, dalla (25₃) si ricava la densità dell'energia di radiazione ecc.

BIBLIOGRAFIA

- [1] C. AGOSTINELLI (1966) - *Magnetofluidodinamica*, cap. III, Ed. Cremonese. Roma,
- [2] C. AGOSTINELLI (1970) - *Annali di Mat. Pura ed Applicata*, IV, v. LXXXIV, pp. 171-186.
- [3] T. ZEULI (1969) - « *Atti dei Lincei* », v. XLVI, fasc. 5, pp. 561-568.
- [4] H. POINCARÉ (1902) - *Figures d'équilibre d'une masse fluide*, cap. I, p. 11, Paris, Gauthier-Villars.
- [5] C. AGOSTINELLI (1959) - « *Annali di Matematica* », v. XLVIII, pp. 193-208.