
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ERCOLE DE CASTRO

**Contributo allo studio dei fenomeni di trasporto
della carica minoritaria in regioni quasi neutre di
semiconduttori fortemente e disuniformemente
drogati. Riduzione del problema ad equazioni
integrali**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 72 (1982), n.3, p. 137-148.*
Accademia Nazionale dei Lincei

http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1982_8_72_3_137_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Fisica matematica. — *Contributo allo studio dei fenomeni di trasporto della carica minoritaria in regioni quasi neutre di semiconduttori fortemente e disuniformemente drogati. Riduzione del problema ad equazioni integrali.* Nota (*) del Corrisp. ERCOLE DE CASTRO.

SUMMARY. — Transport phenomena of minority carriers in quasi neutral regions of heavily doped semiconductors are considered for the case of one-dimensional stationary flow and their study is reduced to a Fredholm integral equation of the second kind, the kernel and the known term of which are built from known functions of the doping arbitrarily distributed in space. The advantage of the method consists, among other things, in having all the coefficients of the differential equations and of the boundary conditions of the problem built in only two, the kernel and the known term of the integral equation. For this reason taking into account phenomena such as bandgap narrowing, degeneration of majority carriers and Auger effect does not make the problem more difficult to solve, while its qualitative discussion can be appreciably simplified.

PREMESSA

L'iniezione di portatori di carica minoritaria in regioni quasi neutre fortemente e disuniformemente drogate di un cristallo semiconduttore è stata oggetto negli ultimi anni di interessanti ricerche per l'importanza che essa ha nel determinare le prestazioni di dispositivi elettronici come transistori bipolari e celle solari fotovoltaiche. Il problema ha carattere generale, ma il suo interesse applicativo è attualmente legato, pressochè esclusivamente, ai dispositivi al Silicio; a quest'ultimo materiale si farà perciò riferimento ogni volta che occorrerà fissare le idee su dati quantitativi.

La forte e disuniforme concentrazione dei droganti dà rilievo a fenomeni fisici come la contrazione dell'intervallo di energie che separa la banda di conduzione da quella di valenza del semiconduttore [bibl. da 1 a 11], l'effetto Auger [bibl. da 12 a 16] e la degenerazione del gas dei portatori maggioritari [bibl. 17, 18], col risultato di influenzare profondamente il funzionamento dei suddetti dispositivi e di complicarne alquanto la descrizione matematica, rendendo fortemente variabili col punto tutti i coefficienti delle equazioni che governano il trasporto della carica minoritaria.

E per la sua importanza e per l'utilità di appoggiare le idee su un caso concreto, si farà riferimento d'ora innanzi al modello unidimensionale di un transistor npn, di cui la figura 1 rappresenta il particolare della regione di emettitore,

(*) Presentata nella seduta del 13 marzo 1982.

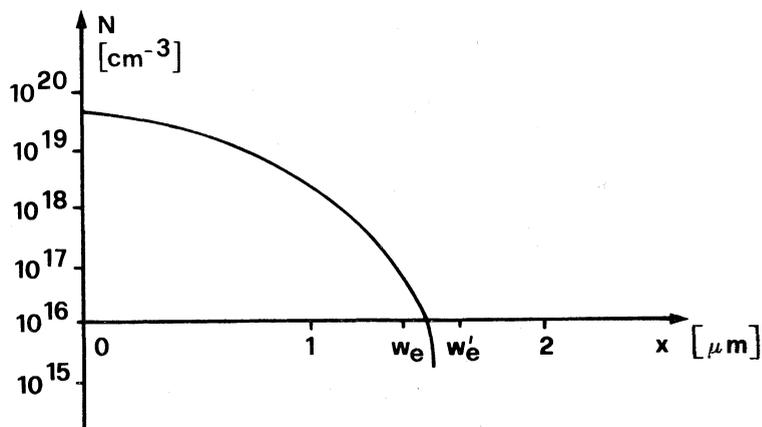
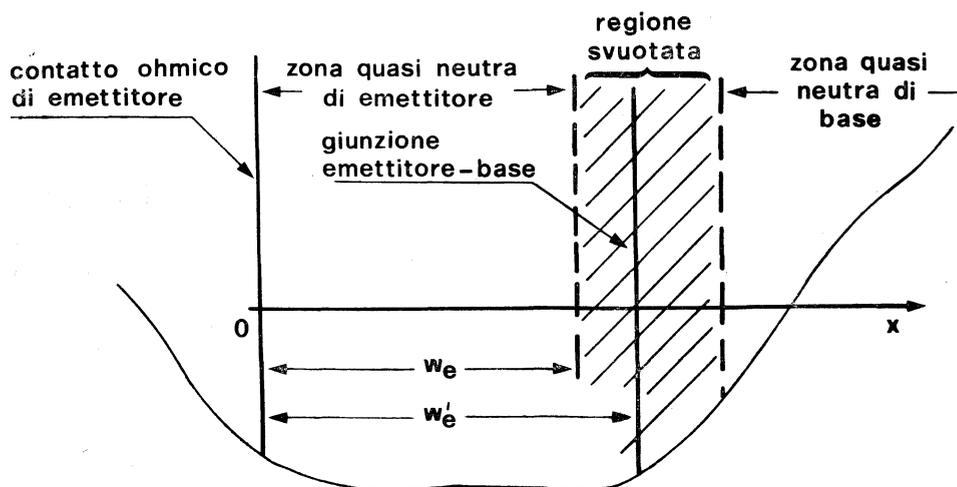


Fig. 1.

che è appunto fortemente e disuniformemente drogata con una concentrazione $N = N_D - N_A$ di atomi donatori in eccesso sugli accettori, funzione nota del punto ⁽¹⁾ e con andamento del tipo indicato qualitativamente nella stessa figura.

Il guadagno di corrente del dispositivo, nella connessione ad emettitore comune e per una condizione di funzionamento stazionaria e *normale* ⁽²⁾, risulta

(1) È consuetudine indicare con $N_D = N_D(x)$ e con $N_A = N_A(x)$ le concentrazioni degli atomi rispettivamente donatori ed accettori, inseriti sostituzionalmente nel reticolo cristallino del semiconduttore per variarne in modo controllato le caratteristiche elettriche.

(2) Cioè con le tensioni V_{BE} e V_{BC} applicate alle coppie di morsetti base-emettitore e base-collettore soddisfacenti alle disequazioni $V_{BE} > 0$, $V_{BC} \ll \frac{-kT}{q}$, essendo k la costante di Boltzmann, T la temperatura assoluta del semiconduttore (supposta uniforme) e q il valore assoluto della carica dell'elettrone.

inversamente proporzionale alla densità della corrente minoritaria $J_p(w_e)$, calcolata nella sezione $x = w_e$ che separa la zona quasi neutra di emettitore dalla regione pressochè svuotata dei portatori di carica esistente nell'intorno della giunzione base-emettitore. È per questo che la valutazione di $J_p(w_e)$, in relazione ai diversi parametri fisici e geometrici in giuoco, risulta essenziale per stimare le prestazioni ottenibili dal dispositivo considerato, specie con i vincoli imposti dalla contrazione delle dimensioni che l'evoluzione della Microelettronica va richiedendo.

È noto che la larghezza w_e della zona quasi neutra di emettitore può calcolarsi in modo elementare, essendo fissato w_e' dalla geometria del dispositivo, mentre la determinazione di $J_p(w_e)$ richiede la risoluzione, nell'intervallo $[0, w_e]$, del sistema di equazioni [bibl. 20]

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{dJ_p}{dx} &= -\frac{q}{\tau_p} \left(p - \frac{n_{ie}^2}{N} \right) \\ J_p &= -qD_p \left[\frac{dp}{dx} + \left(\frac{d}{dx} \log \frac{N}{n_{ie}^2} \right) p \right] \end{aligned}$$

nelle funzioni incognite $J_p = J_p(x)$ e $p = p(x)$, che rappresentano rispettivamente la densità della corrente minoritaria e la concentrazione dei portatori minoritari nella zona quasi neutra di emettitore e soddisfano alle condizioni al contorno

$$(2) \quad \begin{aligned} J_p(0) &= -q s_p \left[p(0) - \frac{n_{ie}^2(0)}{N(0)} \right] \\ p(w_e) &= \frac{n_{ie}^2(w_e)}{N(w_e)} e^{\beta V_{BE}}, \end{aligned}$$

essendo β e s_p costanti reali e positive, N una funzione assegnata di x continua, a valori reali positivi e con forti escursioni nell'intervallo $[0, w_e]$, τ_p , D_p e n_{ie}^2 funzioni note di x per il tramite di N , tutte continue ed a valori reali positivi [bibl. 23, 25]. Il significato delle suddette grandezze fisiche è ben noto: s_p è la velocità di ricombinazione superficiale dei portatori minoritari (cioè delle lacune) sul contatto ohmico e τ_p la loro vita media nella regione quasi neutra, D_p il coefficiente di diffusione delle medesime lacune, n_{ie}^2 il prodotto delle concentrazioni di equilibrio dei portatori di carica maggioritari e minoritari, n_{ie}^2/N il valore di equilibrio di p , $N = N_D - N_A$ e $\beta = q/kT$.

La funzione $N = N(x)$ può assumere forme molto diverse in relazione ai diversi processi tecnologici con cui può essere effettuato l'inserimento degli atomi donatori nel reticolo del semiconduttore; ciascun processo consente inoltre gradi di libertà per dosare nel modo voluto la concentrazione dei medesimi atomi almeno nella sezione $x = 0$ e per collocare la giunzione emettitore-base ad una distanza w_e' prefissata. Similmente τ_p risulta bensì funzione di x per il tramite di N a cagione dell'effetto Auger, ma nell'espressione di tale funzione giuocano anche altri parametri su cui si può intervenire (ad esempio inserendo nel Silicio

atomi di Oro in concentrazione generalmente uniforme). Ciascuna delle funzioni N , n_{ie}^2 , τ_p e D_p può dunque assumere valori ed andamenti assai diversi nell'intervallo $[0, w_e]$.

È opportuno inoltre tenere presente che, poichè il flusso delle lacune nella regione di emettitore ha luogo (nel funzionamento normale) in senso opposto a quello dell'asse x , la densità della corrente minoritaria $J_p = J_p(x)$ [e quindi pure $J_p(w_e)$] ha valori reali negativi, mentre la concentrazione dei medesimi portatori di carica $p = p(x)$ risulta necessariamente a valori reali positivi; questo rende ragione infatti dei segni che nel seguito si adotteranno in talune posizioni. Si noti poi che, mentre la seconda delle (2) fissa il valore di $p(x)$ nella sezione $x = w_e$, la prima stabilisce un legame fra $J_p(x)$ e $p(x)$ nella sezione $x = 0$ e ciò equivale, come si vedrà in seguito, ad imporre un legame espresso da un funzionale lineare fra $J_p(w_e)$ e $p(x)$.

È del tutto ovvio che dalle (1) può ricavarsi una equazione differenziale lineare del second'ordine, a coefficienti variabili, nella $p = p(x)$; appunto tale equazione è stata oggetto di ricerche, che in vario modo hanno abordato il problema della sua soluzione numerica od analitica, quest'ultima con approssimazioni a tratti, ossia scindendo l'intervallo di integrazione in parti, entro le quali sono lecite semplificazioni diverse dei coefficienti, ed imponendo di conseguenza appropriate condizioni di saldatura [bibl. da 21 a 25].

In questa nota viene mostrato come il medesimo problema sia riducibile ad una particolare equazione integrale lineare, di qualche interesse anche sotto il profilo matematico, col duplice vantaggio di consentirne una soluzione analitica in vari ordini di approssimazione, senza alcun frazionamento dell'intervallo $[0, w_e]$ e mettendo automaticamente in conto le condizioni al contorno, e di semplificare la programmazione della soluzione numerica su calcolatori elettronici.

RIDUZIONE DEL PROBLEMA AD UNA EQUAZIONE INTEGRALE

Integrando ambo i membri della prima delle (1) fra x e w_e , con $0 \leq x \leq w_e$, si trova

$$(3) \quad J_p(x) - J_p(w_e) - q \int_x^{w_e} \frac{1}{\tau_p(y)} \left[p(y) - \frac{n_{ie}^2(y)}{N(y)} \right] dy = 0$$

e di qui, tenuto conto della seconda delle (1), segue l'equazione integrodifferenziale

$$(4) \quad \frac{dp}{dx} + \left(\frac{d}{dx} \log \frac{N}{n_{ie}^2} \right) p + \frac{J_p(w_e)}{qD_p} + \frac{1}{D_p} \int_x^{w_e} \frac{1}{\tau_p(y)} \left[p(y) - \frac{n_{ie}^2(y)}{N(y)} \right] dy = 0,$$

la cui soluzione soddisfacente alle (2) va ovviamente cercata nell'insieme S delle funzioni definite su $[0, w_e]$ ed ivi dotate di derivata.

Posto

$$(5) \quad F = F(x) = \frac{n_{ie}^2(x)}{N(x)},$$

si consideri ora l'applicazione $u(x) \rightarrow p(x)$ di S in sè stesso definita da

$$(6) \quad \frac{dp}{dx} - \left(\frac{d}{dx} \log F \right) p + \frac{J_p(w_e)}{qD_p} + \frac{1}{D_p} \int_x^{w_e} \frac{1}{\tau_p(y)} [u(y) - F(y)] dy = 0$$

$$p(w_e) = F(w_e) e^{\beta V_{BE}},$$

ove si riguardi $J_p(w_e)$ come una costante nota. Per ogni assegnata $u(x) \in S$ le (6) rappresentano una equazione differenziale lineare del prim'ordine con una condizione iniziale nella sezione $x = w_e$, integrabile elementarmente con

$$(7) \quad p(x) = F(x) \left\{ e^{\beta V_{BE}} + \frac{J_p(w_e)}{q} \int_x^{w_e} \frac{dy}{F(y) D_p(y)} + \right. \\ \left. + \int_x^{w_e} \frac{1}{F(z) D_p(z)} \int_z^{w_e} \frac{1}{\tau_p(y)} [u(y) - F(y)] dy dz \right\}.$$

L'unicità ben nota di tale soluzione garantisce che le (6) istituiscono una corrispondenza univoca $u(x) \rightarrow p(x)$, cioè appunto una applicazione di S in sè stesso.

La (7) d'altra parte può essere semplificata introducendo la funzione

$$(8) \quad G(x) = \int_x^{w_e} \frac{dz}{F(z) D_p(z)}$$

ed integrando per parti l'ultimo termine del secondo membro con

$$\int_z^{w_e} \frac{1}{\tau_p(y)} [u(y) - F(y)] dy$$

come fattore finito; essa assume così la forma

$$(9) \quad p(x) = F(x) \left[e^{\beta V_{BE}} + \frac{J_p(w_e)}{q} G(x) \right] - \\ - \int_x^{w_e} \frac{F(x) [G(y) - G(x)]}{\tau_p(y)} [u(y) - F(y)] dy.$$

È dunque evidente che la soluzione del problema espresso dalle (4) e (2) corrisponde al punto unito della applicazione di S in sè stesso definita dalla (9),

cioè alla soluzione dell'equazione integrale lineare

$$(10) \quad p(x) = F(x) \left[e^{\beta V_{BE}} + \frac{J_p(w_e)}{q} G(x) \right] - \\ - \int_x^{w_e} \frac{F(x) [G(y) - G(x)]}{\tau_p(y)} [p(y) - F(y)] dy$$

di cui occorre determinare le condizioni di esistenza ed unicità. Sottraendo $F(x)$ ad ambo i membri della (10) ed introducendo la nuova funzione incognita

$$p^*(x) = p(x) - F(x),$$

che rappresenta lo scarto di $p(x)$ dal valore di equilibrio $F(x)$, si ottiene l'equazione del tutto equivalente

$$(11) \quad p^*(x) = F(x) \left[(e^{\beta V_{BE}} - 1) + \frac{J_p(w_e)}{q} G(x) \right] - \\ - \int_x^{w_e} \frac{F(x) [G(y) - G(x)]}{\tau_p(y)} p^*(y) dy,$$

dove è messa in evidenza la differenza $e^{\beta V_{BE}} - 1$, che si annulla in assenza di sollecitazione esterna (cioè con $V_{BE} = 0$).

Si deve però rilevare che $J_p(w_e)$ è una costante ancora indeterminata, con la quale deve garantirsi il soddisfacimento della prima delle (2). È facile riconoscere che $J_p(w_e)$ può esprimersi mediante un semplice funzionale lineare di $p^*(x)$; dalla (3), ponendovi $x = 0$, si ricava infatti

$$J_p(w_e) = J_p(0) - q \int_0^{w_e} \frac{p^*(y)}{\tau_p(y)} dy$$

e quindi, onde soddisfare alla prima delle (2), deve risultare

$$(12) \quad J_p(w_e) = -q s_p p^*(0) - q \int_0^{w_e} \frac{p^*(y)}{\tau_p(y)} dy.$$

Sostituendo nella (12) l'espressione di $p^*(0)$ desumibile dalla (11) ed introducendo la costante adimensionale

$$(13) \quad a = \frac{s_p F(0) G(0)}{s_p F(0) G(0) + 1},$$

si trova la relazione

$$(14) \quad J_p(w_e) = -a \frac{q}{G(0)} (e^{\beta V_{BE}} - 1) - q \int_0^{w_e} \frac{1}{\tau_p(y)} \left[1 - a \frac{G(y)}{G(0)} \right] p^*(y) dy,$$

che esprime appunto $J_p(w_e)$ come funzionale lineare di $p^*(x)$, e quindi ovviamente di $p(x)$.

Sostituendo tale espressione di $J_p(w_e)$ nella (11), si giunge finalmente all'equazione integrale lineare

$$p^*(x) = F(x) \left[1 - a \frac{G(x)}{G(0)} \right] (e^{\beta V_{BE}} - 1) - \int_0^{w_e} \frac{F(x) G(x)}{\tau_p(y)} \left[1 - a \frac{G(y)}{G(0)} \right] p^*(y) dy - \int_x^{w_e} \frac{F(x) [G(y) - G(x)]}{\tau_p(y)} p^*(y) dy$$

la quale, sommando e sottraendo al secondo membro il termine

$$\int_0^x \frac{F(x) [G(y) - G(x)]}{\tau_p(y)} p^*(y) dy,$$

si riduce alla forma

$$(15) \quad p^*(x) = f(x) (e^{\beta V_{BE}} - 1) + \int_0^{w_e} K_1(x, y) p^*(y) dy + \int_0^x K_2(x, y) p^*(y) dy$$

avendo posto

$$f(x) = F(x) \left[1 - a \frac{G(x)}{G(0)} \right]$$

$$(16) \quad K_1(x, y) = -F(x) \left[1 - a \frac{G(x)}{G(0)} \right] \frac{G(y)}{\tau_p(y)}$$

$$K_2(x, y) = F(x) \frac{G(y) - G(x)}{\tau_p(y)}.$$

Il secondo membro della (15) è somma della funzione nota $f(x) (e^{\beta V_{BE}} - 1)$, nella quale il fattore $(e^{\beta V_{BE}} - 1)$ mette in evidenza la sollecitazione esterna V_{BE} , e di due altri termini, il primo caratteristico delle equazioni integrali di Fredholm ed il secondo delle equazioni di Volterra, con nuclei semplici $K_1(x, y)$ e $K_2(x, y)$ definiti per x e y entrambe variabili nell'intervallo $[0, w_e]$.

Il termine di Volterra può d'altra parte ridursi ad uno di Fredholm con l'artificio di sostituire il nucleo $K_2(x, y)$ con

$$K_2^*(x, y) = \begin{cases} K_2(x, y) & \text{per } y \leq x \\ 0 & \text{per } y > x \end{cases}$$

e pertanto l'equazione (15) può essere ricondotta, se si vuole, all'equazione integrale di Fredholm di seconda specie

$$(17) \quad p^*(x) = f(x) (e^{\beta V_{BE}} - 1) + \int_0^{w_e} K(x, y) p^*(y) dy,$$

avendo posto

$$(18) \quad K(x, y) = K_1(x, y) + \mathbf{1}(x-y) K_2(x, y) =$$

$$= \begin{cases} -\frac{F(x)G(x)}{\tau_p(y)} \left[1 - a \frac{G(y)}{G(0)} \right] & \text{per } y \leq x \\ -\frac{F(x)G(y)}{\tau_p(y)} \left[1 - a \frac{G(x)}{G(0)} \right] & \text{per } y > x \end{cases}$$

ed indicato con $\mathbf{1}(x)$ la funzione a gradino

$$\mathbf{1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

Si noti che il parametro a risulta necessariamente positivo e < 1 (s_p ha inoltre, generalmente, valori così elevati da potersi ritenere a prossimo a 1).

Di conseguenza, essendo necessariamente $0 \leq \frac{G(x)}{G(0)} \leq 1$, il nucleo $K(x, y)$ risulta a valori negativi.

Si rilevi inoltre che la riduzione dell'equazione (15) alla forma di Fredholm, con l'introduzione di una discontinuità di prima specie sulla bisettrice del piano xy , fa perdere al nucleo $K(x, y)$ il carattere semplice posseduto dai nuclei originali $K_1(x, y)$ e $K_2(x, y)$ e così preclude una ben nota soluzione in termini finiti della (17). La forma (17) è però utile in quanto riconduce il problema a un caso particolare, per $\lambda = 1$ e $g(x) = f(x)(e^{\beta V_{BE}} - 1)$, della equazione

$$(19) \quad p^*(x) = g(x) + \lambda \int_0^{w_e} K(x, y) p^*(y) dy,$$

di cui è ben nota l'esistenza e l'unicità della soluzione, con l'eccezione al più di un numero finito o di una infinità numerabile di valori di λ , nella sola ipotesi che il nucleo $K(x, y)$ sia di quadrato integrabile, ciò che è senz'altro verificato nel caso considerato. È noto inoltre che la soluzione della (19) può esprimersi con la formula

$$(20) \quad p^*(x) = g(x) + \lambda \int_0^{w_e} \frac{D(x, y; \lambda)}{D(\lambda)} g(y) dy,$$

ovviamente per ogni valore di λ che non sia uno zero di $D(\lambda)$, essendo $D(x, y; \lambda)$ e $D(\lambda)$ funzioni intere del parametro λ , definite da

$$D(x, y; \lambda) = K(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} \int_A K \begin{pmatrix} x, z_1, \dots, z_n \\ y, z_1, \dots, z_n \end{pmatrix} dz_1, \dots, dz_n$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} \int_A K \begin{pmatrix} z_1, \dots, z_n \\ z_1, \dots, z_n \end{pmatrix} dz_1, \dots, dz_n$$

È utile poi rilevare che, se risulta

$$(25) \quad w_e \sup |K(x, y)| < 1,$$

si può essere certi dell'esistenza e dell'unicità della soluzione ed allo stesso tempo della convergenza del metodo di risoluzione della (17) per successive approssimazioni o, ciò che è equivalente, del metodo di calcolo del nucleo risolvete $\Gamma(x, y)$ per mezzo dei nuclei iterati, che evita la valutazione dei determinanti con cui si esprimono $D(x, y; 1)$ e $D(1)$.

Tuttavia, avendo presente che il limite di solubilità dei droganti più comuni nel Silicio può per alcuni raggiungere l'ordine di grandezza di 10^{21} cm^{-3} , entro $[0, w_e]$ si può ritenere che si abbia $N \simeq N_D$ ed inoltre

$$\begin{aligned} 10^{16} < N_D < 10^{21} \text{ cm}^{-3} \\ 0, 2 < D_p < 15 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1} \\ 10^{-9} < \tau_p < 10^{-6} \text{ sec} \\ 5 \cdot 10^{19} < n_{ie}^2 < 5 \cdot 10^{21} \text{ cm}^{-6}, \end{aligned}$$

con andamenti effettivi di n_{ie}^2 , di D_p e di τ_p dipendenti dall'assegnata $N_D = N_D(x)$. Di conseguenza, tenuto conto dell'espressione (18) di $K(x, y)$ e del fatto che w_e è dell'ordine di $1 \mu\text{m}$, è facile verificare che la (25) non risulta necessariamente soddisfatta per qualsiasi forma di $N_D = N_D(x)$ e che perciò la convergenza del metodo delle successive approssimazioni deve essere accertata di volta in volta.

In un successivo lavoro, dove si tratterà il caso particolare di maggiore rilievo, quello dei profili $N_D = N_D(x)$ ottenuti per diffusione di droganti in fase di gas nel Silicio solido ad elevate temperature, si dimostrerà che la (25) è soddisfatta nella maggiore parte delle circostanze che interessa considerare e che la convergenza del metodo iterativo è spesso assai rapida.

È inoltre immediato riconoscere che, assumendo $f(x)(e^{\beta V_{BE}} - 1)$ come approssimazione di ordine zero, la prima approssimazione del suddetto metodo,

$$(26) \quad p_1^*(x) = \left\{ f(x) + \int_0^{w_e} K(x, y) f(y) dy \right\} (e^{\beta V_{BE}} - 1),$$

coincide con l'espressione (23) di $p^*(x)$, quando si arrestino al primo termine gli sviluppi di $D(x, y; 1)$ e di $D(1)$, rispettivamente al numeratore ed al denominatore di $\Gamma(x, y)$.

CONCLUSIONI

Con la sola riserva, in relazione ai possibili andamenti di $N = N(x)$, che $\lambda = 1$ non risulti compreso fra gli autovalori della (21), oppure sotto la condizione (25) che garantisce, oltre all'esistenza ed all'unicità della soluzione, anche

la convergenza del metodo delle successive approssimazioni, il procedimento proposto porta ad espressioni analitiche di $p^*(x)$ e di $J_p(w_e)$ utili nell'esame qualitativo dei fenomeni considerati, che precede ed orienta le valutazioni numeriche. Inoltre, ai fini di queste ultime valutazioni, il medesimo procedimento ha la peculiarità di ricondurre il calcolo, a meno di una quadratura per quanto riguarda $p^*(x)$ o di due per quanto attiene a $J_p(w_e)$, alla sommazione delle serie che esprimono $D(x, y; 1)$ e $D(1)$, i cui termini sono espressi da determinanti; oppure, quando risulti convergente il procedimento delle successive approssimazioni, alla iterazione di una quadratura; oppure ancora ad altre tecniche di risoluzione, ad esempio mediante polinomi ortogonali.

Se l'analisi almeno qualitativa dei fenomeni può essere appoggiata alla soluzione di prima approssimazione (26) che, tenuto conto delle espressioni di $f(x)$ e di $K(x, y)$, può scriversi

$$(27) \quad p_1^*(x) = \frac{n_{ie}^2(x)}{N(x)} \left\{ \left[1 - a \frac{G(x)}{G(0)} \right] - \int_0^{w_e} \frac{n_{ie}^2(y)}{N(y) \tau_p(y)} \left[1 - a \frac{G(y)}{G(0)} \right] \begin{cases} \left[1 - a \frac{G(y)}{G(0)} \right] G(x) & y \leq x \\ \left[1 - a \frac{G(x)}{G(0)} \right] G(y) & y > x \end{cases} dy \right\} (e^{\beta V_{BE}} - 1),$$

si riconoscono in modo pressochè immediato alcune notevoli circostanze.

Ad esempio si vede che $p_1^*(x)$ è proporzionale al rapporto $\frac{n_{ie}^2(x)}{N(x)}$ e che, sotto il segno di integrale, la concentrazione dei donatori $N_D \simeq N$ compare a denominatore moltiplicata per $\tau_p(y)/n_{ie}^2(y)$; inoltre il fattore

$$(28) \quad \frac{n_{ie}^2(y)}{N(y) \tau_p(y)}$$

viene pesato, sempre sotto il segno di integrale, da $\left[1 - a \frac{G(y)}{G(0)} \right]^2$ sul segmento $[0, x]$ dell'intervallo di integrazione e da $\left[1 - a \frac{G(y)}{G(0)} \right] G(y)$ su $[x, w_e]$.

D'altra parte è noto che τ_p diminuisce notevolmente con l'aumentare di N_D a cagione dell'effetto Auger, mentre gli altri due effetti citati in precedenza (contrazione del gap di energie fra banda di valenza e banda di conduzione e degenerazione del gas dei portatori maggioritari) producono complessivamente un sensibile incremento di n_{ie}^2 . Si capisce quindi come, intervenendo N per il tramite di $n_{ie}^2(x)/N(x)$ e del fattore (28), un incremento di N_D possa avere conseguenze assai più modeste di quelle che si avrebbero in assenza dei suddetti

effetti; ciò che è appunto quanto si osserva sperimentalmente. Inoltre, tenuto conto dell'espressione (8) di $G(x)$ e del fatto che risulta $a \simeq 1$, ci si potrebbe rendere conto, sempre in via qualitativa, anche di altri interessanti fenomeni, l'esame dei quali, appoggiato a casi particolari di speciale rilievo, esula tuttavia dagli scopi di questa Nota, che ha inteso solo indicare una promettente via di soluzione.

BIBLIOGRAFIA

- [1] J. I. PANKOVE (1960) - « Phys. Rev. Lett. », 4, 20.
- [2] M. CARDONA, M. S. SOMMERS (1961) - « Phys. Rev. », 122, 1382.
- [3] C. HAAS (1962) - « Phys. Rev. », 125, 1965.
- [4] E. O. KANE (1963) - « Phys. Rev. », 131, 79.
- [5] T. N. MORGAN (1965) - « Phys. Rev. », 139, A 343.
- [6] V. L. BONCH-BRUYEVICH (1966) - *The electronic Theory of heavily doped semiconductors*. Elsevier Publ.
- [7] J. W. SLOTBOOM e H. C. DE GRAAFF (1976) - « Solid-State Electronics », 19, 857.
- [8] F. A. LINDHOLM, A. NEUGROSCHEL, C. T. SAH, M. P. GODLEWSKI e H. W. BRANDHORST JR. (1977) - « IEEE Trans. Electron Devices », ED 24, 402.
- [9] H. P. D. LANYON e R. A. TUFT (1979) - « IEEE Trans. Electron Devices », ED 26, 1014.
- [10] G. D. MAHAN (1980) - « J. Appl. Phys. », 51, 2634.
- [11] R. P. MERTENS, J. L. VAN MEERBERGEN, J. F. NIJS e R. J. VAN OVERSTRAETEN (1980) - « IEEE Trans. Electron Devices », ED 27, 949.
- [12] D. F. NELSON, J. D. CUTHBERT, P. J. DEAN e D. G. THOMAS (1966) - « Phys. Rev. Letters », 27, 1262.
- [13] N. G. NILSSON e K. G. SVANTESSON (1972) - « Solid-State Commun. », 11, 155.
- [14] W. W. SHENG (1975) - « IEEE Trans. Electron Devices », ED 22, 25.
- [15] J. DZIEWIOR e W. SCHMID (1977) - « Appl. Phys. Lett. », 31, 346.
- [16] D. REDFIELD (1978) - « Appl. Phys. Lett. », 33, 531.
- [17] G. BACCARANI (1975) - « Solid-State Electronics », 18, 469.
- [18] S. M. SZE (1981) - « Physics of Semiconductor Devices », Wiley, par. 1.4.
- [19] H. J. DE MAN (1971) - « IEEE Trans. Electron Devices », ED 18, 833.
- [20] R. J. VAN OVERSTRAETEN, H. J. DE MAN e R. P. MERTENS (1973) - « IEEE Trans. Electron Devices », ED 20, 290.
- [21] R. P. MERTENS, H. J. DE MAN e R. J. VAN OVERSTRAETEN (1973) - « IEEE Trans. Electron Devices », ED 20, 772.
- [22] J. W. SLOTBOOM (1977) - « Solid-State Electronics », 20, 167.
- [23] H. C. DE GRAAFF, J. W. SLOTBOOM e A. SCHMITZ (1977) - « Solid-State Electronics », 20, 515.
- [24] R. AMANTEA (1980) - « IEEE Trans. Electron Devices », ED 27, 1231.
- [25] J. G. FOSSUM e M. A. SHIBIB (1981) - « IEEE Trans. Electron Devices », ED 28, 1018.