Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Nicola Rodino

Sul teorema di Gelfand-Mazur

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **72** (1982), n.1, p. 1–5.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1982_8_72_1_1_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1982.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 9 gennaio 1982

Presiede il Presidente della Classe GIUSEPPE MONTALENTI

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Matematica. — *Sul teorema di Gelfand–Mazur.* Nota di NICOLA RODINÒ, presentata (*) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — In this note we produce a complex algebra without characters and which does not contain a proper extension of the complex number field.

1. Le seminorme di algebra sulle algebre complesse, essendo soggette alla proprietà submoltiplicativa oltre che alla proprietà di essere una seminorma, sono particolarmente legate alla struttura algebrica delle algebre. Il teorema che più mette in rilievo tale legame è, a nostro avviso, il teorema di Gelfand–Mazur e pertanto è esso l'oggetto del nostro studio, avendo lo scopo di contribuire a chiarire le relazioni intercorrenti fra le seminorme di algebra e le proprietà algebriche delle algebre.

Sia A un'algebra commutativa sul corpo dei numeri complessi. Si può riformulare il teorema di Gelfand–Mazur nella versione:

Se A *contiene un'estensione propria di* **C**, *allora non esiste alcuna seminorma di algebra su* A.

Nel corso di questa Nota dimostreremo i teoremi che seguono:

TEOREMA 1. *Sia* A *un'algebra commutativa e semilocale su* **C**. A *contiene una estensione propria di* **C** *se e solo se non esiste alcuna seminorma di algebra su* A.

(*) Nella seduta del 9 gennaio 1982.

TEOREMA 2. *Esiste un'algebra complessa sulla quale non esistono seminorme di algebra e che non contiene estensioni proprie di* **C**.

Il Teorema 2 asserisce che la condizione per un'algebra complessa di contenere un'estensione propria di **C** non è necessaria affinchè non esistano su essa seminorme di algebra, mentre il Teorema 1 asserisce che tale condizione è necessaria nel caso l'algebra sia commutativa e semilocale. Pertanto il Teorema di Gelfand–Mazur si inverte nel caso semilocale ma non in generale. Per le questioni riguardanti le seminorme di algebra su algebre di funzioni, rinviamo ad una precedente nota [4] nella quale sono stati ottenuti risultati soddisfacenti.

2. Nel corso di questa nota **C** è il corpo dei numeri complessi e N è l'insieme dei numeri naturali. Nel seguito sarà sempre sottointeso che le algebre considerate siano unifere. Per le nozioni di seminorma di algebra, spettro di un elemento, caratteri di un'algebra e per quelle relative alla struttura uniforme associata ad una seminorma, si rimanda a [2]. Per completezza cominceremo col dimostrare la versione del teorema di Gelfand–Mazur già citata.

Sia A *un'algebra commutativa su* **C**. *Se* A *contiene un'estensione propria di* **C**, *allora non esiste alcuna seminorma di algebra su* A.

Dimostrazione. Sia p una seminorma di algebra su A e $k \neq \mathbf{C}$ un corpo contenuto in A. La restrizione di p a k è una norma poichè l'insieme degli x appartenenti a k tali che $p(x) = 0$ è un ideale proprio di k (si suppone $p(1) = 1$) e pertanto l'ideale banale. Per il teorema di Gelfand–Mazur si dovrebbe avere $k = \mathbf{C}$, contrariamente all'ipotesi. Q.E.D.

Dimostriamo a questo punto due proposizioni, delle quali si farà uso nel seguito.

PROPOSIZIONE 1. *Sia* A *un'algebra commutativa su* **C**. A *non possiede caratteri se e solo se non ammette seminorme di algebra.*

Dimostrazione. L'enunciato può esprimersi sotto la forma equivalente:

Su A *esiste un carattere se e solo se esiste una seminorma di algebra.*

$\rightarrow$) Se χ è un carattere di A, $a \rightarrow |\chi(a)|$ è una seminorma di algebra.

$\leftarrow$) Sia $\tilde{A}$ il completamento di A rispetto ad una seminorma di algebra e sia $j : A \rightarrow \tilde{A}$ il morfismo canonico. $\tilde{A}$ è un'algebra di Banach ed ha almeno un carattere χ. L'applicazione $\chi \circ j : A \rightarrow \mathbf{C}$ è allora un carattere di A. Q.E.D.

PROPOSIZIONE 2. *Sia* A *un'algebra su un corpo algebricamente chiuso* k. A *contiene un'estensione propria di* k *se e solo se possiede un elemento il cui spettro è vuoto.*

Dimostrazione. $\rightarrow$) Sia K un'estensione propria di k contenuta in A. Se x appartiene a K ma non a k, per ogni $\lambda \in k$, $x - \lambda$ è diverso da zero e quindi, essendo un elemento di K, è invertibile. Pertanto $sp(x) = \varnothing$.

$\leftarrow$) Sia a appartenente a A tale che $sp(a) = \varnothing$. Si consideri il morfismo f: $k[X] \to A$ tale che $f(X) = a$. Se $P \in k[X]$ è diverso da 0, $f(P)$ è invertibile in A. Infatti, essendo k algebricamente chiuso, P è prodotto di fattori di primo grado. Sia $P = \alpha(X - \xi_1) \cdot (X - \xi_2) \cdots (X - \xi_n)$. È $f(P) = \alpha f(X - \xi_1) \cdots f(X - \xi_n) = \alpha(a - \xi_1) \cdots (a - \xi_n)$. Poichè ciascuno degli $a - \xi_i$ è invertibile, tale risulta $f(P)$. Esiste pertanto ([1], Cor. 1 della Prop. 2, p. 77) un morfismo unifero $\tilde{f} : k(X) \to A$ che estende f. L'immagine di $\tilde{f}$ è un corpo che contiene propriamente k. Q.E.D.

TEOREMA 1. *Sia* A *un'algebra commutativa e semilocale su* **C**. A *contiene una estensione propria di* **C** *se e solo se non ammette alcuna seminorma di algebra.*

Dimostrazione. $\to$) Segue dal teorema di Gelfand-Mazur.

$\leftarrow$) Siano $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ gli ideali massimali di A e siano $p_i : A \to A/\mu_i$ le proiezioni canoniche. Per il teorema cinese del resto, l'applicazione $X_i p_i : A \to X_i A/\mu_i$ è suriettiva. Per ipotesi A non ammette seminorme di algebra e pertanto per la Proposizione 1, non possiede caratteri. Ne segue che ogni ideale massimale è ipercomplesso, cioè l'algebra quozientizzata per esso è un'estensione propria di **C**. Tenuto conto di ciò, per ogni i esiste $\xi_i \in A/\mu_i$ e $\xi_i \notin \mathbf{C}$. Sia $a \in A$ tale che $p_i(a) = \xi_i$ per ogni i. Se $z \in \mathbf{C}$, è $p_i(a - z) = \xi_i - z \neq 0$, quindi $a - z$ non appartiene ad alcun ideale massimale di A, vale a dire è invertibile. Pertanto $sp(a) = \varnothing$ e applicando la Proposizione 2, A contiene un'estensione propria di **C**. Q.E.D.

A questo punto, prima di procedere oltre, è opportuno riportare alcuni risultati, per la dimostrazione dei quali si rimanda a [3].

Sia X un insieme e sia A l'algebra di tutte le funzioni complesse definite su X. Vi è una corrispondenza biunivoca fra gli ideali massimali di A e gli ultrafiltri di X, che è così definita: ad un ideale massimale di A si associa l'ultrafiltro costituito dall'insieme delle retroimmagini di $\{0\}$ mediante gli elementi dell'ideale e ad un ultrafiltro di X si associa l'ideale di A delle funzioni che si annullano su un elemento dell'ultrafiltro.

Un ideale massimale μ di A si dice razionale (irrazionale o ipercomplesso) se $A/\mu \cong \mathbf{C}$ ($A/\mu \not\cong \mathbf{C}$). È del tutto evidente che, se μ è razionale, ogni $f \in A$ è costante su un elemento dell'ultrafiltro corrispondente a μ. Un ultrafiltro Ξ si dice fisso (libero) se $\cap\, \Xi \neq \varnothing$ ($= \varnothing$). Se il cardinale di X è non misurabile, ad ogni ideale massimale razionale di A corriponde un ultrafiltro fisso ([3], Ch. 12, p. 161), il viceversa essendo del tutto banale.

TEOREMA 2. *Esiste un'algebra complessa sulla quale non esistono seminorme di algebra e che non contiene estensioni proprie di* **C**.

Dimostrazione. Prima di procedere alla dimostrazione del teorema, preferiamo chiarire l'idea sulla quale si basa. Per il Teorema 1 è necessario iniziare col considerare un'algebra con infiniti ideali massimali irrazionali. Sia B una tale algebra e sia Ω una famiglia infinita di ideali massimali irrazionali di B. Detto S il complementare dell'unione di Ω, l'anello C delle frazioni di B relativamente all'insieme moltiplicativo S non ha ideali massimali razionali e di conseguenza non ammette seminorme di algebra. Tuttavia in C potrebbero esserci elementi dallo spettro vuoto e di conseguenza C conterrebbe un'estensione propria di **C**. Perchè ciò non si verifichi, è necessario che per ogni $b \in B$ esista $z \in \mathbf{C}$ tale che $b - z$ non sia invertibile in C e quindi appartenga ad un ideale della famiglia Ω. Come si vedrà nel corso della dimostrazione, esiste un'algebra di funzioni complesse aventi le proprietà necessarie per l'algebra B.

Sia X un insieme infinito di cardinale non misurabile (ad esempio N) e sia $(Y_n)_{n \in N}$ una famiglia numerabile di sottoinsiemi infiniti di X due a due disgiunti. Per ogni $n \in N$, sia β_n un ultrafiltro libero su X tale che $Y_n \in \beta_n$. Sia A l'algebra di tutte le funzioni complesse definite su X. Indichiamo con B la sottoalgebra di A costituita dalle funzioni che, fatta eccezione per un numero finito di ultrafiltri, sono costanti su un elemento di ogni ultrafiltro β_n ($f \in B$ se e solo se esiste $\bar{n}$ tale che, per ogni $n > \bar{n}$, esiste $F_n \in \beta_n$ tale che $f \equiv \text{cost.}$ su F_n). Per ogni ideale massimale μ' di A esiste un ultrafiltro β su X tale che $\mu' = \{f \in A\colon$ esiste $F \in \beta$ tale che $f_{|F} \equiv 0\}$ ([3], Ch. 2, p. 25). Essendo l'algebra B la parte più importante della costruzione di un'algebra soddisfacente le proprietà richeste dell'enunciato del teorema, sospendiamo a questo punto la dimostrazione per riportare due lemmi che caratterizzano gli ideali massimali dell'algebra B.

LEMMA 1. *Per ogni ideale massimale* μ *di* B *esiste un ultrafiltro* β *di* X *tale che* μ *sia l'insieme delle funzioni appartenenti a* B *che si annullano su un insieme appartenente a* β.

Dimostrazione. L'estensione b^e a A di un ideale proprio b di B è un ideale proprio di A. Ragioniamo per assurdo. Se si avesse $1 \in b^e$, esisterebbero $a_1, a_2, \cdots, a_m$ appartenenti a A e $b_1, b_2, \cdots, b_m$ appartenenti a b tali che: $1 = a_1 b_1 + \cdots + a_m b_m$. Esiste $\bar{n}$ tale che, per ogni $n > \bar{n}$, esiste F_n appartenente a β_n e contenuto in Y_n, le restrizioni al quale degli b_i sono costanti. Per ogni $n > \bar{n}$, essendo $F_n \neq \varnothing$, sia $x_n \in F_n$. Per $1 \leq i \leq m$, le funzioni su X così definite: $\bar{a}_i(x) = a_i(x_n)$ se $x \in F_n$ e $\bar{a}_i(x) = a_i(x)$ se x non appartiene all'unione degli F_n, appartengono a B. Tali definizioni sono ben poste, essendo gli F_n due a due disgiunti. Poichè è $1 = a_1(x_n) b_1(x_n) + a_2(x_n) b_2(x_n) + \cdots \cdots + a_m(x_n) b_m(x_n)$, è anche $1 = \bar{a}_1(x) b_1(x) + \bar{a}_2(x) b_2(x) + \cdots + \bar{a}_m(x) b_m(x)$ per x appartenente a F_n e quindi per ogni $x \in X$. Ciò equivale a dire che $1 = \bar{a}_1 b_1 + \bar{a}_2 b_2 + \cdots + \bar{a}_m b_m$ e che pertanto $1 \in b$, contrariamente alle ipotesi.

Se μ è un ideale massimale di B, la sua estensione μ^e a A è un ideale proprio di A, pertanto contenuto in un ideale massimale μ' di A. La contrazione di μ' a B è un ideale proprio di B contentente μ e quindi uguale a μ. Sia β l'ultrafiltro associato a μ'. Dalle considerazioni fatte risulta: $\mu = \{f \in A : f \in B$ & esiste $F \in \beta$ tale che $f_{|F} \equiv 0\}$. Q.E.D.

LEMMA 2. *Un ultrafiltro associato ad un ideale massimale razionale di* B *è necessariamente fisso.*

Dimostrazione. Sia μ l'ideale massimale razionale e β l'ultrafiltro ad esso associato come descritto nel Lemma 1. Procediamo per assurdo. Supponiamo che β sia libero. Poichè X ha cardinalità non misurabile, l'ideale μ' associato in A a β è irrazionale ([3], Ch. 8 e Ch. 12), quindi esiste $f \in A$ la cui classe in A/μ' non appartiene a **C** e che pertanto non è costante su nessun insieme di β. Distinguiamo due casi: 1) Esiste $\bar{n}$ tale che $\beta = \beta_{\bar{n}}$ e 2) Per ogni n, $\beta \neq \beta_n$.

1) Se $g \equiv f$ su $Y_{\bar{n}}$ e $g \equiv 0$ sul complementare di $Y_{\bar{n}}$, $g \in B$ e g non è costante su nessun insieme di β.

2) Per ogni n, sia V_n contenuto in Y_n, $V_n \in \beta_n$ e $V_n \notin \beta$. Indicata V l'unione degli V_n, sia $g \equiv f$ sul complementare di V e $g \equiv n$ su V_n. Poichè $B/\mu = \mathbf{C}$, esiste $W \in \beta$ tale che g è costante su W. È chiaro che W può intersecare al più uno degli V_n, sia esso $V_{\bar{n}}$. Essendo β un ultrafiltro distinto da $\beta_{\bar{n}}$, esiste Z contenuto in W tale che la sua intersezione con $V_{\bar{n}}$ sia vuota. Poichè Z intersecato V è vuoto, g e f coincidono su Z. Ciò è contraddittorio, dal momento che f non è costante su nessun insieme di β. Q.E.D.

Con l'ausilio dei due lemmi, possiamo riprendere la dimostrazione del teorema. Per ogni n, sia μ_n l'ideale massimale di B associato all'ultrafiltro β_n. Posto $S = \complement \bigcup_n \mu_n$, dimostriamo che l'algebra $C = S^{-1} B$ non ha caratteri. Se χ fosse un carattere di C, notando con j il morfimo canonico di B in C, $\chi \circ j$ dovrebbe essere un carattere di B, quindi, per il Lemma 2, esisterebbe un $\bar{x} \in X$ tale che, per ogni $f \in B$, $\chi(j(f)) = f(\bar{x})$. La funzione h caratteristica del complementare di $\{\bar{x}\}$ appartiene a S poichè, essendo gli ultrafiltri β_n liberi, $\{\bar{x}\} \notin \beta_n$ e di conseguenza $Y_n/\{\bar{x}\} \in \beta_n$ e, valendo su tali insiemi 1, h è congrua a 1 modulo μ_n, qualunque sia n. Ciò è assurdo, poichè si ha $\chi(j(h)) = h(\bar{x}) = 0$ pur essendo $j(h)$ invertibile in C. Resta solo da dimostrare che ogni elemento di C ha spettro non vuoto.

Sia $f/g \in C$, con $f \in B$ e $g \in S$. Esistono $\bar{n} \in N$, a e b appartenenti a **C**, $b \neq 0$ ed esiste $U \in \beta_{\bar{n}}$, tali che su U sia $f \equiv a$ e $g \equiv b$. Posto $\lambda = a/b$, $f - \lambda g$ appartiene a $\mu_{\bar{n}}$ e pertanto $f/g - \lambda$ appartiene all'estensione di $\mu_{\bar{n}}$ in C ([1], Ch. 2). Ciò dimostra che $f/g - \lambda$ non è invertibile in C e pertanto $\lambda \in sp_C(f/g)$. A questo punto il teorema segue dalle Proposizioni 1 e 2. Si è infatti costruita un'algebra complessa che non possiede caratteri, ogni elemento della quale ha spettro non vuoto. Q.E.D.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOURBAKI, *Algèbre commutative*, Fasc. XXVII.
[2] BOURBAKI, *Théories spectrales*, Fasc. XXXII.
[3] GILLMAN-JERISON, Rings of continuous functions.
[4] N. RODINÒ, (1981) - *Seminorme submoltiplicative su algebre di funzioni* - « Atti Acc. Lincei - Rend. Sc. fis. mat. e nat. », s. 8, *70*, 49-54.