Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giulio Mattei

Sui moti per eliche circolari in Meccanica dei plasmi

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **70** (1981), n.6, p. 265–270.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1981_8_70_6_265_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1981.

Magnetofluidodinamica. — *Sui moti per eliche circolari in Meccanica dei plasmi.* Nota di GIULIO MATTEI (*), presentata (**) dal SOCIO D. GRAFFI.

SUMMARY. — In this paper we extend to Plasma Mechanics the study of the hydrodynamic steady motions in which the streamlines are circular helixes. The plasma is described by the magnetofluiddynamic equations with the Hall effect. Velocity and magnetic fields (and, in correspondence, the pressure field) that make such motions possible are determined. So a class of exact solutions of the magnetofluiddynamic equations with the Hall effect is pointed out.

1. INTRODUZIONE E FORMULAZIONE DEL PROBLEMA

La ricerca di classi di soluzioni esatte delle equazioni della Magnetofluidodinamica (MFD) (1) è stata (ed è) oggetto di indagine da parte di non pochi studiosi. Con la presente Nota si è cercato di portare a questo settore di ricerca un contributo che, ancorchè circoscritto, è sembrato non privo di interesse.

In [2] (nn. 4, 5) è stata messa in evidenza una classe di soluzioni esatte MFD corrispondente ad un moto stazionario per eliche circolari con un campo di velocità caratteristico di un moto alla Strakhovitch (2) e con un campo magnetico avente una opportuna struttura. In [2] il fluido è considerato omogeneo, incomprimibile, viscoso, ma dotato di conducibilità elettrica tanto grande da potersi ritenere infinita ed in assenza di effetto Hall. In [3] il risultato di [2] è stato esteso al caso di conducibilità elettrica finita, sempre però nell'ipotesi di assenza di effetto Hall.

In questa Nota si riprende la questione rinunciando all'ipotesi di assenza di effetto Hall (3). Specificatamente si dimostra che per un plasma descritto dalle equazioni della MFD *non linearizzate*, omogeneo, incomprimibile, viscoso (stokesiano lineare), soggetto a forze di massa di origine non elettromagnetica conservative, dotato di conducibilità elettrica finita ed in presenza di effetto Hall,

(*) Meccanica Razionale, Facoltà di Ingegneria dell'Università di Pisa.
(**) Nella seduta del 26 giugno 1981.
(1) Per la nozione di soluzione esatta si rimanda a [1] Sect. 4 a, dove tale nozione è data e commentata per il caso puramente idrodinamico; ma essa è spontaneamente estendibile, mutatis mutandis, alla MFD.
(2) Per quanto concerne tale moto nel caso puramente idrodinamico, cfr. [1] Sect. 30 α).
(3) È nota l'importanza dell'effetto Hall nei plasmi (cfr. per es. [4], anche per una ampia bibliografia al riguardo).

sono possibili moti stazionari per eliche circolari e si determinano dei campi di velocità e dei campi magnetici (ed i corrispondenti campi di pressione) che rendono possibili i moti suddetti. La Nota termina con una osservazione sui moti stazionari MFD i cui campi di velocità e campi magnetici competono sia ad un fluido non viscoso, perfetto conduttore dell'elettricità ed in assenza di effetto Hall che ad un fluido viscoso, dotato di conducibilità elettrica finita ed in presenza di effetto Hall (supposti entrambi i fluidi omogenei incomprimibili).

2. Equazioni di base

Le equazioni non lineari di base sono (in unità di Gauss)

$$\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{\omega} - \operatorname{grad}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} - \mathrm{U}\right) + \frac{1}{4\pi\mu\rho}(\operatorname{rot}\mathbf{B}) \wedge \mathbf{B} + \nu\nabla^2\boldsymbol{v} = 0 \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0 \tag{2.2}$$

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \wedge \mathbf{B}) + \nu_m \nabla^2\mathbf{B} + \beta \operatorname{rot}(\mathbf{B} \wedge \operatorname{rot}\mathbf{B}) = 0 \tag{2.3}$$

con la condizione

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0\,. \tag{2.4}$$

In esse $\boldsymbol{v}$ è il campo di velocità, $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\boldsymbol{v}$ il vortice, p la pressione, ρ la densità (costante), U il potenziale delle forze di massa di origine non elettromagnetica riferito all'unità di massa, μ la permeabilità magnetica (costante), $\mathbf{B}$ il vettore induzione magnetica, ν il coefficiente di viscosità cinematica (costante), $\nu_m = c^2/4\,\pi\mu\sigma$ il coefficiente (costante) di viscosità magnetica (c velocità della luce nel vuoto, σ conducibilità elettrica, costante), $\beta = c^2\,\beta_{\mathrm{H}}/4\,\pi\mu$ con β_{H} coefficiente di Hall.

Le (2.1), (2.2), (2.3) costituiscono un sistema non lineare di 7 equazioni differenziali alle derivate parziali in 7 funzioni incognite scalari: le tre componenti di $\boldsymbol{v}$, le tre di $\mathbf{B}$ e p.

Prendendo il rotore di ambo i membri della (2.1) si ottiene la

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}) - \nu\nabla^2\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{4\,\pi\mu\rho}\operatorname{rot}(\mathbf{B} \wedge \operatorname{rot}\mathbf{B}) = 0\,. \tag{2.5}$$

Le equazioni (2.3) e (2.5) esprimono le condizioni caratteristiche affinchè un campo di velocità $\boldsymbol{v}$ ed un campo magnetico $\mathbf{B}$ solenoidali competano ad un moto MFD con effetto Hall di un fluido viscoso incomprimibile. In analogia con la nomenclatura idrodinamica (cfr. [1], p. 3) chiamiamo la (2.5) « equazione di compatibilità ».

Determinata una soluzione solenoidale $(\boldsymbol{v}\,,\mathbf{B})$ del sistema (2.5)–(2.3), la pressione p si ricava dalla (2.1) con una quadratura.

3. SOLUZIONE DEL PROBLEMA

Introdotta una terna di coordinate cilindriche ortogonali $T(0\,; r\,, \varphi\,, z)$ di versori $\boldsymbol{e}_r\,, \boldsymbol{e}_\varphi\,, \boldsymbol{e}_z\,,$ per i moti per eliche circolari si ha

$$\boldsymbol{v} = v_\varphi(r)\,\boldsymbol{e}_\varphi + v_z(r)\,\boldsymbol{e}_z\,. \tag{3.1}$$

Per (3.1) la (2.2) è identicamente soddisfatta e sussistono le

$$\left\{\begin{aligned}
&\boldsymbol{\omega} = -\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r}\,\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r v_\varphi)\,\boldsymbol{e}_z\\
&\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{\omega} = \operatorname{grad}\left(\frac{v^2}{2} + \int \frac{v_\varphi^2}{r}\,\mathrm{d}r\right)\\
&\nabla^2\boldsymbol{v} = \left(v_\varphi'' + \frac{v_\varphi'}{r} - \frac{v_\varphi}{r^2}\right)\boldsymbol{e}_\varphi + \left(v_z'' + \frac{v_z'}{r}\right)\boldsymbol{e}_z\\
&\operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{v}) = 0\\
&\nabla^2\boldsymbol{\omega} = -\left(v_z''' + \frac{v_z''}{r} - \frac{v_z'}{r^2}\right)\boldsymbol{e}_\varphi + \left(v_\varphi''' + \frac{2\,v_\varphi''}{r} - \frac{v_\varphi'}{r^2} + \frac{v_\varphi}{r^3}\right)\boldsymbol{e}_z\,.
\end{aligned}\right. \tag{3.2}$$

Per (3.2), la (2.1) e la (2.5) assumono la forma

$$\begin{aligned}
&-\operatorname{grad}\left(\frac{p}{\rho} - \int\frac{v_\varphi^2}{r}\,\mathrm{d}r - \mathrm{U}\right) + \frac{1}{4\,\pi\mu\rho}(\operatorname{rot}\mathbf{B})\wedge\mathbf{B} +\\
&+\nu\left(v_\varphi'' + \frac{v_\varphi'}{r} - \frac{v_\varphi}{r^2}\right)\boldsymbol{e}_\varphi + \nu\left(v_z'' + \frac{v_z'}{r}\right)\boldsymbol{e}_z = 0
\end{aligned} \tag{2.1'}$$

$$\begin{aligned}
&-\nu\left(v_\varphi''' + 2\,\frac{v_\varphi''}{r} - \frac{v_\varphi'}{r^2} + \frac{v_\varphi}{r^3}\right)\boldsymbol{e}_z + \nu\left(v_z''' + \frac{v_z''}{r} - \frac{v_z'}{r^2}\right)\boldsymbol{e}_\varphi +\\
&+\frac{1}{4\,\pi\mu\rho}\operatorname{rot}(\mathbf{B}\wedge\operatorname{rot}\mathbf{B}) = 0\,.
\end{aligned} \tag{2.5'}$$

Cerchiamo, se esistono, classi di soluzioni esatte per le quali sia

$$\mathbf{B} = \mathrm{B}_\varphi(r)\,\boldsymbol{e}_\varphi + \mathrm{B}_z(r)\,\boldsymbol{e}_z\,. \tag{3.3}$$

Da (3.3) segue

$$\mathbf{B}\wedge\operatorname{rot}\mathbf{B} = \operatorname{grad}\left(\frac{\mathrm{B}^2}{2} + \int\frac{\mathrm{B}_\varphi^2}{r}\,\mathrm{d}r\right). \tag{3.4}$$

La (2.4) resta identicamente soddisfatta dalla (3.3) e da (2.5′) seguono le

$$v_\varphi''' + 2\,\frac{v_\varphi''}{r} - \frac{v_\varphi'}{r^2} + \frac{v_\varphi}{r^3} = 0 \tag{3.5}$$

$$v_z''' + \frac{v_z''}{r} - \frac{v_z'}{r^2} = 0\,. \tag{3.6}$$

L'integrale generale della (3.5) è dato dalla

$$v_\varphi = \frac{A}{r} + Cr + Dr\log r \tag{3.7}$$

e quello della (3.6) dalla

$$v_z = E\log r + Fr^2 + G\,, \tag{3.8}$$

con A, C, D, E, F, G costanti arbitrarie.

La (2.3), avendosi per (3.1) e (3.3) $\operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \wedge \mathbf{B}) = 0$ e tenuto conto di (3.4), assume la forma

$$\nabla^2 \mathbf{B} = 0\,. \tag{3.9}$$

La (3.9) proiettata su $\boldsymbol{e}_r$ dà un'identità; proiettata su $\boldsymbol{e}_\varphi$ dà

$$B''_\varphi + \frac{B'_\varphi}{r} - \frac{B_\varphi}{r^2} = 0\,, \tag{3.10}$$

il cui integrale generale è

$$B_\varphi = Hr + \frac{K}{r}\,, \tag{3.11}$$

con H e K costanti arbitrarie; proiettata su $\boldsymbol{e}_z$ dà

$$B''_z + \frac{B'_z}{r} = 0\,, \tag{3.12}$$

il cui integrale generale è

$$B_z = I\log r + L\,, \tag{3.13}$$

con I ed L costanti arbitrarie.

Passiamo ora alla determinazione della pressione. Da (2.1′) per (3.4), (3.7) e (3.8) segue

$$\frac{p}{\rho} - \int \frac{v_\varphi^2}{r}\,dr - U = 2\,\nu D\varphi + 4\,\nu Fz - \frac{B^2}{8\,\pi\mu\rho} - \frac{1}{4\,\pi\mu\rho}\int \frac{B_\varphi^2}{r}\,dr\,. \tag{3.14}$$

Se, come supponiamo, U è una funzione uniforme del posto ed il fluido occupa un dominio dove φ può variare da 0 a $2\,\pi$, per evitare polidromia nella pressione p rispetto a cammini circondanti l'asse z (polidromia fisicamente inaccettabile) porremo $D = 0$.

Conseguentemente da (3.7) segue

$$v_\varphi = \frac{A}{r} + Cr \tag{3.15}$$

e da (3.14)

$$\frac{P}{\rho} - U = -\frac{A^2}{2}\frac{1}{r^2} + 2\,AC\log r + \frac{C^2}{2}r^2 + 4\,\nu Fz - \tag{3.16}$$

$$- \frac{1}{4\,\mu\pi\rho}\left(-\frac{K^2}{2}\frac{1}{r^2} + 2\,HK\log r + \frac{H^2 r^2}{2}\right) + M\,,$$

con M costante arbitraria, e $P = p + p_m$ con $p_m = B^2/8\pi\mu$ pressione magnetica (da considerarsi nota in base a (3.3), (3.11) e (3.13)). La (3.16) determina la pressione.

In definitiva possiamo concludere che per il plasma in esame sono possibili moti per eliche circolari con un campo di velocità (3.7)-(3.8) caratteristico di un moto alla Strakhovitch, con un campo magnetico dato dalle (3.3), (3.11) e (3.13) e con un campo di pressione dato dalla (3.16).

Le costanti arbitrarie saranno utilizzate per soddisfare condizioni al contorno relative a specifici problemi. Al riguardo osserviamo che se, in uno specifico problema, si richiede regolarità sull'asse Oz per il campo di velocità e per il campo magnetico, si deve porre $A = 0\,, E = 0\,, K = 0\,, I = 0$. Ne segue

$$\begin{cases} \boldsymbol{v} = Cr\,\boldsymbol{e}_\varphi + (Fr^2 + G)\,\boldsymbol{e}_z \\ \mathbf{B} = Hr\,\boldsymbol{e}_\varphi + L\,\boldsymbol{e}_z \end{cases} \tag{3.17}$$

con L $\boldsymbol{e}_z$ interpretabile come campo magnetico primario costante e $Hr\,\boldsymbol{e}_\varphi$ come campo magnetico indotto. In corrispondenza, per la pressione segue da (3.16)

$$\frac{p}{\rho} + \frac{H^2 r^2}{4\,\pi\mu\rho} - \frac{C^2 r^2}{2} - 4\,\nu Fz - U = \text{costante}\,. \tag{3.18}$$

4. UNA OSSERVAZIONE

In idrodinamica si è posto il problema di determinare esempi di moti stazionari i cui campi di velocità competano sia ad un fluido non viscoso che ad uno viscoso (supposti entrambi i fluidi omogenei incomprimibili). Classi di moti che godono di detta proprietà sono state determinate sia nel caso piano che in quello spaziale (cfr. per esempio [1], pp. 4, 19, 54, 102).

Sembra quindi non privo di interesse l'analogo problema in MFD. Specificatamente ci proponiamo di determinare esempi di moti stazionari MFD i cui campi di velocità e campi magnetici competano ad un fluido non viscoso, perfetto conduttore dell'elettricità ed in assenza di effetto Hall e ad un fluido viscoso, dotato di conducibilità elettrica finita e in presenza di effetto Hall (supposti entrambi i fluidi omogenei incomprimibili).

Un primo esempio è fornito proprio dal moto MFD per eliche circolari studiato nella presente Nota. Infatti per tale moto nelle equazioni (2.3) e (2.5) si annullano *separatamente* sia i termini contenenti ν, ν_m e β sia gli altri.

Altri due esempi si evidenziano subito come casi particolari del moto MFD precedente facendovi: 1) $v_z = 0$ (« rotazioni viscose » MFD, cfr. [6]; in particolare rotazioni rigide MFD, cfr. [5]); 2) $v_\varphi = 0$ (moto assialsimmetrico per rette parallele).

BIBLIOGRAFIA

[1] R. BERKER (1963) – *Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible*, « Handbuch der Physik », Band VIII/2, 1–384.

[2] G. MATTEI (1965) – *Su una classe di moti magnetofluidodinamici di un fluido viscoso*, « Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa », *19*, 429–441.

[3] R. BALLI e E. PUCCI (1978) – *Soluzioni esatte di Strakhovitch in Magnetofluidodinamica* « Riv. Mat. Univ. Parma », (4) *4*, 305–313.

[4] G. MATTEI (1980) – *Una introduzione allo studio dei modelli di tipo idrodinamico nella Fisica Matematica dei plasmi*, « Boll. Un. Mat. Ital. », (5) *17–A*, 1–24.

[5] G. MATTEI (1979) – *Sulle rotazioni rigide in Meccanica dei plasmi*, « Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. », (8) *67*, 404–407.

[6] G. MATTEI (1980) – *Sulle rotazioni viscose in Meccanica dei plasmi*, ibidem, (8) *69*, 142–146.