Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Louise Martin

Réseaux modulaires à structure variable

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **70** (1981), n.5, p. 215–222.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1981_8_70_5_215_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1981.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 9 maggio 1981

Presiede il Presidente della Classe GIUSEPPE MONTALENTI

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Matematica. — *Réseaux modulaires à structure variable* (*). Nota di LOUISE MARTIN, presentata (**) dal Socio E. MARTINELLI.

RIASSUNTO. — Si dà una formalizzazione dei moduli e delle reti modulari a struttura variabile. Si dimostra che per ogni automa finito a struttura variabile esiste una rete modulare a struttura variabile che lo simula. Si stabilisce il legame tra un automa a struttura variabile e l'automa a struttura variabile associato a una rete modulare a struttura variabile che lo simula.

1. INTRODUCTION

La décomposition et la simulation des automates constituent un problème qui a absorbé depuis les 15 dernières années l'attention des chercheurs du domaine de la théorie des automates et dont les implications théoriques et pratiques sont importantes.

Même si les réseaux modulaires ont été introduits pour décrire en termes mathématiques l'activité du cerveau [11], on les a développés dans le cadre de la théorie des automates [8, 15] et par la suite ils ont été utilisés dans la simulation des automates [2, 9, 10, 13].

Les automates à structure variable [4, 1, 14] se sont révélés un outil utile fournissant dans de nombreuses situations des solutions plus économiques au problème de « réalisation » des automates déterministes [3, 5, 6, 7, 12].

(*) Cette recherche a été subventionnée par l' Université du Québec à Trois-Rivières.

(**) Nella seduta del 9 maggio 1981.

Le but de cet article est de formaliser la notion de réseau modulaire à structure variable (II) (qui constitue une extension des réseaux modulaires) et de l'utiliser dans le cadre de la simulation des automates à structure variable (III).

2. Module et reseau modulaire a structure variable

Définition. Un d-module à structure variable est un triple

$$\mathcal{M} = (m, \mathrm{I}, \{\mu_n \mid n \in \mathrm{N}\})$$

où $m \in \mathrm{N}^*$, I est un ensemble non vide de cardinalité finie d, $\{\mu_n \mid n \in \mathrm{N}\}$ est une famille d'applications $\mu_n : \mathrm{I}^m \to \mathrm{I}$.

Un tel d-module est un appareil comprenant m lignes d'entrée $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m\} = \mathscr{E}$ et une seule ligne de sortie $\{\omega\} = \mathscr{S}$. Si au temps n, l'entrée est $(i_1, \cdots, i_m)$ alors au temps $n+1$, la sortie est $\mu_n(i_1, \cdots, i_m)$. Dans le cas particulier où pour tout $n \in \mathrm{N}$, $\mu_n = \mu$, on retrouve les d-modules décrits dans [8].

A tout d-module à structure variable peut être associé l'automate à structure variable $\mathscr{A} = [\mathrm{I}^m, \mathrm{I}, \mathrm{I}, \{f_n \mid n \in \mathrm{N}\}, (g_n \mid n \in \mathrm{N}\}]$ où pour tout $s \in \mathrm{I}$ et pour toute entrée $(i_1, \cdots, i_m) \in \mathrm{I}^m$

$$f_n(s, (i_1, \cdots, i_m)) = \mu_n(i_1, \cdots, i_m)$$

$$g_n(s, (i_1, \cdots, i_m)) = \mu_n(i_1, \cdots, i_m).$$

Nous pouvons donc parler de l'état d'un d-module à structure variable et cet état au temps $n+1$ coincide avec la sortie du d-module au temps $n+1$.

Définition. Soit $\{\mathcal{M}_j \mid j = 1, \cdots, r\}$ une famille finie non vide de d-modules à structure variable où $\mathcal{M}_j = (m_j, \mathrm{I}, \{\mu_n^j \mid n \in \mathrm{N}\}$, $\mathscr{E}_j = \{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{m_j}^j\}$. est l'ensemble des m_j lignes d'entrée et $\mathscr{S}_j = \{\omega^j\}$ est le singleton formé de la ligne de sortie de $\mathcal{M}_j$ $(j = 1, \cdots, r)$. Une partition Π de $\bigcup_{j=1}^{r} (\mathscr{E}_j \cup \mathscr{S}_j)$ est S-bornée si

i) pour tout $\mathrm{B} \in \Pi$, $\left|\mathrm{B} \cap \bigcup_{j=1}^{r} \mathscr{S}_j\right| \leq 1$

ii) il existe $\mathrm{B} \in \Pi$, $\left|\mathrm{B} \cap \bigcup_{j=1}^{r} \mathscr{S}_j\right| = 0$.

Définition. Un réseau modulaire à structure variable sur un alphabet I est un 5-uple $\mathscr{R} = [\{\mathcal{M}_j \mid j = 1, \cdots, r\}, \Pi, \hat{\mathscr{E}}, \hat{\mathscr{S}}, \{\hat{\nu}_n \mid n \in \mathrm{N}\}]$ où

i) $\{\mathcal{M}_j \mid j = 1, \cdots, r\}$ est une famille finie non vide de d-modules à structure variable $\mathcal{M}_j = (m_j, \mathrm{I}, \{\mu_n^j \mid n \in \mathrm{N}\})$

ii) Π est une partition S–bornée de $\bigcup_{j=1}^{r} (\mathscr{E}_j \cup \mathscr{S}_j)$

iii) $\hat{\mathscr{E}} = \left\{ \mathrm{B} \in \Pi : \left| \mathrm{B} \cap \bigcup_{j=1}^{r} \mathscr{S}_j \right| = 0 \right\}.$

Posons $\hat{\mathscr{E}} = \{\hat{\varepsilon}_1, \cdots, \hat{\varepsilon}_p\}$ et appelons $\hat{\mathscr{E}}$ l'ensemble des lignes d'entrée de $\mathscr{R}$.

iv) $\hat{\mathscr{S}} \subseteq \left\{ \mathrm{B} \in \Pi : \left| \mathrm{B} \cap \bigcup_{j=1}^{r} \mathscr{S}_j \right| = 1 \right\}.$

Posons $\hat{\mathscr{S}} = \{\hat{\omega}_1, \cdots, \hat{\omega}_q\}$ et appelons $\hat{\mathscr{S}}$ l'ensemble des lignes de sortie de $\mathscr{R}$.

v) $\hat{\nu}_n : \mathrm{I}^p \to \mathrm{I}^q$ est définie par induction sur n: supposons que pour tout $\omega^{h_a} \in \{\omega^{h_1}, \cdots, \omega^{h_q}\} \subset \{\omega^1, \cdots, \omega^r\}$, il existe $\hat{\omega}_a \in \hat{\mathscr{S}}$ tel que $\omega^{h_a} \in \hat{\omega}_a$. Alors

$$\hat{\nu}_0 (i_1, \cdots, i_p) = (\mu_0^{h_1} (\dot{i}_1^{h_1}, \cdots, \dot{i}_{m_{h_1}}^{h_1}), \cdots, \mu_0^{h_q} (\dot{i}_1^{h_q}, \cdots, \dot{i}_{m_{h_q}}^{h_q}))$$

où

$$\dot{i}_k^{h_a} = \begin{cases} i_u & \text{si } \varepsilon_k^{h_a} \in \hat{\varepsilon}_u \\ s_0^v & \text{s'il existe } \mathrm{B} \in \Pi \text{ tel que } \{\omega^v, \varepsilon_k^{h_a}\} \subset \mathrm{B} \end{cases}$$

pour $k = 1, \cdots, m_{h_a}$ et $a = 1, \cdots, q$.

Supposons $\hat{\nu}_{n-1}$ défini et qu'au temps $n - 1$, le d–module $\mathscr{M}_j$ est dans un état s_{n-1}^j, $j = 1, \cdots, r$. Alors

$$\hat{\nu}_n (i_1, \cdots, i_p) = (\mu_n^{h_1} (\dot{i}_1^{h_1}, \cdots, \dot{i}_{m_{h_1}}^{h_1}), \cdots, \mu_n^{h_q} (\dot{i}_1^{h_q}, \cdots, \dot{i}_{m_{h_q}}^{h_q}))$$

où

$$\dot{i}_k^{h_a} = \begin{cases} i_u & \text{si } \varepsilon_k^{h_a} \in \hat{\varepsilon}_u \\ s_{n-1}^v & \text{s'il existe } \mathrm{B} \in \Pi \text{ tel que } \{\omega^v, \varepsilon_k^{h_a}\} \subseteq \mathrm{B} \end{cases}$$

pour $k = 1, \cdots, m_{h_a}$ et $a = 1, \cdots, q$.

Dans le cas particulier où pour $j = 1, \cdots, r$ $\mu_n^j = \mu^j$ pour tout $n \in \mathrm{N}$, ou retrouve les réseaux modulaires décrits dans [2, 8].

A chaque réseau modulaire à structure variable, on peut associer une famille de fonctions $\{\nu_n \mid n \in \mathrm{N}\}$ où $\nu_n : \mathrm{I}^p \to \mathrm{I}^r$ est défini par induction sur n.

$$\nu_0 (i_1, \cdots, i_p) = (\mu_0^1 (\dot{i}_1^1, \cdots, \dot{i}_{m_1}^1), \cdots, \mu_n^r (\dot{i}_1^r, \cdots, \dot{i}_{m_r}^r))$$

où

$$\dot{i}_k^j = \begin{cases} i_u & \text{si } \varepsilon_k^j \in \hat{\varepsilon}_u \\ s_0^v & \text{s'il existe } \mathrm{B} \in \Pi \text{ tel que } \{\omega^v, \varepsilon_k^j\} \subseteq \mathrm{B} \end{cases}$$

pour $k = 1, \cdots, m_j$ et $j = 1, \cdots, r$.

Supposons ν_{n-1} défini et qu'au temps $n-1$, le d-module $\mathcal{M}_j$ est dans un état s^j_{n-1}, $j=1, \cdots, r$. Alors

$$\nu_n(i_1, \cdots, i_p) = (\mu^1_n(i^1_1, \cdots, i^1_{m_1}), \cdots, \mu^r_n(i^r_1, \cdots, i^r_{m_r}))$$

où

$$i^j_k = \begin{cases} i_u & \text{si } \varepsilon^j_k \in \hat{\varepsilon}_u \\ s^v_{n-1} & \text{s'il existe } B \in \Pi \text{ tel que } \{\omega^v, \varepsilon^j_k\} \subseteq B. \end{cases}$$

Comme les applications ν_n et $\hat{\nu}_n$ dépendent de l'état s^j_{n-1} des d-modules $\mathcal{M}_j$, nous écrirons lorsqu'il sera nécessaire

$$\nu_n((i_1, \cdots, i_p) \mid (s^1_{n-1}, \cdots, s^r_{n-1})) \quad \text{et} \quad \hat{\nu}_n((i_1, \cdots, i_p) \mid (s^1_{n-1}, \cdots, s^r_{n-1})).$$

Ainsi à tout réseau modulaire à structure variable peut être associé un automate à structure variable

$\mathcal{A}_{\mathcal{R}} = [I^p, I^r, I^q, \{f'_n \mid n \in N\}, \{g'_n \mid n \in N\}$ où pour tout $(i_1, \cdots, i_p) \in I^p$, $(s, \cdots, s_r) \in I^r$,

$$f'_n((s_1, \cdots, s_r), (i_1, \cdots, i_p)) = \nu_n((i_1, \cdots, i_p) \mid (s_1, \cdots, s_r))$$

$$g'_n((s_1, \cdots, s_r), (i_1, \cdots, i_p)) = \hat{\nu}_n((i_1, \cdots, i_p) \mid (s_1, \cdots, s_r)).$$

3. Simulation des automates a structure variable

Introduisons d'abord quelques notations. Pour chaque $n \in N$, soit $J_n \subset \{1, \cdots, p\} \times \{1, \cdots, m\}$ et soit $J = \bigcup_{n \in N} J_n$. Posons $|J_n| = q_n \leq pm$ et $|J| = q \leq pm$. A chaque q-uple $e = (\cdots, e_{xy}, \cdots) \in \{0, 1\}^q$, $(x, y) \in J$, on associe de façon unique pour chaque $n \in N$ une matrice d'ordre $p \times m$, $E_n = (e^n_{hl})$ où

$$e^n_{hl} = \begin{cases} e_{hl} & \text{si } (h, l) \in J_n \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Soient $K_n = \{(a, b) \mid a + b = \min\{h + l \mid e^n_{hl} = 1\}\}$.

$$\hat{l}_n = \begin{cases} \min\{a \mid \exists b : (a, b) \in K_n\} \\ 1 \quad \text{autrement} \end{cases} \tag{1}$$

$$\hat{c}_n = \begin{cases} \min\{b \mid \exists a : (a, b) \in K_n\} \\ 1 \quad \text{autrement.} \end{cases} \tag{2}$$

Interprétons ces trois constantes: soit D la droite reliant les entrées e^n_{12} et e^n_{21} de la matrice E_n. Puisque toutes les entrées de E_n situées sur une droite parallèle à D ont même somme d'indices, K_n est l'ensemble des couples dont les composantes ont la propriété suivante: elles indiquent les indices des entrées égales à 1 situées sur une même droite D′ parallèle à D et qui est la première droite contenent une entrée égale à 1. Par ailleurs, $\hat{l}_n$ (resp $\hat{c}_n$) est le plus petit indice de ligne (resp colonne) rencontré par la droite D′ et pour lequel l'élément de rencontre est 1 ou $\hat{l}_n = 1$ (resp $c_n = 1$) si E_n est la matrice nulle.

DÉFINITION. Soit $\mathscr{A}_j = [I_j, S_j, 0_j, \{f_n^j \mid n \in N\}, \{g_n^j \mid n \in N\}]$ $j = \{1, 2\}$ deux automates à structure variable. L'automate $\mathscr{A}_2$ simule faiblement l'automate $\mathscr{A}_1$ s'il existe un triple (α, Γ, β) où $\alpha : I_1 \to I_2$ $\Gamma = (\gamma_0, \cdots, \gamma_n, \cdots)$ est une suite d'applications, $\gamma_n : S_1 \to S_2$ et $\beta : 0_2 \to 0_1$ tels que le diagramme suivant est commutatif pour tout $n \in N$

$$\begin{tikzcd} S_1 \times I_1 \arrow[r, "g_n^1"] \arrow[d, "(\gamma_n, \alpha)"'] & 0_1 \\ S_2 \times I_2 \arrow[r, "g_n^2"'] & 0_2 \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

THÉORÈME. *Pour tout automate fini à structure variable, il existe un réseau modulaire fini à structure variable dont l'automate associé simule faiblement $\mathscr{A}$.*

Démonstration. Soit $\mathscr{A} = [I, S, 0, \{f_n \mid n \in N\}, \{g_n \mid n \in N\}]$ un automate fini à structure variable. Posons $I_1 = \{i_1, \cdots, i_t\}$, $S = \{s_1, \cdots, s_p\}$ et $0 = \{0_1, \cdots, 0_m\}$. Pour chaque $n \in N$, soit

$$J_n = \{(j, k) \mid \exists i \in I, \exists s \in S : f_n(s, i) = s_j \quad \text{et } g_n(s, i) = \theta_k\} \cup$$
$$\{(j, 1) \mid \forall i \in I, \forall s \in s : f_n(s, i) \neq s_j\}.$$

Soit $J = \bigcup_{n \in N} J_n$. Alors $J_n \subset \{1, \cdots, p\} \times \{1, \cdots, n\}$. Posons $|J_n| = q_n$ et $|J| = q$.

A chaque couple $(j, k) \in J$, associons le 2–module à structure variable $\mathscr{M}_{jk} = (q + t, \{0, 1\}, \{\mu_n^{jk} \mid n \in N\})$ où $\mu_n^{jk} = \{0, 1\}^{q+t} \to \{0, 1\}$ est ainsi définie: pour tout $(q + t)$–uple (e, c) où $e \in \{0, 1\}^q$ et $c = (c_1, \cdots, c_t) \in \{0, 1\}^t$ soit

$$l = \begin{cases} \min \{r \mid c_r = 1\} \\ 1 \quad \text{autrement} \end{cases}$$

$$\mu_n^{jk}(e, c) = \begin{cases} 1 & \text{si } s_j = f_n(s_{\hat{l}_n}, i_l) \quad \text{et} \quad \theta_k = g(s_{\hat{l}_n}, i_l) \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

où $\hat{l}_n$ a été défini en (1).

Posons $\mathscr{E}_{jk} = \{\varepsilon_{xy}^{jk} \mid (x , y) \in \mathrm{J}\} \cup \{\varepsilon_r^{jk} \mid = 1 , \cdots , t\}$ et $\mathscr{S}_{jk} = \{\omega_{jk}\}$.

Considérons le réseau modulaire à structure variable sur $\{0 , 1\}$, $\mathscr{R} = [\{\mathscr{M}_{jk} \mid (j , k) \in \mathrm{J}\}, \Pi , \hat{\mathscr{E}} , \hat{\mathscr{S}}, \{\hat{\nu}_n \mid n \in \mathrm{N}\}]$ où Π est la partition S–bornée de $\bigcup_{(j,k)\in \mathrm{J}} (\mathscr{E}_{jk} \cup \mathscr{S}_{jk})$ ainsi donnée:

i) Pour $1 \leq r \leq t$, soit $\mathrm{B}_r = \{\varepsilon_r^{jk} \mid (j , k) \in \mathrm{J}\}$

ii) Pour $(x , y) \in \mathrm{J}$, soit $\mathrm{B}_{xy} = \{\varepsilon_{xy}^{jk} \mid (j , k) \in \mathrm{J}\} \cup \{\omega^{xy}\}$.

Posons $\hat{\mathscr{E}} = \{\mathrm{B}_1 , \cdots , \mathrm{B}_t\}$ et $\hat{\mathscr{S}} = \{\mathrm{B}_{xy} \mid (x , y) \in \mathrm{J}\}$.

Définissons $\hat{\nu}_n : \{0 , 1\}^t \to \{0 , 1\}^q$ par induction sur n.

$$\hat{\nu}_0 (i_1 , \cdots , i_t) = (\cdots , \mu_0^{jk} (\cdots , s_{xy} , \cdots , i_1 , \cdots , i_t) \quad \text{où } (j , k) \in \mathrm{J} \quad \text{et } s_{xy}^0$$

est l'état initial du 2–module $\mathscr{M}_{xy}$, $(x , y) \in \mathrm{J}$.

Supposons $\hat{\nu}_{n-1}$ défini et supposons qu'au temps $n - 1$, le module $\mathscr{M}_{xy}$, $(x , y) \in \mathrm{J}$ est dans l'état s_{xy}^{n-1}.

$$\hat{\nu}_n (i_1 , \cdots , i_t) = (\cdots , \mu_n^{jk} (\cdots , s_{xy}^{n-1} , \cdots , i_1 , \cdots , i_t) , \cdots) \quad \text{où } (j , k) \in \mathrm{J}.$$

L'automate à structure variable associé à $\mathscr{R}$, à savoir,

$$\mathscr{A}_{\mathscr{R}} = [\{0 , 1\}^t , \{0 , 1\}^q , \{0 , 1\}^q , \{f_n' \mid n \in \mathrm{N}\} , \{g_n' \mid n \in \mathrm{N}\}]$$

simule faiblement $\mathscr{A}$. Il suffit de choisir

i) $\alpha : \mathrm{I} \to \{0 , 1\}^t$ où $\alpha (i_r) = (\delta_{1r} , \cdots , \delta_{tr})$; ici δ_{xr} est le symbole de Kronecker.

ii) pour tout $n \in \mathrm{N}$, $\gamma_n : \mathrm{S} \to \{0 , 1\}^q$ où $\gamma_n (s_j) = (\cdots , e_{xy} , \cdots)$ où

$$e_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = j \text{ et } y = \min \{k \mid (j , k) \in \mathrm{J}_n\} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

iii) $\beta : \{0 , 1\}^q \to 0$ où $\beta (e) = \theta_{\hat{c}_n}$ où $\hat{c}_n$ a été défini en (2).

Avant de déterminer la liaison qui existe entre un automate à structure variable et l'automate associé au réseau modulaire qui le simule, nous devons donner la

DÉFINITION. Soit $\mathscr{A}_j = [\mathrm{I}_j , \mathrm{S}_j , 0_j , \{f_n^j \mid n \in \mathrm{N}\} , \{g_n^j \mid n \in \mathrm{N}\}]$ $(j = 1 , 2)$ deux automates à structure variable. Un homomorphisme de $\mathscr{A}_1$ vers $\mathscr{A}_2$ est un triple (θ , Δ , η) où $\theta : \mathrm{I}_1 \to \mathrm{I}_2$, $\Delta = (\delta_0 , \cdots , \delta_n , \cdots)$ est une suite d'applications $\delta_n : \mathrm{S}_1 \to \mathrm{S}_2$ et $\eta : 0_1 \to 0_2$ telles que pour tout $n \in \mathrm{N}$, les diagrammes suivants sont commutatifs.

$$\begin{tikzcd}
S_1 \times I_1 \arrow[r, "f_n^1"] \arrow[d, "(\delta_n, \theta)"'] & S_1 \arrow[d, "\delta_{n+1}"] \\
S_2 \times I_2 \arrow[r, "f_n^2"'] & S_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
S_1 \times I_1 \arrow[r, "g_n^1"] \arrow[d, "(\delta_k, \theta)"'] & 0_1 \arrow[d, "\eta"] \\
S_2 \times I_2 \arrow[r, "g_n^2"'] & 0_2
\end{tikzcd}$$

THÉORÈME. *Soient $\mathcal{A}$ un automate fini à structure variable et $\mathcal{R}$ le réseau modulaire à structure variable qui le simule. Alors il existe un homomorphisme d'automates à structure variable entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ où $\mathcal{A}'$ est un sous-automate de $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$.*

Démonstration. Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$ tels que décrits au théorème précédent. Soit

$$\tilde{\mathcal{A}} = [\tilde{I}, \tilde{S}, \tilde{0}, \{\tilde{f}_n \mid n \in N\}, \{\tilde{g}_n \mid n \in N\}] \qquad \text{où}$$

$$\tilde{I} = \{(1, 0, \cdots), (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, (0, \cdots, 0, 1)\} \subseteq \{0, 1\}^t$$

$$\tilde{S} = 0 = \{(\cdots, e_{xy}, \cdots) \mid \exists j, k : e_{jk} = 1 \quad \text{et} \quad e_{xy} = 0 \quad \text{si} \quad x \neq j \quad \text{ou}$$
$$y \neq k, (x, y) \in J\} \subseteq \{0, 1\}^q$$

$\tilde{f}_n$ et $\tilde{g}_n$ sont les restrictions respectives de f_n' et g_n' à $\tilde{S} \times \tilde{I}$. Montrons qu'il existe un triple (θ, Δ, η) où $\theta : \tilde{I} \to I$, $\Delta = (\delta_0, \cdots, \delta_n, \cdots)$ est une suite d'applications $\delta_n : \tilde{S} \to S$ et $\eta : \tilde{0} \to 0$ telles que pour tout $n \in N$ les diagrammes suivants sont commutatifs.

$$\begin{tikzcd}
\tilde{S} \times \tilde{I} \arrow[r, "\tilde{f}_n"] \arrow[d, "(\delta_n, \theta)"'] & \tilde{S} \arrow[d, "\delta_{n+1}"] \\
S \times I \arrow[r, "f_n"'] & S
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\tilde{S} \times \tilde{I} \arrow[r, "\tilde{g}_n"] \arrow[d, "(\delta_n, \theta)"'] & \tilde{0} \arrow[d, "\eta"] \\
S \times I \arrow[r, "g_n"'] & 0
\end{tikzcd}$$

Prenons $\theta : I \to I$ telle que $\theta((0, \cdots, 1, \cdots, 0)) = i_r$ $\delta_n : S \to S$ et $\eta : 0 \to 0$ telles que, si $e = (\cdots, e_{xy}, \cdots)$

$$\text{où } e_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = h \quad \text{et } y = k \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

$$\delta_n(e) = s_h \qquad \text{et} \quad \eta(e) = \theta_k .$$

Le triple $(\theta, \Delta = (\delta_0, \cdots, \delta_n, \cdots), \eta)$ a les propriétés désirées.

Bibliographie

[1] G. A. Agasandjan (1967) – *Automata with a variant structure*, Dokl. AN. SSRS 174, *3*, 529–530 (en russe).

[2] M. A. Arbib (1969) – *Theories of abstract automata*, « Prentice–Hall Inc. », Englewood Cliffs, N. Y.

[3] W. Dauscha, G. Nürnberg, P. H. Starke and K. D. Winkler (1973) – *Theorie der determinierten zeitvariablen Automaten*, « Electr. Inform. und Kybernetic », *9*, 718, 455–511.

[4] A. Gill (1963) – *Time—varying sequential machines*, « J. Franklin Instit. », *276*, 519–539.

[5] A. Gill and J. R. Flexer (1967) – *Periodic decomposition of sequential machines*, « J. Assoc. Comp. Mach. », *14*, no. 4, 666–676.

[6] J. W. Grzymala–Busse (1969) – *On the periodic representation and the reducibility of periodic automata*, « J. Assoc. Comp. Mach. », *16*, no. 3, 432–441.

[7] R. K. Guha and R. Y. Yeh (1974) – *On periodicity of sequential machines*, « Journal of Computer and System Sciences », *8*, 41–70.

[8] S. C. Kleene (1956) – *Representation of events in nerve nets and finite automata*, « Automata Studies », Princeton, 3–41.

[9] L. Martin and C. Reischer (1978) – *On the modular nets*, « Discrete Math. », *22*, 2, 195–196.

[10] L. Martin and C. Reischer (1977) – *Réseaux modulaires infinis*. « Accad. Naz. Lincei Rend. », LXII, *6*, 734–739.

[11] S. C. McCulloch and W. Pitts (1943) – *A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity*, « Bull. Math. Biophys. », *5*, 115–133.

[12] C. Reischer and D. Simovici (1972) – *On the existence of a periodic analog of a finite connected automata*, « IEEE Trans. on Comp. » *V21*, no. 2, 208–211.

[13] C. Reischer and D. Simovici (1974) – *On a formalization of abstract modular networks*, « Bull. Iust. Polit. », Jassy, XX (XXIV) 1–2.

[14] A. Salomaa (1968) – *On finite automata with a time—variant structure*, « Inform. and Control », *13*, 185–198.

[15] P. H. Starke (1965) – *Einfurhung in die Theorie der Nervennetze*, « Dtsch. Z. Philosophie » *13*, 64–96.