Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Paolo Zappa

Sulle classi di Dolbeault di tipo $(0, n-1)$ con singolarità in un insieme discreto

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **70** (1981), n.2, p. 87–95.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1981_8_70_2_87_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1981.

Funzioni di variabile complessa. — *Sulle classi di Dolbeault di tipo* $(0, n-1)$ *con singolarità in un insieme discreto* (*). Nota di PAOLO ZAPPA (**), presentata dal Socio E. MARTINELLI.

SUMMARY. — This paper shows how some techniques used for the meromorphic functions of one variable can be used for the explicit construction of a solution to the Mittag-Leffler problem for Dolbeault classes of tipe $(0, n-1)$ with singularities in a discrete set of $\mathbf{C}^n$ and $\mathbf{T}^n$ (a n-dimensional complex torus). A generalisation is given for the Weierstrass ζ and the Legendre relations.

1. LO SVILUPPO DI TAYLOR DEL NUCLEO DI MARTINELLI

Indichiamo con (dz) la forma esterna in $\mathbf{C}^n$ $dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$, e con $(dz)_k$ la $n-1$ forma $dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_{k-1} \wedge dz_{k+1} \wedge \cdots \wedge dz_n$; allora il nucleo di Martinelli ([4]; talora anche detto di Martinelli–Bochner o di Bochner–Martinelli) con singolarità in ξ può essere scritto, una volta soppresso il fattore (dz), nella forma

$$\psi(z, \xi) = \frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (\bar{z}_k - \bar{\xi}_k) (d\bar{z})_k}{\| z - \xi \|^{2n}} .$$

Poiché i coefficienti di $\psi(z, \xi)$ sono funzioni razionali delle z_k e $\bar{z}_k$ fuori dal punto ξ, consideriamo $\xi \neq 0$ e sviluppiamo tali coefficienti in una serie formale con centro nell'origine. Questo sviluppo di $\psi(z, \xi)$ converge in un qualche intorno dell'origine: è sufficiente considerare che le funzioni di $2n$ variabili complesse

$$\frac{z_{n+k} - \bar{\xi}_k}{\left(\sum_{j=1}^{n} (z_{n+j} - \bar{\xi}_j)(z_j - \xi_j)\right)^n}$$

sono olomorfe fuori da una quadrica di $\mathbf{C}^{2n}$ non passante per l'origine e che i coefficienti del nucleo di Martinelli sono la restrizione di tali funzioni alla sottovarietà lineare definita da $z_j = \bar{z}_{n+j}$ $1 \leq j \leq n$.

Lo sviluppo di Taylor di $\psi(z, \xi)$ si esprime formalmente

$$\psi(0, \xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z_i} z_i + \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_i} \bar{z}_i \right)_0^m = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.
(**) Nella seduta del 14 febbraio 1981.

Indichiamo con $|\psi|$ il massimo dei moduli dei coefficienti di ψ.

LEMMA 1. $|\psi_m| \leq (8n)^m \binom{n+m-1}{n-1} \|z\|^m \|\xi\|^{-2n-m+1} \leq \frac{2^{n-1}}{\|\xi\|^{2n-1}} \cdot \left(\frac{16n\|z\|}{\|\xi\|}\right)^m$.

Dimostrazione. Intanto abbiamo:

$$|\psi_m| \leq \frac{1}{m!}(2n)^m \|z\|^m \max_{\alpha+\beta=m} \left|\frac{\partial^m \psi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}(0,\xi)\right| .$$

Dall'espressione esplicita di

$$\frac{\partial^{|\alpha|}\psi}{\partial z^\alpha}(z,0) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{|\alpha|+k-1} \frac{(|\alpha|+n-1)!}{(n-1)!} \bar{z}^{(\alpha+\delta_k)} \|z\|^{-2(n+|\alpha|)} (d\bar{z})_k$$

dove δ_k rappresenta il pluriindice la cui i–esima componente è δ_k^i, dalla disuguaglianza

$$\left|\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial \bar{z}^\beta} \bar{z}^{\alpha+\delta_k} \|z\|^{-2(n+|\alpha|)}\right| \leq 2^{|\beta|} \max_{\eta+\nu=\beta} \left|\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\eta}(\bar{z}^{\alpha+\delta_k}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\nu}(\|z\|^{-2(n+|\alpha|)})\right| \leq$$
$$\leq 2^{|\beta|} \frac{(n+|\alpha|+|\beta|-1)!}{(n+|\alpha|-1)!} \|z\|^{-2n-|\alpha|-|\beta|+1}$$

e dal fatto che

$$\left|\frac{\partial^m \psi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}(0,\xi)\right| = \left|\frac{\partial^m \psi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}(\xi,0)\right|$$

segue il lemma.

Le forme ψ_m sono inoltre d″–chiuse. Infatti:

$$\psi_m(z,\xi) = \sum_{|\alpha|+p=m} \sum_{|\beta|=p} \frac{1}{\alpha!} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^m \psi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}(0,\xi) z^\alpha \bar{z}^\beta = \sum_{|\alpha|+p=m} \psi_{\alpha,p}$$

e inoltre

$$\psi = \sum_\alpha \sum_{p=0}^{\infty} \psi_{\alpha,p} .$$

I coefficienti di $\psi_{\alpha,p}$ sono polinomi omogenei nelle $\bar{z}_i$ di grado p, mentre quelli di $d''\psi_{\alpha,p}$ sono di grado $p-1$; per cui da

$$0 = d''\psi = \sum_\alpha \sum_{p=0}^{\infty} d''\psi_{\alpha,p}$$

abbiamo che $d''\psi_{\alpha,p} = 0$.

Da ciò e dal Lemma 1 segue dunque:

LEMMA 2. *Il nucleo di Martinelli* $\psi(z,\xi)(\xi \neq 0)$ *si sviluppa intorno all'origine in una serie di Taylor di forme* d″*–chiuse* $\sum_{m=0}^{\infty} \psi_m$ *convergente in norma, e* *quindi uniformemente, in ogni compatto contenuto nella sfera di raggio* $\dfrac{\|\xi\|}{16n}$.

Notiamo che il dominio di convergenza della serie è senz'altro più ampio, ma nel seguito interessa soltanto poter assicurare che questo invade $\mathbf{C}^n$ quando $\|\xi\| \to \infty$.

2. Il teorema di Mittag–Leffler per le classi di Dolbeault di tipo $(0, n-1)$ con singolarità in un insieme discreto

Sia ξ un punto di $\mathbf{C}^n$. In [2] Andreotti e Norguet mostrano che i nuclei di Martinelli dei vari ordini $\psi_\alpha(z, \xi)$ (α pluriindici $\geq \mathbf{1}$) generano, come spazio di Frechet, $\mathrm{H}_{\mathrm{DB}}^{0,n-1}(\mathbf{C}^n - \{\xi\})$; cioè che ogni forma ω d″–chiusa di $\mathbf{C}^n - \{\xi\}$ è omologa, modulo d″–esatte, a una serie $\sum_\alpha c_\alpha \psi_\alpha$ con $\lim\limits_{|\alpha| \to \infty} \sqrt[|\alpha|]{|c_\alpha|} = 0$.

Definizione. Un punto ξ si dice singolarità di tipo polare di ordine m per ω se ω è omologa a $\sum_{|\beta| \leq m} c_\beta \psi_\beta$ con $c_\beta \neq 0$ per un qualche β di modulo m.

In [5] si osserva che $\psi_{\alpha+1}$ è omologa alla forma

$$\varphi_\alpha(z, \xi) = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} \psi}{\partial z^\alpha}(z, \xi).$$

Poiché gli operatori d″ e $\dfrac{\partial}{\partial z_i}$ commutano, anche lo sviluppo di Taylor di $\varphi_\alpha(z, \xi)$ $(\xi \neq 0)$ può essere scritto come serie di forme d″–chiuse, che converge uniformemente per $\|z\| \leq \dfrac{\|\xi\|}{32n}$. Vale il seguente:

TEOREMA 1. *Sia* $\Xi = \{\xi_m\}_{m \in \mathrm{N}}$ *un insieme discreto e chiuso di punti di* $\mathbf{C}^n$ *e siano*

$$\mathrm{G}_m(z) = \sum_{\alpha \leq \alpha_m} a_\alpha \varphi_\alpha(z, \xi_m)$$

esiste allora una forma $\mathrm{F}(z)$ *di tipo* $(0, n-1)$ *su* $\mathbf{C}^n - \Xi$ d″*–chiusa con parte principale in* ξ_m *uguale a* $\mathrm{G}_m(z)$, *cioè omologa, modulo forme* d″*–esatte, a* $\mathrm{G}_m(z)$ *in un opportuno intorno di* ξ_m.

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella del teorema di Mittag–Leffler per le funzioni meromorfe di una variabile.

Brevemente, si numerano gli ξ_m in modo tale che $\|\xi_{m+1}\| \geq \|\xi_m\|$. Si determina quindi una somma parziale $\mathrm{P}_m(z)$ d″–chiusa dello sviluppo di Taylor di $\mathrm{G}_m(z)$ tale che $|\mathrm{G}_m(z) - \mathrm{P}_m(z)| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^m$ per $\|z\| \leq \dfrac{1}{32n}\|\xi_m\|$. Il Lemma 2 garantisce l'esistenza di simile P_m e si vede subito che la serie $\sum_m \mathrm{G}_m(z) - \mathrm{P}_m(z)$

converge uniformemente su ogni compatto di $\mathbf{C}^n - \Xi$, è d″-chiusa, ed, essendo le forme P_m d″-esatte, perchè non singolari, è omologa a $G_m(z)$ in ogni intorno di Stein di ξ_m che non contenga altri punti di Ξ.

3. Classi di forme con singolarità di tipo polare di ordine minimo

Consideriamo adesso forme d″-chiuse con singolarità di tipo polare di ordine n, cioè omologhe al nucleo di Martinelli nell'intorno di ogni punto singolare, e cerchiamo delle stime per il grado dei fattori correttivi P_k.

Supponiamo di nuovo che $\|\xi_{k+1}\| \geq \|\xi_k\|$ e, senza perdere in generalità, che $\|\xi_k\| \geq 2$. Dal Lemma 1 abbiamo che per $\|z\| \leq \frac{\|\xi_k\|}{32\,n}$ $|\psi_m(z, \xi_k)| < \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
Poniamo

$$P_k^h(z) = \psi(0, \xi_k) + \sum_{m=1}^{h} \psi_m(z, \xi_k).$$

P_k^h è una forma polinomiale omogenea di grado h nelle z_i e $\bar{z}_i$. La serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\psi(z, \xi_m) - P_m^m(z))$$

converge uniformemente in ogni compatto di $\mathbf{C}^n - \Xi$. Infatti per $\|z\| \leq \frac{\|\xi_k\|}{32\,n}$ abbiamo

$$|\psi(z, \xi_k) - P_k^h(z)| \leq \sum_{m=h+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m = \left(\frac{1}{2}\right)^h$$

e

$$\left|\sum_{m=k}^{\infty} \psi(z, \xi_m) - P_m^m(z)\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

e d'altra parte $\|\xi_k\| \to \infty$.

La stima precedente può essere migliorata nel caso che l'insieme dei punti singolari abbia esponente di convergenza finito.

Definizione. Si chiama esponente di convergenza intero dell'insieme discreto e chiuso $\Xi = \{\xi_m\}_{m \in N}$ il numero

$$\mathscr{T} = \inf_{\lambda \leq N} \left\{\lambda \,\middle|\, \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\|\xi_m\|^\lambda} < +\infty\right\} \qquad (\xi_m \neq 0)$$

ponendosi $\mathscr{T} = \infty$ se la serie diverge per ogni λ.

Supponiamo che Ξ abbia esponente di convergenza intero finito $\mathscr{T}$. La serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\psi(z, \xi_m) - P_m^{\mathscr{T}-2n}(z))$$

è uniformemente convergente su ogni compatto di $\mathbf{C}^n - \Xi$; infatti dato $R > 0$ sia $N(R)$ tale che $\|\xi_m\| > 32\,nR$ per $m \geq N(R)$, dal Lemma 1 per $\|z\| < R$ si ha

$$\left| \sum_{m=N(R)}^{\infty} \psi(z, \xi_m) - P_m^{\mathscr{C}-2n}(z) \right| =$$

$$= \left| \sum_{m=N(R)}^{\infty} \sum_{k=\mathscr{C}-2n+1}^{\infty} \psi_k(z, \xi_m) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{m=N(R)}^{\infty} \sum_{k=\mathscr{C}-2n+1}^{\infty} \left(\frac{16\,nR}{\|\xi_m\|} \right)^k \frac{2^{n-1}}{\|\xi_m\|^{2n-1}} =$$

$$= \sum_{m=N(R)}^{\infty} \frac{2^{n-1}(16\,nR)^{\mathscr{C}-2n+1}}{\|\xi_m\|^{\mathscr{C}}} \sum_{k=\mathscr{C}-2n+2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k < +\infty .$$

È pertanto provato il

TEOREMA 2. *Sia* $\Xi = \{\xi_m\}$ *un insieme discreto e chiuso di punti in* $\mathbf{C}^n$ *con esponente di convergenza intero* $\mathscr{C}$. *Una forma* ω, d''*-chiusa, di* $\mathbf{C}^n - \Xi$, *con singolarità di tipo polare e di ordine minimo* ($= n$) *in ogni punto di* Ξ, *è data da*

$$\omega = \sum_{m=1}^{\infty} \psi(z, \xi_m) - P_m^i(z)$$

$$\textit{dove} \begin{cases} i = m & \text{se } \mathscr{C} = \infty \\ i = \mathscr{C} - 2n & \text{se } 2n \leq \mathscr{C} < \infty \\ P_m^i = 0 & \text{se } \mathscr{C} < 2n . \end{cases}$$

Inoltre la forma $\dfrac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\, \omega \wedge (dz)$ *ha residuo* 1 *in ogni punto di* Ξ.

4. LA FORMA ζ DI WEIERSTRASS E UNA GENERALIZZAZIONE DELLE RELAZIONI DI LEGENDRE

In una precedente nota [5] abbiamo costruito forme $\mathscr{P}^i$ $(i = 1, \cdots, n)$ di tipo $(0, n-1)$, d''-chiuse, simili alla $\mathscr{P}$ di Weierstrass (*). Utilizzando il Teorema 2 è immediato costruire una forma simile alla ζ di Weierstrass; ovvero una forma ζ di tipo $(0, n-1)$, d''-chiusa, con singolarità di tipo polare e ordine minimo in ogni punto di un reticolo Γ di rango massimo in $\mathbf{C}^n$ e tale che la forma $\dfrac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\, \zeta \wedge (dz)$ abbia ivi residuo 1.

(*) In tale nota il nucleo di Martinelli e conseguentemente le $\mathscr{P}^i$ sono state scritte col segno opposto.

Infatti, poichè l'esponente di convergenza finito di un reticolo di rango massimo in $\mathbf{C}^n$ è uguale a $2n+1$, possiamo definire

$$\zeta_\Gamma(z) = \psi(z,0) + \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma\\ \gamma\neq 0}} (\psi(z,\gamma) - P^1_\gamma(z)) =$$

$$= \psi(z,0) + \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma\\ \gamma\neq 0}} (\psi(z,\gamma) - \psi(0,\gamma) - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial\psi}{\partial z_i}(0,\gamma)\, z_i + \frac{\partial\psi}{\partial \bar{z}_i}(0,\gamma)\, \bar{z}_i\right).$$

Richiamiamo la definizione di $\mathscr{P}^i_\Gamma(z)$ data in [5]

$$\mathscr{P}^i_\Gamma(z) = -\frac{\partial\psi}{\partial z_i}(z,0) - \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma\\ \gamma\neq 0}} \left(\frac{\partial\psi}{\partial z_i}(z,\gamma) - \frac{\partial\psi}{\partial z_i}(0,\gamma)\right).$$

Valgono le seguenti proprietà

$$\zeta_\Gamma(z) = -\zeta_\Gamma(-z)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_i}\zeta_\Gamma(z) = -\mathscr{P}^i_\Gamma(z)$$

e, per la Γ–invarianza delle $\mathscr{P}^i_\Gamma$,

$$\frac{\partial}{\partial z_i}(\zeta(z+\gamma) - \zeta(z)) = \mathscr{P}^i(z) - \mathscr{P}^i(z+\gamma) = 0$$

$\zeta_\Gamma(z+\gamma) - \zeta_\Gamma(z) = \eta_\gamma$ con η_γ forma costante (*).

Sia $\{\gamma_j\}_{1\leq j\leq 2n}$ una base di Γ e $G = (\gamma_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq 2n}}$ la matrice delle componenti. Sia inoltre $C_G(0)$ il parallelogramma fondamentale traslato col centro nell'origine; le facce opposte di $C_G(0)$ sono date da:

$$F_k^+ = \left\{ z\in\mathbf{C}^n \,\middle|\, z = \frac{1}{2}\gamma_k + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{2n} \lambda_j\gamma_j \quad |\lambda_j| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

$$F_k^- = \left\{ z\in\mathbf{C}^n \,\middle|\, z = -\frac{1}{2}\gamma_k + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{2n} \lambda_j\gamma_j \quad |\lambda_j| \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Scriviamo:

$$\zeta(z) = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i(z) \wedge (d\bar{z})_i$$

$$\eta_{\gamma_j} = \sum_{i=1}^{n} \eta_{i,j} \wedge (d\bar{z})_i$$

e poniamo $E = (\eta_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq 2n}}$. Supponiamo, infine, che $\gamma_1, \cdots, \gamma_{2n}$ e la frontiera ∂C_G siano ordinati concordemente con la forma $\left(\frac{i}{2}\right)^n dz \wedge d\bar{z}$. Dalla formula di Martinelli ([1], [4]) abbiamo:

$$\frac{(2\pi i)^n}{(n-1)!} = \int_{C_G(0)} \zeta(z) \wedge dz = \sum_{k=1}^{2n} \int_{F_k^+ \cup F_k^-} \sum_{i=1}^{n} \zeta_i(z)(d\bar{z})_i \wedge dz .$$

Consideriamo il cambiamento di variabili dato da $z_r = \sum_{j=1}^{2n} t_j \gamma_{r,j}$, $r = 1, \cdots, n$, t_j variabili reali e sia $\left|\frac{G}{G}\right|_{r,s}$ il determinante della jacobiana della trasformazione privata della r–sima riga e s–sima colonna. Abbiamo:

$$\frac{(2\pi i)^n}{(n-1)!} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \cdots \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n} \zeta_i(z(t))_{|F_k^-} \left|\frac{G}{G}\right|_{i,k} dt_1 \cdots \hat{dt_k} \cdots dt_{2n} \cdot$$

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \cdots \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n} \zeta_i(z(t))_{|F_k^+} \left|\frac{G}{G}\right|_{i,k} dt_1 \cdots \hat{dt_k} \cdots dt_{2n} \cdot$$

Tenuto conto della (*) ne segue una formula in tutto simile alle relazioni di Legendre:

$$\frac{(2\pi i)^n}{(n-1)!} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \eta_{i,k} \left|\frac{G}{G}\right|_{i,k} .$$

5. CONSIDERAZIONI FINALI

Le considerazioni precedenti sulla ζ e quelle già esposte in [5] sulle $\mathcal{P}^i$ permettono di costruire su un toro complesso di dimensioni n forme di tipo $(0, n-1)$ d''–chiuse, con singolarità di tipo polare assegnate in un numero finito di punti, sotto la condizione che la somma dei residui delle $(n, n-1)$ forme associate sia nulla. Possiamo enunciare il:

TEOREMA 3. *Sia Γ un reticolo di rango massimo in $\mathbf{C}^n$. Siano dati:*

1) $p_1, \cdots, p_k$ *punti nel parallelogramma fondamentale*

2) $m_1, \cdots, m_k$ *interi* $\geq n$

3) $a_{\alpha_1}, \cdots, a_{\alpha_k}$ *numeri complessi, corrispondenti a ogni pluriindice* $\alpha_i \geq 1$ *e in modulo* $\leq m_i$, *tali che* $\sum_{i=1}^{k} a_i = 0$ *ed esista per ogni* i *un indice* α_i *di modulo* m_i *tale che* $a_{\alpha i} \neq 0$.

Allora la forma:

$$\omega = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha_i} \frac{(-1)^{|\alpha_i - 1|}}{(\alpha_i - 1)!} a_{\alpha_i} \frac{\partial}{\partial z^{(\alpha_i - 1)}} \zeta(z - p_i)$$

è di tipo $(0, n-1)$, *d''-chiusa, Γ-invariante, con singolarità di tipo polare in* $p_1, \cdots, p_k$ *e di ordine rispettivamente* $m_1, \cdots, m_k$. *Inoltre in un opportuno intorno di* p_i, ω *è omologa (modulo forme* d''*-esatte) a* $\sum_{\alpha_i} a_{\alpha_i} \psi_{\alpha_i}$. *Infine la classe di Dolbeault definita da* ω *sul toro* $T^n = \dfrac{C^n}{\Gamma}$ *è univocamente determinata a meno di classi costanti.*

Dimostrazione. C'è solo da verificare che ω è Γ-invariante; il che segue dalla (*) e dal fatto che Γ-invarianti sono le derivate della ζ; per cui:

$$\begin{aligned}\omega(z+\gamma)-\omega(z) &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{\alpha_i}\frac{(-1)^{|\alpha_i-1|}}{(\alpha_i-1)!}\,a_{\alpha_i}\,\frac{\partial}{\partial z^{(\alpha_i-1)}}\left(\zeta(z+\gamma-p_i)-\zeta(z-p_i)\right)=\\ &= \sum_{i=1}^{k} a_{1_i}\left(\zeta(z+\gamma-p_i)-\zeta(z-p_i)\right)=\\ &= \left(\sum_{i=1}^{k} a_{1_i}\right)\eta_\gamma = 0\,.\end{aligned}$$

L'esistenza della forma di cui al Teorema 3 può essere desunta direttamente dal teorema dei residui [3] e dal fatto che il fibrato canonico del toro è banale. Siano U_i intorni piccoli di Stein di p_i. Consideriamo il diagramma che si ottiene dalle successioni di Mayer–Vietoris per i fasci $\mathcal{O}$ e Ω^n relative al ricoprimento di T^n $(n \geq 2)$ fatto da $\bigcup_i U_i$ e da $T^n - \bigcup_i \{p_i\}$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & H^{n-1}(T^n, \Omega^n) \arrow[r] & H^{n-1}(T^n - \bigcup_i \{p_i\}, \Omega^n) \arrow[r] & \sum_{i=1}^{k} H^{n-1}(U_i - \{p_i\}, \Omega^n) \arrow[r, "f"] & H^n(T^n, \Omega^n) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^{n-1}(T^n, \mathcal{O}) \arrow[r] & H^{n-1}(T^n - \bigcup_i \{p_i\}, \mathcal{O}) \arrow[r] & \sum_{i=1}^{k} H^{n-1}(U_i - \{p_i\}, \mathcal{O}) \arrow[r] \arrow[u, "\wedge (dz)"'] & H^n(T^n, \mathcal{O}) \arrow[r] \arrow[u, "\wedge (dz)"'] & 0.
\end{tikzcd}$$

Per il teorema dei residui l'applicazione f è uguale alla somma dei residui $(\dim H^n(T^n, \Omega^n) = 1)$. Il prodotto esterno per (dz), sezione del fibrato canonico del toro, determina un isomorfismo fra $H^n(T^n, \mathcal{O})$ e $H^n(T^n, \Omega^n)$, ed anche un isomorfismo fra $H^{n-1}(U_i - \{p_i\}, \Omega^n)$ e $H^{n-1}(U_i - \{p_i\}, \Omega^n)$ perchè il divisore canonico è nullo.

Osservazione. Dalle considerazioni precedenti segue che un risultato analogo a quello del Teorema 3 vale su ogni varietà compatta con divisore canonico nullo, quali ad esempio le superficie K 3.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. ANDREOTTI e H. NORGUET (1966) – *Problème de Levi et convexité holomorphe pour les classes de cohomologie*, « Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa », *20*, 197–241.
[2] A. ANDREOTTI e F. NORGUET (1971) – *Cycles of algebraic manifolds and* – $\partial\bar{\partial}$-cohomology, « Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa », *25*, 69–114.
[3] P. GRIFFITH (1976) – *Variations on a theorem of Abel*, « Inv. Math. *35*, 321–390.
[4] E. MARTINELLI (1938) – *Alcuni teoremi integrali per le funzioni analitiche di più variabili complesse*, « Memor. Accad. Ital. », *9*, 269–283.
[5] P. ZAPPA (1979) – *Osservazioni sui nuclei di Bochner–Martinelli* « Acc. Naz. Lincei », VIII, LXVII, 21–26.