Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Clara Silvia Roero, Tullio Viola

Proposta di ricostruzione di un ragionamento incompleto nell'opera di Archimede Sulla sfera e sul cilindro (in occasione del ritrovamento di una dimostrazione nei manoscritti di Giacomo Bernoulli)

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **70** (1981), n.2, p. 55–63.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1981_8_70_2_55_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1981.

Storia della matematica. — *Proposta di ricostruzione di un ragionamento incompleto nell'opera di Archimede* Sulla sfera e sul cilindro (*in occasione del ritrovamento di una dimostrazione nei manoscritti di Giacomo Bernoulli*) (*). Nota di CLARA SILVIA ROERO e TULLIO VIOLA, presentata (**) dal Corrisp. E. DE GIORGI.

SUMMARY. — This paper discusses from a historical standpoint the incomplete reasoning of Book I proposition 9 of Archimedes' *On the sphere and cylinder* and gives a proof, which only uses means available to Archimedes himself. This paper also discusses some demonstrations which, through the centuries, have been proposed to solve this problem. One of these is the previously unpublished proof by Jakob I Bernoulli, which is here reported, recently discovered at the Universitätsbibliothek of Basel.

1. SCOPO DELLA PRESENTE NOTA. IL PROBLEMA STORICO

Ci riferiamo ad una lacuna che appare in una dimostrazione dell'opera indicata nel titolo, lacuna che, per primo, stando alla documentazione tramandataci, Eutocio (V sec. d.C.) tentò di colmare.

Il passaggio archimedeo in questione è il seguente (Traduzione A. Frajese, [4] pp. 95–96):

PROPOSIZ. 9. *Se, dato un cono isoscele, una linea retta è secante del cerchio base del cono, se poi si congiungono gli estremi della* [*corda*] *secante col vertice del cono, il triangolo che è contenuto dalla* [*corda*] *secante e dalle congiungenti col vertice sarà minore* [*di quella parte*] *della superficie laterale del cono, che è* [*compresa*] *tra le* [*suddette*] *rette congiungenti col vertice.*

Sia ABΓ il cerchio di base di un cono isoscele, e il vertice sia Δ: si tracci una retta qualunque AΓ secante del cerchio di base, e si traccino AΔ , ΔΓ congiungenti il vertice con A , Γ. Dico che il triangolo AΔΓ è minore della [parte della] superficie del cono che è limitata da AΔΓ.

Si divida l'arco di circonferenza ABΓ per metà in B, e si traccino le congiungenti AB , BΓ , ΔB: *la somma dei triangoli* ABΔ , BΓΔ *sarà maggiore del triangolo* AΔΓ... (1).

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Contratto di Ricerche del Consiglio Nazionale delle Ricerche, dal titolo: « La Matematica nei suoi fondamenti storici, filosofici e psicologici ».

(**) Nella seduta del 14 febbraio 1981.

(1) Più precisamente, il passaggio in questione è quello finale, da noi qui scritto in corsivo. Il suo originale greco dice: « ἔσται δὴ τὰ ABΔ, BΓΔ τρίγωνα μείζονα τοῦ AΔΓ τριγώνου ». E la sua traduzione latina (HEIBERG, v. [5] p. 35): « erunt igitur trianguli ABΔ, BΓΔ maiores triangulo AΔΓ ».

Il significato delle lettere usate è quello indicato nella fig. 1, che noi qui disegnamo liberamente, desiderando mettere più avanti in evidenza altri opportuni elementi geometrici.

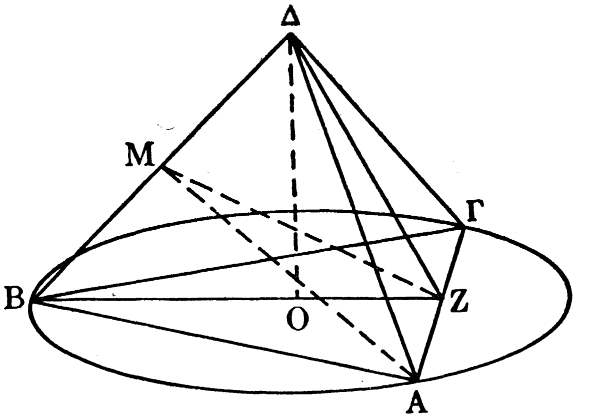


Fig. 1.

Non sembra che il tentativo di Eutocio (v. [6] pp. 28–31) avesse molto soddisfatto gl'innumerevoli studiosi di Archimede fino al sec. XIX, quando si esaminino le successive edizioni dell'opera. D'altronde quel tentativo è stato riconosciuto in questo secolo, precisamente da E. J. Dijksterhuis ([2] p. 156) e da C. Mugler ([8], Notes Complémentaires, p. 253), come non riuscito, perché oscuro, o almeno incompleto. Vedremo nel seguito (n. 3) che Dijksterhuis, volendo chiarire, o piuttosto correggere Eutocio, ha interpolato una dimostrazione, in certo modo, simile, ma parziale cioè anch'essa incompleta.

Storicamente la questione ci sembra particolarmente interessante per più ragioni.

a) Mentre alcune edizioni dell'opera, attraverso i secoli, non si soffermano sul passaggio citato (2), come fanno anche alcuni studiosi di sezioni parziali dell'opera stessa (3), altre edizioni aggiungono un commento, che particolarizza l'ipotesi fatta da Archimede.

Citiamo testualmente, per esempio, il commento di I. Barrow, nella sua edizione del 1675 (*Archimedis Opera, Apollonii Pergaei Conicorum Libri IIII, Theodosii Sphaerica, Methodo nova illustrata, et succincte demonstrata*, Londini, p. 8):

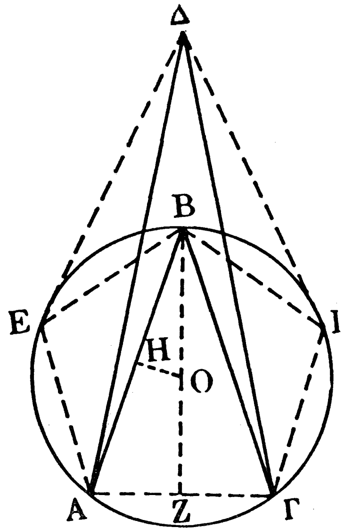
(2) Per esempio T. Gechauff Venatorius, *Archimedis Syracusani Philosophi ac Geometrae excellentissimi Opera*, Basileae, 1544; F. Peyrard, *Oeuvres d'Archimède*, Paris, 1807; T. L. Heath, *The works of Archimedes*, New York, 1897–1912; A. Czwalina, *Archimedes Werke*, Darmstadt, 1963; A. Frajese, [4].

(3) Per esempio F. Commandino, *Archimedis Opera non nulla*, Venetiis, 1558; F. Maurolico, *Admirandi Archimedis Syracusani... Opus*, Panormi, 1685; I. A. Borelli, *Elementa Conica Apollonii Paergei et Archimedis Opera nova et breviori methodo demonstrata*, Romae, 1679.

« Liquet triang. $A\Delta B + \Gamma\Delta B > A\Delta\Gamma$; quia $AB + \Gamma B > A\Gamma$, et *altitudo communis* est. » (4).

b) La nostra scelta, come esempio, è caduta particolarmente sul commento di Barrow perché recentemente C. S. Roero ha scoperto, negli archivi della Biblioteca Universitaria di Basilea, un appunto autografo di Giacomo Bernoulli allegato all'edizione di Barrow, appunto che corregge perfettamente l'errore contenuto nel commento stesso (L'errore è nelle tre parole finali: « *altitudo communis* est »; tali parole, nel testo, appaiono sottolineate da Bernoulli, il quale annota: « *N.B. lapsum Auctoris in Proposit.* »).

La correzione fatta da Bernoulli potrà anche leggersi nell'edizione critica del vol. II delle opere di quel grande matematico, che uscirà a cura dell'apposito Comitato Svizzero (« Stiftungskuratorium ») di Basilea (Edit. Birkhäuser): precisamente nella II parte di quel volume, quella cioè che riporterà gli scritti di matematica elementare, tutti analizzati e studiati dalla stessa C. S. Roero. In effetti Bernoulli dà una sua dimostrazione di quanto semplicemente affermato da Archimede: è anche una dimostrazione che non ha evidentemente *nessuna pretesa di ricostruzione storica.*



Ecco quanto scrive Bernoulli: « Auctor altitudinem Coni $O\Delta$ nimis praecipitanter pro altitudine communi Triang. assumpsit, quare ita corrige: Si

(4) « È chiaro che la somma [delle aree] dei triangoli $A\Delta B$ e $\Gamma\Delta B$ è $>$ [dell'area del triangolo] $A\Delta\Gamma$; poichè $AB + \Gamma B > A\Gamma$ e l'altezza è comune ».

Il commento di Barrow consiste nelle parole: « quia $AB + \Gamma B > A\Gamma$, et *altitudo communis* est ». Ci siamo permessi di sostituire le lettere usate da Barrow, con quelle già date sopra (v. fig. 1) e di scrivere in notazione moderna il simbolo di « maggiore ».

sit OH vel = vel > OZ, patet fore etiam $H\Delta$ = vel > $Z\Delta$, unde constat propositum:

Sin OH < OZ, ducta intelligatur ad axem $O\Delta$ recta HK, sic ut ang. OHK sit = $OZ\Delta$, unde quia ang. $OH\Delta > OZ\Delta$ (OHK) erit & $\Delta O > KO$, & $\Delta H > KH$; adeoque $\Delta Z.KH$ (: : OZ.OH, ob simil. Triang. ΔZO & KHO) > $\Delta Z.\Delta H$; sed BO.OH (: : BA.AZ) > OZ.OH, quare fortiùs BA.AZ > $\Delta Z.\Delta H$; ac proinde $BA \times \Delta H$ (Triang. $A\Delta B + \Gamma\Delta B$) > $AZ\Delta$ (Triang. $A\Delta\Gamma$) Q.E.D. » [5].

Noi invece ci siamo posti alla ricerca di una dimostrazione che abbia tutti i caratteri di una ricostruzione storica: che cioè s'inserisca, con il massimo d'immediatezza possibile, nel discorso dell'epoca. Intendiamo dire: *che essa presenti riferimenti immediati* agli *Elementi* d'Euclide, *o eventualmente allo stesso contesto archimedeo.* E poiché, riuscendoci pienamente una tale ricerca, abbiamo anche avuto la felice sorpresa di constatare la grande semplicità della nostra dimostrazione, abbiamo l'ardire di considerare come molto verosimile l'ipotesi che formuliamo: *aver ricostruito il ragionamento che lo stesso Archimede volle sottintendere* (v. n. 2).

c) L'interesse della questione ci sembra accresciuto dal fatto che lo stesso Heiberg, nella sua edizione critica al *Commento* di Eutocio [6], pur accorgendosi delle difettuosità di questo nel passo citato, cade nel solito errore in cui già erano caduti altri commentatori di Archimede (v. sopra, al punto *a*) [7].

(5) « L'Autore [BARROW] ha troppo precipitosamente assunto l'altezza $O\Delta$ del cono come altezza comune ai triangoli, perciò correggi così:

Se OH fosse = oppure > OZ, è evidente che sarebbe anche $H\Delta$ = oppure > $Z\Delta$, e di qui risulterebbe il richiesto.

Se invece OH < OZ, si pensi la retta HK unita all'asse $O\Delta$, in modo che sia $\widehat{OHK} = \widehat{OZ\Delta}$. Di qui, poichè $\widehat{OH\Delta} > \widehat{OZ\Delta}$ ([angolo che è uguale a] $\widehat{OHK}$), si dedurrà $\Delta O > KO$ e $\Delta H > KH$; dunque $\Delta Z : KH$ ([rapporto che è] $= OZ : OH$, per la similitudine dei triangoli ΔZO e KHO) $> \Delta Z : \Delta H$; ma $BO : OH$ ([rapporto che è] $= BA : AZ$) $> OZ : OH$, perciò, a maggior ragione, $BA : AZ > \Delta Z : \Delta H$. Ne segue: $BA \cdot \Delta H$ (che è la somma delle aree dei triangoli $A\Delta B$ e $\Gamma\Delta B$) $> AZ \cdot Z\Delta$ (area del triangolo $A\Delta\Gamma$), c.d.d. ».

Anche in questo caso ci siamo permessi di sostituire le lettere usate da BERNOULLI, con quelle già date sopra (v. fig. 1) e di scrivere in notazione moderna i simboli > e <. Nella traduzione, inoltre, abbiamo adottato le notazioni moderne anche per indicare angoli, rapporti, proporzioni, ecc.

Un commento sulle note di BERNOULLI all'edizione di BARROW verrà pubblicato da C. S. ROERO in altra sede.

(6) Ved. HEIBERG, [6], pp. 28–31.

(7) Nella nota 1), a pag. 31 di [6], Heiberg afferma infatti: « Non est, unde hoc concludatur, ita demonstrari potest: cum conus aequicrurius sit, altitudines triangulorum $A\Delta\Gamma$, $A\Delta B$, $B\Delta\Gamma$ aequales sunt, quare $A\Delta\Gamma = \frac{1}{2} Z\Delta \times A\Gamma$,

$$A\Delta B + \Delta B\Gamma = \tfrac{1}{2} Z\Delta \times (AB + B\Gamma);$$

sed $AB + B\Gamma > A\Gamma$; itaque $A\Delta B + \Delta B\Gamma > A\Delta\Gamma$. » Lo stesso viene ribadito in [7], p. 31, nota 2. Questo errore si trova inoltre in P. VER EECKE, *Les Oeuvres complètes d'Archimède*, Paris–Bruxelles, 1921, p. 17.

2. PROPOSTA DI RICOSTRUZIONE

Dimostreremo l'affermazione che conclude il passaggio archimedeo in questione (affermazione sottolineata al principio del n. 1, v. fig. 1), nel seguente modo.

Si conducano da A la perpendicolare AM alla retta BΔ, e da Δ la perpendicolare ΔZ alla corda AΓ (Eucl. I.12, v. [3], p. 93). Sarà Z punto medio di AΓ, e gli angoli $\widehat{\Delta ZA}$, $\widehat{BZA}$ entrambi retti. Segue $\Delta Z < \Delta A = \Delta B$. La retta AZ sarà perpendicolare al piano BZΔ (Eucl. XI.4, [3] p. 867). Poiché, in tale piano, la retta BΔ non passa per Z, sarà $M \neq Z$ e $AM > AZ$ (8). Si avrà dunque:

$$\text{area } AB\Delta = \tfrac{1}{2}\, \Delta B \cdot AM > \tfrac{1}{2}\, AZ \cdot \Delta Z = \text{area } \Delta ZA\,,$$

$$\text{area } (AB\Delta + \Gamma B\Delta) = 2 \text{ area } AB\Delta > 2 \text{ area } \Delta ZA = \text{area } A\Delta\Gamma\,, \qquad \text{c.d.d.}$$

3. IL TENTATIVO DI EUTOCIO E LA RICERCA DI DIJKSTERHUIS

Del più volte citato tentativo di Eutocio, Dijksterhuis dice semplicemente: « è incomprensibile », e in una nota apposita (v. [2]) ne propone la sostituzione. Questa però risulta gravemente incompleta, come qui faremo vedere.

In sostanza, Eutocio ricorre a un ribaltamento del triangolo AΔB intorno alla generatrice ΔA del cono. In tale ribaltamento, il punto B (fig. 1) descrive evidentemente un arco di circonferenza avente il centro su ΔA, fino a raggiungere una certa posizione B'' sulla circonferenza base del cono (Evidentemente B'' è il simmetrico di B rispetto alla retta OA). Ciò che Dijksterhuis chiama « incomprensibile », noi crediamo di dover qualificare come una « petizione di principio ». Infatti Eutocio (v. [6] p. 31^3) afferma semplicemente essere:

area $A\Delta B'' >$ area $A\Delta Z$, perché area $AB\Delta >$ area $A\Delta Z$, e di qui crede di poter immediatamente concludere (p. 31^{4-5}). Ciò non è accettabile, perché la limitazione: area $AB\Delta >$ area $A\Delta Z$ è proprio quella che occorre dimostrare.

Evidentemente Dijksterhuis si ispira a Eutocio. Lo fa assai da vicino, ribaltando lo stesso triangolo AΔB intorno alla stessa generatrice ΔA, ma adagiando tale triangolo sul piano del triangolo AZΔ e dalla stessa banda di questo. Ottiene

(8) Mancando, sia negli *Elementi* di Euclide, sia nelle opere di Archimede, la proposizione esplicitamente enunciata: « Il segmento di perpendicolare abbassato da un punto A su di un piano non passante per A, è minore del segmento congiungente A ad un qualunque punto M di quel piano, che sia distinto dal piede Z di detto segmento perpendicolare », si può qui nuovamente far riferimento a Eucl. XI.4 deducendosi $MZ \perp AZ$, infine a Eucl. I.17 e 19, v. [3], pp. 102 e 106.

cosí una disposizione come quella di fig. 2 (9). Poiché $\widehat{A\Delta B} + \widehat{B\Delta \Gamma} > \widehat{A\Delta \Gamma}$ (Eucl. XI.20, [3] p. 887), sarà anche $\widehat{A\Delta B} > \widehat{A\Delta Z}$. Dijksterhuis ritiene allora di poter dedurre che la corda AM del cerchio di diametro $A\Delta$ è maggiore della corda AZ (perché, afferma, l'arco $\overset{\frown}{AM}$ sotteso dalla prima è maggiore dell'arco $\overset{\frown}{AZ}$ sotteso dalla seconda, v. [2] p. 157^{10-13}). Ora questa deduzione è lecita se $\widehat{A\Delta B} \leq \frac{\pi}{2}$ (come abbiamo effettivamente supposto nelle figg. 1, 2),

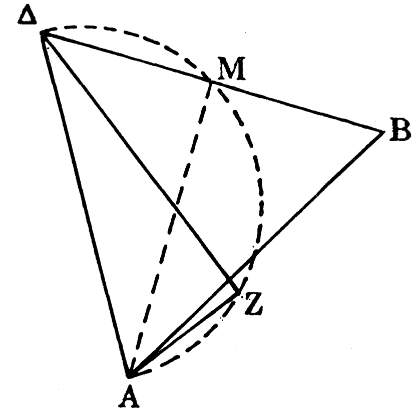


Fig. 2.

può non esserlo se $\widehat{A\Delta B} > \frac{\pi}{2}$. E il caso $\widehat{A\Delta B} > \frac{\pi}{2}$, non preso in considerazione dall'Autore, può benissimo presentarsi, come si riconosce subito nell'esempio delle due figg. 1* e 2* (ivi avendosi scelta l'altezza $O\Delta$ del cono, molto piccola).

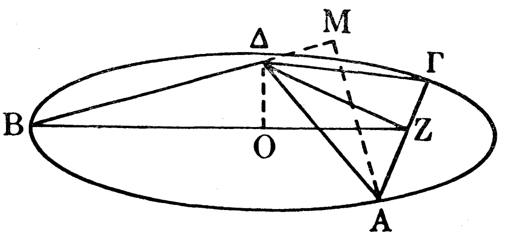


Fig. 1*.

A questo punto, per capire in profondità la ricerca di Dijksterhuis, tornano opportune le seguente osservazioni.

(9) In fig. 2 si deve intendere che il piano del disegno è quello del triangolo $A\Delta Z$. Ci siamo permessi di sostituire le lettere usate da Dijksterhuis, [2] pp. 155–157, con quelle già date sopra (v. fig. 1).

1ª) Nel testo archimedeo non è specificato (v., al n. 1, la fine di quanto abbiamo riportato della proposiz. 9) se l'arco di circonferenza base del cono, avente gli estremi A , Γ e il punto medio B, sia (nell'ipotesi che O non cada su AΓ) il maggiore (come in fig. 1) o il minore dei due.

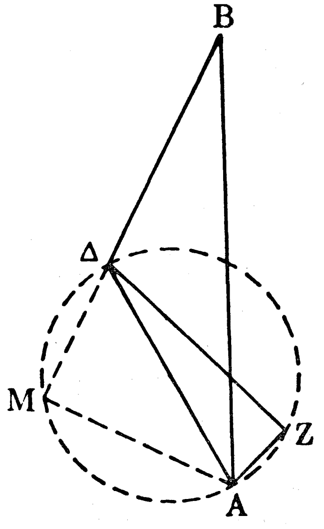


Fig. 2*.

Riportiamo l'essenziale della fig. 1, completandolo col punto B′ simmetrico di B rispetto ad O (fig. 3), cioè col punto B′ medio dell'arco minore.

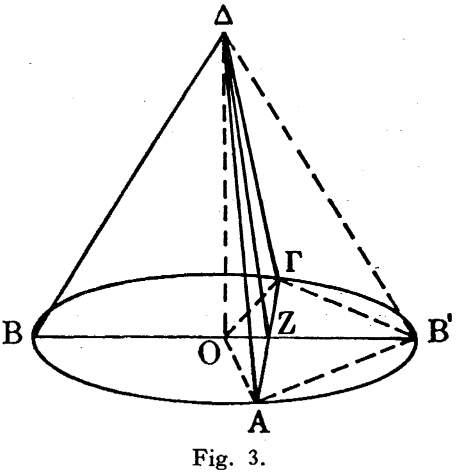


Fig. 3.

2ª) Abbiamo visto, poco sopra, che il ragionamento di Dijksterhuis può cadere in difetto quando si eseguisca, sul piano AΔZ il ribaltamento del triangolo AΔB. Ma esso non cade certamente in difetto, quando si eseguisca il ribaltamento del triangolo AΔB′. L'Autore, senza entrare esplicitamente nel merito, ma disegnando nel suo lavoro due figure appropriate (v. ivi figg. 56 e 57), sembra proprio riferirsi a questo secondo caso.

La spiegazione del fatto si ritrova subito constatando essere $A\widehat{\Delta}B' < A\widehat{O}B' \leq \frac{\pi}{2}$ (il segno $=$ valendo soltanto nel caso che $A\Gamma$ passi per O, caso da noi escluso perché privo d'interesse). Se ne deduce che il ragionamento di Dijksterhuis verrebbe immediatamente completato qualora si aggiungesse la dimostrazione della limitazione:

$$\text{area } A\Delta B > \text{area } A\Delta B' \tag{1}$$ [10].

Ma quest'ultima dimostrazione, seguendo Dijksterhuis, si presenta difficile e complicata (quando, ben s'intende, si chieda di mantenere la tecnica dimostrativa nel quadro archimedeo [11]), perché, attraverso codesti ribaltamenti (di cui Eutocio fu il non felice ispiratore), non si fa in sostanza altro che cercare di trasferire nell'ambito della geometria elementare piana un modo di ragionare che, in realtà, è pertinente della geometria dello spazio. Infatti, qualora si resti nell'ambito della geometria dello spazio, tutto si presenta semplice e facile, anche la dimostrazione della (1) (basta ragionare sulla fig. 3 in modo analogo a quanto abbiamo fatto al n. 2).

La stessa osservazione vale per le dimostrazioni [12] proposte da E. Nizze, e I. N. Veselovskii e altri, anch'esse basate sulla geometria piana.

La proposta di J. L. Berggren [13], poi, che questa proprietà sia una diretta conseguenza di un'osservazione che Archimede fece, senza dimostrarla, nella prop. 3 dello stesso libro, è indubbiamente interessante, ma, a nostro parere, non convincente. In primo luogo è assai discutibile l'attribuzione ad Archimede del procedimento dimostrativo di Eutocio, che supplisce, anche in questo caso, alla « lacuna » del testo archimedeo, sia per la distanza nel tempo di questi due matematici (Eutocio visse circa 7 secoli dopo Archimede) sia per la diversità di « stile matematico ». In secondo luogo la dimostrazione di Berggren si basa su proprietà di geometria piana che nascondono l'uso della trigonometria [14]. Ci sembra quindi improbabile che Archimede si volesse riferire a delle proprietà che non erano ancora state dimostrate in modo rigoroso.

(10) Ringraziamo la prof. Fulvia Skof che ci ha segnalato questo fatto interessante.

(11) Ovviamente si deve escludere l'uso sia di proprietà estremanti, sia (in qualsiasi modo) di tecniche che, nella Storia della Matematica, sono poi apparse a distanza di secoli da Archimede.

(12) Cfr. J. L. BERGGREN, [1], pp. 2-3.

(13) Cfr. J. L. BERGGREN, [1], pp. 3-4.

(14) La trigonometria, nel senso ristretto del termine, era, all'epoca di Archimede, ancora molto informe. Erano già stati trovati dai teoremi equivalenti a formule trigonometriche (ad esempio le prop. 12 e 13 del II libro degli *Elementi* di Euclide), ma non si era ancora pervenuti ad una trigonometria sistematica. Cfr. B. L. VAN DER WAERDEN, *Erwachende Wissenschaft*, Basel u. Stuttgart, 1966, pp. 321, 344, 448, 452, e, per maggiori particolari, J. TROPFKE, *Archimedes und die Trigonometrie*, Archiv für die Geschichte der Mathematik, 10, 1927-1928, pp. 432-463.

4. CONCLUSIONI

Nell'introduzione alla sua pregevole edizione delle opere di Archimede, da noi più volte citata, Attilio Frajese osserva che « l'esposizione [di Archimede] potrebbe paragonarsi a quella di un matematico moderno che rediga una serie di *memorie* per iniziati. In conseguenza, destinando le sue opere a matematici provetti, Archimede tralascia le *minuzie*, e assai spesso affida tacitamente al lettore molti notevoli *passaggi* che si presentano tutt'altro che facili e immediati, pur se egli affermi assai spesso che la cosa è *manifesta* (φανερόν) o *chiara* (δῆλον). Anzi a questo proposito verrebbe talvolta quasi da pensare che Archimede si compiaccia di presentare ai *colleghi* di Alessandria questioni difficili assicurando che per lui si tratti di cose manifeste o evidenti » ([4] p. 10). E riporta, in proposito un espressivo giudizio di Andrea Tacquet (1612–1660) sugl'innumerevoli ammiratori di Archimede (ma quale matematico è, più di lui, degno di ammirazione?!): « Sed illum plures laudant, quam legant; admirantur plures quam intelligant ».

D'accordo con Frajese, noi non ameremmo in ogni caso un commento alle opere di Archimede che entrasse in tutti i dettagli esplicativi, quasi a voler « completare » quelle opere, alla maniera (osiamo dire) « scolastica » di Euclide. D'accordo sì, ma non senza una precisazione, che possiamo qui ben mettere in rilievo con la seguente osservazione di carattere metodologico.

Nello studio delle opere di un genio matematico di così straordinaria grandezza come Archimede, il cui pensiero traspare pur sempre di cristallina chiarezza, le interpolazioni delle non poche lacune (ma abbiamo già detto che non sono queste, in generale, ad attirare il nostro interesse!) dovrebbero sempre venir contenute nei limiti più ristretti e più semplici possibile.

Da ultimo desideriamo insistere, ancora una volta, sull'intento esclusivamente « storico » della presente nota. Le vicende del passo da noi esaminato ci sono sembrate alquanto singolari, attraverso i secoli, tanto da incoraggiarci a pubblicare questa nostra personale proposta esplicativa.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. L. BERGGREN (1977) – *A lacuna in book I of Archimedes' Sphere and Cylinder*, « Historia mathematica », *4*, 1–5.

[2] E. J. DIJKSTERHUIS (1957) – *Archimedes*, New York.

[3] A. FRAJESE e L. MACCIONI (1970) – *Gli Elementi di Euclide*, Torino.

[4] A. FRAJESE (1974) – *Opere di Archimede*, Torino.

[5] J. L. HEIBERG (1880) – *Archimedis Opera Omnia*, Vol. I, Lipsiae.

[6] J. L. HEIBERG (1881) – *Archimedis Opera Omnia*, Vol. III, Lipsiae.

[7] J. L. HEIBERG e E. S. STAMATIS (1972) – *Archimedis Opera Omnia*, Vol. I, Stutgardiae.

[8] C. MUGLER (1970) – *Archimède. Tome premier. De la sphère et du cylindre. La mesure du cercle. Sur les conoides et les sphéroides*, Paris.