Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Nicola Rodino

Seminorme submoltiplicative su algebre di funzioni

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **70** (1981), n.2, p. 49–54.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1981_8_70_2_49_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1981.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 14 febbraio 1981

Presiede il Presidente della Classe GIUSEPPE MONTALENTI

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Matematica. — *Seminorme submoltiplicative su algebre di funzioni.*
Nota di NICOLA RODINÒ, presentata (*) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — In this note we study algebra seminorms on a functions algebra and we relate the existence of algebra norms on C (X) with the topology of X. Also a theorem, that states which are the continuous characters, is demonstrated in a class of seminormed algebras.

1. Le algebre complesse non sempre ammettono norme di algebra. Nel corso di questa nota, l'esistenza di una norma di algebra su C (X) viene posta in relazione con la topologia di X mediante il seguente:

TEOREMA 2. *Sia* X *uno spazio topologico completamente regolare. Esiste una norma di algebra su* C (X) *se e solo se* X *è pseudocompatto.*

Come conseguenza del teorema, vogliamo sottolineare il seguente:

COROLLARIO 1. *Sia* X *uno spazio topologico realcompatto. Esiste una norma di algebra su* C (X) *se e solo se* X *è compatto.*

Poiché uno spazio di Lindelöf è realcompatto, consegue dal Cor. 1 che C (X) non ammette norme di algebra se X è uno spazio di Lindelöf non compatto. Tale condizione è soddisfatta in particolare da ogni sottospazio non compatto di $\mathbf{R}^n$. Nella terza parte, applicando i risultati ottenuti ad una classe di algebre astratte, caratterizziamo i caratteri continui per una seminorma assegnata di algebra.

(*) Nella seduta del 14 febbraio 1981.

2. Sia A un'algebra unifera. Per seminorma di algebra su A si intenderà sempre una seminorma submoltiplicativa tale che l'elemento unità abbia seminorma 1. Sia p una seminorma di algebra su A. Ker p è $p^{-1}(0)$; (A, p) l'algebra A munita della struttura uniforme dedotta da p, $(\bar{A}, \bar{p})$ il completamento di (A, p). $X(A)$ è l'insieme dei caratteri uniferi di A, $X(A, p)$ lo spazio dei caratteri continui di (A, p), munito della topologia debole. Per ogni elemento a di A, $\hat{a}$ è la trasformata di Gelfand di a. Si ricorda che la topologia di $X(A, p)$ è la topologia iniziale rispetto alle trasformate di Gelfand degli elementi di A. Se $j : (A, p) \mapsto (\bar{A}, \bar{p})$ è l'applicazione canonica, allora $\ker j = \ker p$ e l'applicazione $X(j)$ da $X(\bar{A}, \bar{p})$ su $X(A, p)$ associata a j è un omeomorfismo, che conserva le norme dei caratteri (come forme lineari). Essendo $(\bar{A}, \bar{p})$ un'algebra di Banach, $X(A, p)$ è un compatto non vuoto. Ricordiamo infine che ogni elemento di (A, p), la cui trasformata di Gelfand non è mai nulla, ha un'immagine invertibile in $(\bar{A}, \bar{p})$. Per tutte queste nozioni e per altre generalità si rinvia a [1] e a [2]. Sia X uno spazio topologico. Indichiamo con $C(X)$ e con $B(X)$ rispettivamente l'algebra delle funzioni continue su X a valori complessi e quella delle funzioni continue e limitate. Se f appartiene a $B(X)$, si pone $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$; se Y è un sottoinsieme di X e $f \in C(X)$ è limitata su Y, si pone $\|f\|_Y = \sup_{y \in Y} |f(y)|$.

Da questo punto in poi, A sarà un'algebra complessa di funzioni su un insieme X, contenente le costanti ed i cui caratteri sono rappresentabili mediante i punti di X, vale a dire si suppone che l'applicazione $E : X \mapsto X(A)$ definita da $E(x) \cdot f = f(x)$ sia biunivoca. Si munisce X della topologia iniziale rispetto alle funzioni di A, che viene detta la A–topologia di X. Sia p una seminorma di algebra su A e sia F la restrizione dell'inversa di E a $X(A, p)$.

PROPOSIZIONE 1. *F è un omeomorfismo fra* $X(A, p)$ *e la sua immagine in* X.

Dimostrazione. Essendo F iniettiva, $X(A, p)$ compatto e X di Hausdorff, è sufficiente dimostrare che F è continua. Poiché la topologia di X è la topologia iniziale rispetto alle funzioni di A, occorre far vedere che, per ogni $f \in A$, $f \circ F$ è continua. Per ogni $\mathfrak{X} \in X(A, p)$ si ha:

$$f(F(\mathfrak{X})) = E(F(\mathfrak{X})) \cdot f = \mathfrak{X}(f) = \hat{f}(\mathfrak{X}) .$$

Pertanto $f \circ F$ è la trasformata di Gelfand di f e quindi è continua.

Sia Y contenuto in X e sia $r_Y : A \mapsto C(Y)$ l'applicazione di restrizione $f \to f_{|Y}$. Sia W l'insieme delle parti Y di X tali che Im r_Y sia contenuta in $B(Y)$ e $r'_Y : (A, p) \mapsto B(Y)$ sia continua per $\| \ \|_Y$ su $B(Y)$.

Sia $S(p) = \{x : x \in X \text{ e } \forall f)\, f \in A, |f(x)| \leq p(f)\}$.

PROPOSIZIONE 2. *Per ogni* $Y \in W$, r'_Y *ha norma* 1. *La famiglia* W *ha un più grande elemento* (per l'inclusione). *Inoltre* $S(p) = \text{Im } F = \max. W$.

Dimostrazione. $S(p)$ è evidentemente uguale a $\mathrm{Im}\, F$. Se $f \in A$, per ogni $x \in S(p)$ è $|f(x)| \leq p(f)$ e quindi $\|f\|_{S(p)} \leq p(f)$.

$r'_{S(p)}$ risulta continua e pertanto $S(p) \in W$. Sia $Y \in W$. Se $y \in Y$, per ogni f si ha $|f(y)| \leq \|f\|_Y \leq \text{cost.}\, p(f)$. Il carattere $E(y)$ risulta continuo, quindi di norma 1, $|f(y)| \leq p(f)$ e $\|f\|_Y \leq p(f)$.

Basta osservare che $r'_Y(1) = 1$ per concludere che la norma di r'_Y è 1.

DEFINIZIONE 1. *$S(p)$ è detto il supporto di p.*

COROLLARIO 1. *Il supporto di p è compatto.*

Dimostrazione. Segue dalle Proposizioni 1 e 2.

Sia $R(p)$ il radicale topologico di (A, p).

COROLLARIO 2. *$R(p)$ è l'ideale delle funzioni di A nulle sul supporto di p e $\ker p$ è contenuto in $R(p)$.*

Dimostrazione. $R(p)$ è l'insieme delle f di A, la cui trasformata di Gelfand è nulla su $X(A, p)$. $\hat{f}(\mathfrak{X}) = 0$ equivale a $f(F(\mathfrak{X})) = 0$ per ogni $\mathfrak{X} \in X(A, p)$ e quindi f è nulla su $\mathrm{Im}\, F$. Se f è tale che $p(f) = 0$, allora per ogni $x \in S(p)$ $f(x) = 0$ poiché $|f(x)| \leq p(f) = 0$.

DEFINIZIONE 2. *X si dice A–regolare se dato un chiuso per la A–topologia C contenuto in X e un punto x di X non appartenente a C, esiste f appartenente a A tale che $f(x) = 1$ e $f_{|C} = 0$.*

Sia $\bar{R}(p)$ l'insieme delle f appartenenti a A il cui supporto è disgiunto dal supporto di p.

TEOREMA 1. *Se X è A–regolare e se $f \in A$ implica $\bar{f} \in A$, valgono le seguenti proprietà:*

1) *$\bar{R}(p)$ è contenuto in $\ker p$.*
2) *se p è una norma, il supporto di p è X.*

La dimostrazione del teorema poggia sul seguente lemma:

LEMMA. *Sotto le ipotesi del Teorema 1, dati in X un compatto K e un chiuso C disgiunti, esiste $f \in A$ tale che $f(x) = 0$ per $x \in C$ e $f(x) \neq 0$ per ogni x appartenente a K.*

Dimostrazione. Se $f \in A$, si pone $Z(f) = f^{-1}(0)$. Poiché X è A–regolare, esiste un sottoinsieme B di A tale che $C = \bigcap_{f \in B} Z(f)$. La famiglia di chiusi in K $Z(f) \cap K$ ha intersezione vuota, essendo C disgiunto da K. Esistono pertanto $f_1, \cdots, f_n \in B$ tali che $\bigcap_{i=1}^{n} Z(f_i) \cap K = \varnothing$, ovvero le funzioni f_i non hanno zeri in comune su K. La funzione $f = \sum_{i=1}^{n} f_i \bar{f}_i$ ha pertanto le proprietà richieste nel Lemma.

Dimostrazione del Teorema 1. 1) Sia $f \in \bar{\mathrm{R}}(p)$. Il supporto di f è disgiunto dal supporto $\mathrm{S}(p)$ di p. Poiché X è A–regolare, esiste g appartenente a A nulla sul supporto di f e mai nulla su $\mathrm{S}(p)$ (Prop. 2. Cor. 1) per via del lemma. Evidentemente $fg = 0$. Sia $j : (\mathrm{A}, p) \mapsto (\bar{\mathrm{A}}, \bar{p})$ l'applicazione canonica di (A, p) nel suo completamento. $j(g)$ è invertibile poiché per ogni carattere $\mathfrak{X}$ di $\mathrm{X}(\bar{\mathrm{A}}, \bar{p})$ sia ha: $\mathfrak{X}(j(g)) = \mathrm{X}(j)(\mathfrak{X})(g) = g(\mathrm{F}(\mathrm{X}(j)(\mathfrak{X}))) \neq 0$. Poiché $j(f) j(g) = j(fg) = 0$, deve essere $j(f) = 0$ e quindi $f \in \ker p$.

2) Supposto che $\mathrm{S}(p)$ sia diverso da X, sia U un intorno non denso di $\mathrm{S}(p)$. Sia x appartenente al complementare di $\bar{\mathrm{U}}$. Essendo per ipotesi X A–regolare esiste $f \in \mathrm{A}$ tale che $f_{|\bar{\mathrm{U}}} = 0$ e $f(x) = 1$. È evidente che il supporto di f è contenuto nel complementare di U ed è quindi disgiunto da $\mathrm{S}(p)$. Si deduce che $f \in \bar{\mathrm{R}}(p)$. Essendo per ipotesi p una norma, $\ker p = \{0\}$ e a fortiori $\bar{\mathrm{R}}(p) = \{0\}$, essendo contenuto in $\ker p$, per quanto già visto al punto 1). Ciò è in contraddizione con $f \neq 0$ e quindi $\mathrm{S}(p) = \mathrm{X}$.

COROLLARIO 1. *Sotto le ipotesi del Teorema 1, se il supporto di p è aperto allora* $\ker p = \bar{\mathrm{R}}(p) = \mathrm{R}(p)$.

Dimostrazione. Si ha $\bar{\mathrm{R}}(p) \subseteq \ker p \subseteq \mathrm{R}(p)$ e $\bar{\mathrm{R}}(p) = \mathrm{R}(p)$.

COROLLARIO 2. *Sia* X *un insieme il cui cardinale non sia misurabile* ([3] p. 161) *e sia* A *l'algebra di tutte le funzioni su* X. *Sotto tali ipotesi, per ogni seminorma p di algebra su* A, *esiste un sottoinsieme finito* Y *di* X *tale che p sia equivalente a* $\| \ \|_{\mathrm{Y}}$. *Più precisamente, esiste una costante* $c \geq 1$ *tale che, per ogni* $f \in \mathrm{A}$, *si abbia*:

$$\|f\|_{\mathrm{Y}} \leq p(f) \leq c \, \|f\|_{\mathrm{Y}} .$$

Dimostrazione. Dire che il cardinale di X non sia misurabile, equivale a dire che i caratteri di A sono rappresentati dai punti di X ([3], Chap. 12). È facile verificare che sono soddisfatte le ipotesi del Cor. 1 del Teorema 1, quindi $\ker p = \mathrm{R}(p)$. Sia Y il supporto di p. Y è finito, essendo un compatto di uno spazio discreto. D'altra parte $\mathrm{A}/\ker p$ è di dimensione finita su **C**, essendo uguale a $\mathrm{A}/\mathrm{R}(p)$ (Prop. 2, Cor. 2) che a sua volta è isomorfa all'algebra di tutte le funzioni su Y. Poiché su uno spazio vettoriale di dimensione finita tutte le norme sono equivalenti, le norme dedotte da p e da $\| \ \|_{\mathrm{Y}}$ sono equivalenti e quindi anche p e $\| \ \|_{\mathrm{Y}}$ sono equivalenti in A. La relazione più precisa è conseguenza della Prop. 2.

Per quanto riguarda le definizioni di spazio pseudocompatto e di spazio realcompatto e le loro proprietà necessarie per la comprensione di quanto segue, si rinvia a [3] o a [4].

TEOREMA 2. *Sia* X *uno spazio topologico completamente regolare. Esiste una norma di algebra su* C (X) *se e solo se* X *è pseudocompatto. Inoltre tale norma è più fine di* $\| \ \|$.

Dimostrazione. Sia YX la realcompattificazione di X. È noto che C (YX) è isomorfa a C (X) ([3], p. 114). Poiché YX è completamente regolare, la sua topologia coincide con la C (YX)–topologia e poiché YX è realcompatto, i caratteri di C (YX) sono rappresentati dai punti di YX. Sono pertanto verificate le ipotesi del Teorema 1 e del Cor. 1 e quindi YX è compatto. Poiché uno spazio topologico è pseudocompatto se e solo se la sua realcompattificazione è compatta ([3], Problema 8 A, p. 125), segue la tesi. Viceversa se X è pseudocompatto, essendo C (X) contenuto in B (X), esiste la norma del sup. Per terminare si applichi la Prop. 2.

COROLLARIO 1. *Sia* X *uno spazio topologico realcompatto. Esiste una norma di algebra su* C (X) *se e solo se* X *è compatto.*

Dimostrazione. Pseudocompatto e realcompatto equivale a compatto.

OSSERVAZIONE. Il teorema di Gelfand–Mazur asserisce che, se un'algebra commutativa su **C** contiene un'estensione propria di **C**, allora non possiede norme. Il Cor. 1 del Teorema 2 fornisce molti esempi di algebre che non ammettono norme ma non contengono alcuna estensione propria di **C**.

3. Scopo di questa ultima parte è applicare il Teorema 1 ad algebre che a priori non sono algebre di funzioni. Innanzitutto precisiamo che tutto ciò che è stato dimostrato, resta valido nella categoria delle algebre reali, con piccole modifiche del tutto evidenti. Ad esempio nel Teorema 1 l'ipotesi su A relativa al coniugio, può essere omessa, essendo automaticamente verificata in un'algebra reale. È sottointeso che, quando si tratta di algebre reali, i caratteri sono i morfismi uniferi in **R**. Sia A un'algebra e sia R il suo radicale razionale (la intersezione dei nuclei di tutti i suoi caratteri). L'immagine della trasformazione di Gelfand $\hat{A}$ è un'algebra di funzioni su X (A) isomorfa a A/R. Ricordiamo che A si dice regolare se su X (A) la $\hat{A}$–topologia e la topologia di Jacobson coincidono e che in tal caso X (A) è $\hat{A}$–regolare (2. Def. 2). Per quanto concerne la topologia di Jacobson e le algebre regolari, si rinvia a [1] e a [2] chap. 5.

TEOREMA 3. *Sia* A *un'algebra regolare tale che* $a \in A$ *implichi* $\bar{a} \in A$ *e sia* p *una seminorma di algebra su* A. *Sotto tali ipotesi, i caratteri continui di* (A, p) *sono i caratteri che si annullano su* $R(p)$.

Dimostrazione. Essendo $\ker p$ contenuto in $R(p)$, $A/R(p)$ è isomorfa a: $(A/\ker p)/(R(p)/\ker p)$. Sia $B = A/R(p)$. $R(p)$ è l'intersezione dei nuclei di tutti i caratteri continui di (A, p), quindi è un ideale chiuso di (A, p). Per doppio passaggio al quoziente si deduce una norma di algebra su B. Essendo B isomorfa a $\hat{B}$, poiché il suo radicale razionale è nullo, si può trasportare tale norma a $\hat{B}$. Sia essa q. Per il Teorema 1, punto 2), il supporto di q è X (B). Ciò significa che in $(\hat{B}, q)$ tutti i caratteri sono continui. Essendovi una corrispondenza biunivoca fra i caratteri continui di (A, p) e quelli di $(\hat{B}, q)$, il teorema è dimostrato.

COROLLARIO 1. *Mantenendo la notazione del teorema, sotto le stesse ipotesi, se* (A, p) *non possiede elementi quasi nilpotenti, allora ogni carattere è continuo.*

Dimostrazione. Evidente, poiché $R(p)$ è in tal caso l'ideale banale.

Concludiamo questa nota con una congettura:

Sull'algebra delle serie formali a coefficienti complessi non esiste alcuna norma di algebra.

Su un'algebra senza radicale, un'ostruzione all'esistenza di norme di algebra può essere presentata dalla topologia dello spazio dei caratteri. Infatti, per quanto risulta dal presente lavoro, se esiste una norma di algebra, lo spazio dei caratteri, se è completamente regolare, allora è pseudocompatto. In presenza del radicale, tale condizione perde la sua efficacia. Lo studio della congettura dovrebbe chiarire le relazioni intercorrenti fra l'esistenza di norme di algebra e la struttura del radicale.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. BECKENSTEIN, L. NARICI e C. SUFFEL (1977) – *Topological Algebras*. North Holland – « Mth. Studies », *24*.

[2] BOURBAKI – *Théories Spectrales*. Fasc. XXXII.

[3] L. GILLMAN e M. JERINSON (1960) – *Rings of Continous Functions*. D. VAN NOSTRAND, New Jersey.

[4] M. D. WEIR (1975) – *Hewitt–Nachbin Spaces*. North Holland – « Math. Studies », *17*.