Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Dario Graffi, Mauro Fabrizio

# Non unicità dell'energia libera per materiali viscoelastici

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **83** (1989), n.1, p. 209–214.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1989_8_83_1_209_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1989.

*Atti Acc. Lincei Rend. fis.*
*(8), LXXXIII (1989), pp. 209-214*

**Fisica Matematica.** — *Non unicità dell'energia libera per materiali viscoelastici* (*).
Nota di DARIO GRAFFI e MAURO FABRIZIO (**), presentata dal socio D. GRAFFI.

ABSTRACT. — *Non-uniqueness of free energy for viscoelastic materials.* By means of a contra-example, we proof non-uniqueness of free-energy for a viscoelastic material of «rate» tipe.

KEY WORD. Viscoelasticity, Free-energy, Non-uniqueness.

RIASSUNTO. La non unicità dell'energia libera per un materiale viscoelastico di tipo «rate» viene provata mediante la determinazione di un controesempio.

## 1. INTRODUZIONE.

In una nota precedente [1], pubblicata su questi *Rendiconti*, abbiamo preso in considerazione materiali-viscoelastici lineari in cui la funzione di rilassamento $\dot{G}$ è una combinazione lineare di $n \in N$ esponenziali. Pertanto per questi materiali la usuale relazione fra il tensore degli sforzi $\boldsymbol{T}$ e il tensore di deformazione infinitesima $\boldsymbol{E}$ del tipo:

$$\boldsymbol{T}(t) = \boldsymbol{G}(0)\,\boldsymbol{E}(t) - \int_0^\infty \dot{\boldsymbol{G}}(s)\,\boldsymbol{E}^t(s)\,ds \tag{1}$$

presenta come funzione di rilassamento la seguente espressione:

$$\dot{\boldsymbol{G}}(s) = -\sum_{k=1}^{n} \dot{\boldsymbol{G}}_k \exp\left[-\alpha_k s\right] \tag{2}$$

dove i tensori del quarto ordine $\dot{\boldsymbol{G}}_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) risultano tutti definiti positivi mentre i coefficienti $\alpha_k$ oltre che positivi sono tutti diversi fra loro.

In queste ipotesi abbiamo provato in [1] che lo stato del sistema all'istante $t$ non necessariamente è descritto dalla storia $\boldsymbol{E}^t$ del tensore di deformazione infinitesima $\boldsymbol{E}$, ma più semplicemente da un ente di dimensione finita dato dalla $(n+1)$-upla:

$$\sigma_{(t)} = (\boldsymbol{E}(t), \boldsymbol{E}_{\alpha_1}(t), \ldots, \boldsymbol{E}_{\alpha_n}(t)) \tag{3}$$

dove

$$\boldsymbol{E}_{\alpha_k}(t) = \int_{-\infty}^{t} \exp\left[-\alpha_k(t-\tau)\right] \boldsymbol{E}(\tau)\,d\tau\,. \tag{4}$$

In queste ipotesi abbiamo provato sempre in [1] che la funzione di stato $\psi(\sigma)$ così definita:

$$\psi(\sigma) = \frac{1}{2}\boldsymbol{G}(0)\,\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E} - \sum_{k=1}^{n} \dot{\boldsymbol{G}}_k \boldsymbol{E}_{\alpha_k}\cdot\boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n} \dot{\boldsymbol{G}}_k \alpha_k \boldsymbol{E}_{\alpha_k}\cdot\boldsymbol{E}_{\alpha_k} \tag{5}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito delle attività di ricerca del G.N.F.M. del C.N.R.
(**) Dipartimento di Matematica, Piazza Porta S. Donato 5, Bologna.

risulta una energia libera per il sistema (1), (2), in quanto questa funzione verifica le seguenti condizioni proposte da Graffi [2] per caratterizzare tale potenziale $\psi: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$: dove $\Sigma$ rappresenta lo spazio degli stati:

i)

$$T(t) = \frac{\partial \psi(\sigma)(t)}{\partial E(t)}, \tag{6}$$

ii) Se $\Sigma_{E(t)}$ è l'insieme degli stati il cui valore attuale del tensore di deformazione infinitesima è dato da $E(t)$, allora la funzione $\psi$ è minima in corrispondenza della storia costante

$$E^t(s) = E(t) \qquad \text{per tutti } s \geq 0.$$

iii) per ogni $t \geqslant 0$ si ha:

$$\dot{\psi}(t) \leq T(t) \cdot \dot{E}(t). \tag{7}$$

Nella nota [1] abbiamo dimostrato che (5) verifica iii), ma è facile provare che per essa è soddisfatta immediatamente la condizione i), mentre la ii) segue dall'osservazione che (5) può porsi anche nella forma:

$$2\psi(t) = G(\infty) E(t) \cdot E(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\dot{G}_k}{\alpha_k} (E(t) - \alpha_k E_{\alpha_k}(t))^2 \tag{8}$$

e dal fatto che per campi costanti $E_{\alpha_k} = E/\alpha_k$.

È necessario ora notare che le condizioni i), ii), iii) non determinano in modo univoco l'espressione dell'energia libera anche quando si procede ad una sua normalizzazione. È noto infatti che nel caso di un materiale viscoelastico, come osservato da Graffi in [2, 3], è possibile costruire due energie libere, che verificano i), ii), iii) e che risultano funzioni della storia $E^t$ del tensore di deformazione [4, 5].

In questo lavoro abbiamo studiato tale problema di unicità nel caso segnalato nella nota [1] in cui la funzione di rilassamento è una somma di esponenziale e quindi lo stato è determinato semplicemente dalla $(n+1)$-upla $(E(t))$, $(E_{\alpha_1}(t), ..., E_{\alpha_n}(t))$ invece che dalla storia $E^t$. In tal caso si riduce notevolmente l'insieme delle possibili energie libere, poiché ora queste funzioni risultano definite su un insieme di dimensione finita. Questa condizione tuttavia, se da un lato nel caso $n = 1$ porta all'unicità dell'energia libera, dall'altro per $n > 1$ non garantisce tale unicità. Infatti proveremo che oltre all'espressione (5) in cui la $\psi$ risulta la somma delle energie libere $\psi_k$ che si ottengono considerando funzioni di rilassamento costituite da singoli esponenziali $\dot{G}_k \exp[-\alpha_k s]$, è possibile determinare una nuova espressione di $\psi$, che verifica i), ii), iii), indipendente da (5) in quanto presenta una interferenza fra le funzioni $\psi_k$.

**2.** Iniziamo coll'osservare che essendo il sistema lineare è naturale ammettere l'energia libera come una funzione quadratica dello stato $\sigma = (E, E_{\alpha_1}, ..., E_{\alpha_n})$. Tale condizione insieme con i) porta all'affermazione che qualsiasi energia libera $\psi$ deve potersi rappresentare nella forma:

$$\psi(\sigma_t) = \frac{1}{2} G(0) E(t) \cdot E(t) - \sum_{k=1}^{n} \dot{G}_k E_{\alpha_k}(t) \cdot E(t) + \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{n} C_{hk} E_{\alpha_h}(t) \cdot E_{\alpha_k}(t) \tag{9}$$

dove $C_{hk}$ è un opportuno tensore del quarto ordine simmetrico. Inoltre da ii) risulta che nella classe $\Sigma_{E(t)}$, cioè nell'insieme delle storie il cui valore attuale è $E(t)$, deve essere minima la $\psi$ in corrispondenza della storia costante $E^t(s) = E(t)$, $\forall s \geq 0$. Pertanto posto:

$$\frac{\partial \psi}{\partial E_{\alpha_k}(t)} = -\dot{G}_k E(t) + \sum_{h=1}^{n} C_{hk} E_{\alpha_h}(t) \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{10}$$

quando $E^t$ è costante si ha:

$$E_{\alpha_k} = \frac{E(t)}{\alpha_k}. \tag{11}$$

Abbiamo così:

$$0 = \left.\frac{\partial \psi}{\partial E_{\alpha_k}}\right|_{E_{\alpha_k} = E(t)/\alpha_k} = -\dot{G}_k E(t) + \sum_{h=1}^{n} C_{hk}/\alpha_h E(t) \tag{12}$$

da cui

$$\dot{G}_k = \sum_{h=1}^{n} C_{hk}/\alpha_h . \tag{13}$$

Inoltre per la condizione di minimo la matrice:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial E_{\alpha_h} \partial E_{\alpha_k}} = C_{hk} \tag{14}$$

deve risultare definita positiva.

Studiamo ora le restrizioni che la condizione iii) impone sui coefficienti $C_{hk}$. Deriviamo l'equazione (9) dell'energia libera:

$$\dot{\psi}(t) = G(0)\, E(t) \cdot \dot{E}(t) - \sum_{k=1}^{n} \dot{G}_k E_{\alpha_k}(t) \cdot \dot{E}(t) - \sum_{k=1}^{n} \dot{G}_k \dot{E}_{\alpha_k}(t) \cdot E(t) + \\ + \sum_{h,k=1}^{n} C_{hk} E_{\alpha_h}(t) \cdot \dot{E}_{\alpha_k}(t) \tag{15}$$

da cui, poiché $\dot{E}_{\alpha_k}(t) = E(t) - \alpha_k\, E_{\alpha_k}(t)$, si ha:

$$\dot{\psi}(t) = T(t) \cdot \dot{E}(t) - \sum_{k=1}^{n} \dot{G}_k E(t) \cdot (E(t) - \alpha_k E_{\alpha_k}(t)) + \sum_{h,k=1}^{n} C_{hk} E_{\alpha_h}(t)(E(t) - \alpha_k E_{\alpha_k}(t)) \tag{16}$$

La diseguaglianza (7) comporta:

$$-\sum_{k=1}^{n} \dot{G}_k E(t) \cdot E(t) + \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{h=1}^{n} C_{hk} + \dot{G}_k \alpha_k \right) E_{\alpha_k}(t) \cdot E(t) - \sum_{h,k=1}^{n} C_{hk} \alpha_k E_{\alpha_h} \cdot E_{\alpha_k} \leq 0 \tag{17}$$

imponendo (13) si ottiene:

$$-\dot{G}(0)\, E(t) \cdot E(t) + \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{h=1}^{n} \frac{\alpha_h + \alpha_k}{\alpha_h} C_{hk} \right) E_{\alpha_k}(t) \cdot E(t) - \sum_{h,k=1}^{n} C_{hk} \alpha_k E_{\alpha_h} \cdot E_{\alpha_k}(t) \leq 0 \tag{18}$$

dove $\dot{G}(0) = \sum_{k=1}^{n} \dot{G}_k$ risulta un tensore definito positivo.

Esiste una scelta dei coefficienti $C_{hk}$ tale da verificare (13), (14) e (18) data da:

$$C_{hk} = \dot{G}_k \alpha_h \delta_{kh} . \tag{19}$$

La condizione (13) è immediatamente verificata; inoltre dall'ipotesi che i coefficienti

$\dot{G}_k$ sono definiti positivi segue che per ogni $h$, $k$ il tensore (19) è definito positivo. Infine (18) assume la forma:

$$- \dot{G}(0)\, E(t) \cdot E(t) + 2 \sum_{k=1}^{n} \dot{G}_k \alpha_k E_{\alpha_k}(t) \cdot E(t) - \sum_{k=1}^{n} \dot{G}_k \alpha_k^2 E_{\alpha_k}(t) \cdot E_{\alpha_k}(t) \leq 0 \tag{20}$$

ossia:

$$- \sum_{k=1}^{n} [\dot{G}_k (E(t) - \alpha_k E_{\alpha_k}(t))] \cdot (E(t) - \alpha_k E_{\alpha_k}(t)) \leq 0\,. \tag{21}$$

Pertanto essendo $\dot{G}_k$ positivo la disuguaglianza (18) è verificata. Infine è facile provare che la relativa espressione dell'energia libera coincide con la formula (5).

**3.** Osserviamo ora che se $n = 1$, cioè se $\dot{G}$ è realizzato mediante un solo esponenziale, la condizione (13) consente di determinare in modo unico il coefficiente $C_{11}$, in tale caso infatti abbiamo necessariamente:

$$C_{11} = \dot{G}\alpha\,.$$

Nel caso $n > 1$ verificheremo invece che la condizione (13) e gli altri vincoli non sono in grado di individuare univocamente i coefficienti $C_{hk}$ e quindi l'energia libera $\psi$. A tal fine facciamo la seguente posizione:

$$C_{hk} = \frac{\alpha_h \alpha_k}{\alpha_h + \alpha_k} \tag{22}$$

che quando la relazione (2) è costituita da solo due esponenziali $\alpha_1$, $\alpha_2$ ($\alpha_1 \neq \alpha_2$) ci fornisce la matrice

$$[C_{hk}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha_1}{2} & \dfrac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \\ \dfrac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} & \dfrac{\alpha_2}{2} \end{bmatrix} \tag{23}$$

inoltre nel caso unidimensionale $\dot{G}_1$ e $\dot{G}_2$ sono quantità scalari, che in base a (13) si scrivono:

$$\begin{cases} \dot{G}_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \\ \dot{G}_2 = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} + \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{24}$$

pertanto $\dot{G}(0) = \dot{G}_1 + \dot{G}_2 = 2$.

La relativa funzione di rilassamento assume la seguente forma:

$$\begin{aligned} \dot{G}(s) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}\right) \exp[-\alpha_1 s] + \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right) \exp[-\alpha_2 (s)] = \\ &= \frac{1}{2}(\exp[-\alpha_1 s] + \exp[-\alpha_2 s]) + \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}(\alpha_1 \exp[-\alpha_1 s] + \alpha_2 \exp[-\alpha_2 s])\,. \end{aligned} \tag{25}$$

La scelta (23) per i coefficienti $C_{hk}$ e la posizione (24) per i termini $\dot{G}_1$, $\dot{G}_2$ comporta l'automatica verifica della condizione (13). Mentre da (23) è possibile stabilire facilmente che la matrice $[C_{hk}]$ risulta definita positiva se $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Consideriamo infine l'espressione esplicita della forma quadratica (18)

$$(26)\qquad -\dot{G}(0)\,\boldsymbol{E}(t)\cdot\boldsymbol{E}(t)+2\sum_{k=1}^{2}\alpha_k\boldsymbol{E}_{\alpha_k}(t)\cdot\boldsymbol{E}(t)-\sum_{h,k=1}^{2}\frac{\alpha_h^2\alpha_k}{\alpha_h+\alpha_k}\boldsymbol{E}_{\alpha_h}(t)\cdot\boldsymbol{E}_{\alpha_k}(t)$$

che possiamo anche riscrivere in forma simmetrica nel seguente modo:

$$(27)\qquad -\dot{G}(0)\,\boldsymbol{E}(t)\cdot\boldsymbol{E}(t)+2\sum_{k=1}^{2}\alpha_k\boldsymbol{E}_{\alpha_k}(t)\cdot\boldsymbol{E}(t)-$$
$$-\sum_{h,k=1}^{2}\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_h^2\alpha_k}{\alpha_h+\alpha_k}+\frac{\alpha_h\alpha_k^2}{\alpha_h+\alpha_k}\right)\boldsymbol{E}_{\alpha_h}(t)\cdot\boldsymbol{E}_{\alpha_k}(t)=-\dot{G}(0)\,\boldsymbol{E}(t)\cdot\boldsymbol{E}(t)+$$
$$+2\sum_{k=1}^{2}\alpha_k\boldsymbol{E}_{\alpha_k}(t)\cdot\boldsymbol{E}(t)-\sum_{h,k=1}^{2}\frac{\alpha_h\alpha_k}{2}\boldsymbol{E}_{\alpha_h}(t)\cdot\boldsymbol{E}_{\alpha_k}(t)\,.$$

Tale forma risulta semidefinita negativa poiché lo è la matrice dei coefficienti

$$\begin{bmatrix} -\dot{G}(0) & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & -\dfrac{\alpha_1^2}{2} & -\dfrac{\alpha_1\alpha_2}{2} \\ \alpha_2 & -\dfrac{\alpha_1\alpha_2}{2} & -\dfrac{\alpha_2^2}{2} \end{bmatrix}$$

Pertanto essendo verificate le condizioni i), ii), iii) di Graffi [2] la scelta (22) per i coefficienti $C_{hk}$ porta all'esistenza di un'altra energia libera che assume così la forma:

$$(28)\qquad \psi=\frac{1}{2}G(0)\,\boldsymbol{E}(t)\cdot\boldsymbol{E}(t)-\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha_k}{\alpha_1+\alpha_2}\right)\boldsymbol{E}_{\alpha_k}(t)\cdot\boldsymbol{E}(t)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\frac{\alpha_h\alpha_k}{\alpha_h+\alpha_k}\boldsymbol{E}_{\alpha_h}(t)\cdot\boldsymbol{E}_{\alpha_k}(t).$$

Possiamo verificare ora che questa energia libera non coincide con quella contenuta nell'espressione (5) che in questo caso si scrive:

$$(29)\qquad \psi'=\frac{1}{2}G(0)\,\boldsymbol{E}(t)\cdot\boldsymbol{E}(t)-\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha_k}{\alpha_1+\alpha_2}\right)\boldsymbol{E}_{\alpha_k}\cdot\boldsymbol{E}(t)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_1^2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)\boldsymbol{E}_{\alpha_1}\cdot\boldsymbol{E}_{\alpha_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_2}{2}+\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)\boldsymbol{E}_{\alpha_2}\cdot\boldsymbol{E}_{\alpha_2}$$

poichè in (28) compaiono termini misti $\boldsymbol{E}_{\alpha_h}\cdot\boldsymbol{E}_{\alpha_k}$ mentre in (29) questo non avviene. Concludiamo coll'osservare che per campi $\boldsymbol{E}$ costanti le due energie libere coincidono e che in tal caso

$$(30)\qquad \psi'=\psi=\frac{1}{2}G(\infty)\,\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}\,.$$

Abbiamo infatti, ricordando (11), che l'espressione (28) dell'energia libera in queste ipotesi si riduce:

$$(31)\qquad \psi=\frac{1}{2}G(0)\,\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}-\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha_k}{\alpha_1+\alpha_2}\right)\frac{1}{\alpha_k}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^{2}\frac{1}{\alpha_h+\alpha_k}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}G(0)\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}-\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha_k}{\alpha_1+\alpha_2}\right)\frac{1}{\alpha_k}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\alpha_1}+\frac{2}{\alpha_1+\alpha_2}+\frac{1}{2\alpha_2}\right)\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}.$$

Sostituendo ora la condizione (11) in (29) si ottiene:

$$\psi'=\frac{1}{2}G(0)\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}-\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha_k}{\alpha_1+\alpha_2}\right)\frac{1}{\alpha_k}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}+ \tag{32}$$
$$+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_1^2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)\frac{1}{\alpha_1^2}+\left(\frac{\alpha_2}{2}+\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)\frac{1}{\alpha_2^2}\right]\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}=$$
$$=\frac{1}{2}G(0)\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}-\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha_k}{\alpha_1+\alpha_2}\right)\frac{1}{\alpha_k}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\alpha_1}+\frac{2}{\alpha_1+\alpha_2}+\frac{1}{2\alpha_2}\right)\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E};$$

Infine per entrambe le funzioni si può provare facilmente che:

$$\psi=\psi'=\left(\frac{1}{2}G(0)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}\right)-\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}\right)\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}. \tag{33}$$

Utilizzando ora la formula

$$G(\infty)=G(0)-\int_0^\infty\dot{G}(s)\,ds \tag{34}$$

abbiamo

$$G(\infty)=G(0)-\frac{1}{2}\int_0^\infty\Big\{\exp[-\alpha_1 s]+\exp[-\alpha_2 s]+ \tag{35}$$
$$+\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}(\alpha_1\exp[-\alpha_1 s]+\alpha_2\exp[-\alpha_2 s])\Big\}\,ds=G(0)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}\right)-\frac{2}{\alpha_1+\alpha_2}.$$

Pertanto combinando (33) con (35) si ha:

$$\psi=\frac{1}{2}G(\infty)\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}.$$

## Bibliografia


[1] Graffi D. and Fabrizio M., 1989. *Sulla nozione di stato per materiali viscoelastici di tipo «rate».* Atti Acc. Lincei Rend. fis., s. VIII, 83: 201-208.

[2] Graffi D., 1982. *Sull'espressione analitica di alcune grandezze termodinamiche nei materiali con memoria.* Rend. Sem. Univ. Padova, LXVIII: 17-29.

[3] Graffi D., 1986. *Ancora sull'espressione analitica dell'energia libera nei materiali con memoria.* Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, 120: 111-124.

[4] Volterra V., 1940. *Energia nei fenomeni elastici ereditari.* Acta Pontificia Acad. Scient., IV: 115-128.

[5] Dill E. H., 1975. *Simple materials with fading memory*, in *Continuum Physics.* Ed. C. Eringen Academic Press, vol. 11: 284-403.