Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Renata Grimaldi

Sur l’existence d’une infinité continue de structures asymptotiques sur $\mathbf{H}^2$

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **83** (1989), n.1, p. 147–151.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1989_8_83_1_147_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1989.

Atti Acc. Lincei Rend. fis.
(8), LXXXIII (1989), pp. 147-151

Geometria differenziale. — *Sur l'existence d'une infinité continue de structures asymptotiques sur* H^2 (*). Nota (**) di RENATA GRIMALDI (***), presentata dal Socio E. VESENTINI.

ABSTRACT. — *On the existence of an uncountable infinity of asymptotic structures on* H^2. It is shown the existence of an uncountableinfinity of asymptotic structures (*i.e.* equivalence's classes of quasi-isometric riemannian metrics) on the conformal class of the hyperbolic plan H^2.

KEY WORDS: Riemannian metrics; Quasi-isometries; Growth-type.

RIASSUNTO. — *Sull'esistenza di una infinità continua di strutture asintotiche su* H^2. Si mostra l'esistenza di una infinità continua di strutture asintotiche (cioè classi di equivalenza di metriche riemanniane quasi-isometriche) nella struttura conforme del piano iperbolico H^2.

INTRODUCTION.

Tous les éléments introduits dans cet article sont supposés de classe C^∞. On sait bien (voir [2, 3, 8]) que un difféomorphisme f entre deux variétés riemanniennes (V, g) et (V', g') s'appelle une *quasi-isométrie* s'il existe deux constantes positives λ et μ telles que:

$$\lambda \|v\|_g \leq \|f_* v\|_{g'} \leq \mu \|v\|_g, \qquad \forall v \in TV. \tag{1}$$

La relation de quasi-isométrie est une relation d'équivalence parmi les variétés riemanniennes et il existe des *invariants*: la complétude (voir, par exemple [2], le type de croissance (pour la definition voir le §1) et d'autres.

Dans l'article [4], j'ai consideré l'ensemble $\mathcal{M}(V)$ des métriques riemanniennes sur une variété différentiable V, j'ai appelé «*structures asymptotiques*» de V les classes d'équivalence de métriques quasi-isométriques et j'ai dénoté par $\mathcal{A}(V)$ l'ensemble de ces structures. Puisque, comme on sait bien (voir encore [2, 8]), si V est compacte, toutes les métriques riemanniennes sur V sont quasi-isométriques (*i.e.* sur une variété compacte il existe seulement une structure asymptotique), c'est intéressant d'étudier le cas où V est une variété ouverte.

L'exemple le plus simple est le plan euclidien $\mathbb{R}^2$: dans ce cas j'ai démontré (voir [4]) que l'ensemble $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$ a la puissance du continu. Plus précisément, j'ai montré l'existence d'une famille continue $\{g_\alpha\}$, $\alpha \in]1, 2[$, de métriques riemanniennes distinctes sur $\mathbb{R}^2$, complètes, conformes à la métrique euclidienne, invariantes par rotations et non quasi-isométriques entre elles: elles ont, en effet, des types de croissance différents (chaque métrique g_α a croissance polynomiale exacte de degré α en suivant la terminologie de [1]).

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R. e col contributo del M.P.I.
(**) Pervenuta all'Accademia il 17 agosto 1988.
(***) Dipartimento di Matematica e Applicazioni - Università di Palermo - Via Archirafi, 34 - 90123 Palermo.

Après, dans la Note [5], en utilisant soit les métriques $\{g_\alpha\}$ déjà considerées sur $\mathbb{R}^2$ soit la seule métrique compléte qui existe — à isométrie près — sur $\mathbb{R}$ et en construant les métriques produit, j'ai montré l'existence d'une infinité continue de métriques riemanniennes complètes $\{\hat{g}_\alpha\}$, $\alpha \in]1,2[$, sur $\mathbb{R}^n$, $n>2$, (mais *pas* conformes à la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^n$), qui ont des types de croissance différents: chaque métrique $\hat{g}_\alpha$ a croissance polynomiale exacte de degré $\alpha n/2$, si n est pair, ou bien de degré $(\alpha(n-1)/2)+1$, si n est impair. Donc ces métriques ne sont pas quasi-isométriques entre elles: il s'ensuit que l'ensemble $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ aussi a la puissance du continu.

Dans ce travail on considère le modèle disque de Poincaré du plan hyperbolique H^2, *i.e.* le disque unitaire ouvert de $\mathbb{R}^2$, doté de la métrique hyperbolique (à courbure constante negative):

$$g_0 = \frac{dx^2+dy^2}{[1-(x^2+y^2)]^2} \tag{2}$$

et on construit une infinité continue $\{\bar{g}_\alpha\}$, $\alpha \in]0,+\infty[$, de métriques riemanniennes sur H^2, complètes, conformes à la métrique hyperbolique, invariantes par rotations et telles que chaque $\bar{g}_\alpha$ a croissance polynomiale exacte de degré $2+2\alpha$. Il s'ensuit que dans la structure conforme hyperbolique du disque de Poincaré il existe une infinité continue de structures asymptotiques complètes.

Dans la Note [5] j'ai énouncé la suivante:

Conjecture. Sur une variété ouverte $\widetilde{M}$ qui est le revêtement universel d'une varieté riemannienne (M,g) connexe fermée (*i.e.* compacte sans bord) il existe une infinité continue de métriques riemanniennes ayant des types de croissance différents et toutes conformes à l'unique métrique $\tilde{g}$ sur $\widetilde{M}$ telle que le revêtement soit riemannien.

Puisque, par le théorème d'uniformisation de Poincaré, le revêtement universel riemannien d'une surface (de Riemann) fermée est isométrique à la sphère S^2, ou bien à $\mathbb{R}^2$ ou bien à H^2, il s'ensuit que la conjecture est complètement démontrée dans le cas bidimensionnel.

Je désire exprimer ma gratitude à Monsieur Edoardo Vesentini pour avoir attiré mon attention sur l'importance du cas hyperbolique; en outre je tiens à remercier également Messieurs A. Lichnerowicz, V. Poénaru et P. Pansu pour les fructueuses discussions que j'ai eues avec eux pendant mes fréquents séjours à Paris.

1. Le type de croissance d'une métrique riemannienne.

Il vaut mieux préciser que l'expression «croissance polynomiale» sera utilisée ici dans le sens de Godbillon [1], mais non dans le sens plus restrictif d'Hector [6].

Tout d'abord, nous allons rappeler (voir [1]) brièvement qu'on appelle *type de croissance* d'une fonction $f_1(t)$ réelle, positive, croissante, définie pour tout nombre réel $t \geq B$, avec $B \in \mathbb{R}$, la classe d'équivalence, que l'on dénote par $\mathrm{cr}(f_1)$, de f_1 pour la relation de *réciproque dominance* (où f_1 *domine* f_2 s'il existe des constantes réelles a, $b>0$, $c>0$ et d telles que $f_1(t) \geq bf_2(ct+d)$, pour tout $t \in [a,+\infty)$.

En suivant la terminologie de [1], on dit que une fonction croissante $f(t)$ a croissance *exponentielle* si $\mathrm{cr}(f) \geq \mathrm{cr}(e^t)$, *sous-exponentielle* si $\mathrm{cr}(f) < \mathrm{cr}(e^t)$, *polyno-*

miale de degré inférieur à α (resp. *polynomiale exacte de degré égal à* α) s'il existe un nombre réel $\alpha \geqslant 0$ tel que $\mathrm{cr}(f) \leqslant \mathrm{cr}(t^{\alpha})$ (resp. $\mathrm{cr}(f) = \mathrm{cr}(t^{\alpha})$). Il faut remarquer que, si $\alpha' > \alpha''$, alors $\mathrm{cr}(t^{\alpha'}) > \mathrm{cr}(t^{\alpha''})$; en outre deux fonctions croissantes $f_1(t)$ et $f_2(t)$ qui sont des infinis du même ordre ont la même croissance.

Soit, maintenant, (M, g) une variété riemannienne connexe et complète. Si y_0 est un point de M et r est un nombre réel non negatif, nous indiquons par $B(y_0, r)$ la boule géodésique fermée de centre y_0 et de rayon r dans M, *i.e.* $B(y_0, r) = \{y \in M | d(y, y_0) \leqslant r\}$, où d est la distance, sur M, induite par la métrique g. La fonction $F_{y_0}(r)$ qui associe à chaque r le volume riemannien de cette boule s'appelle la *fonction croissance* de M en y_0. Cette fonction dépend du point y_0, mais son type de croissance est indépendant du choix du point y_0 dans M (voir [8]).

On appelle alors *type de croissance de la variété riemannienne* (M, g) — ou bien de la métrique riemannienne g — celui de ses fonctions croissances.

Si M est une variété compacte, quelle que soit la métrique riemannienne g sur M, on a $\mathrm{vol}_{(g)} M < +\infty$, et donc on peut dire que toute variété riemannienne compacte a croissance polynomiale exacte de degré zéro.

En général, le type de croissance d'une variété riemannienne dépend du choix de la métrique; par exemple, sur $\mathbb{R}^2$ la métrique euclidienne g_e a croissance polynomiale exacte de degré 2 (on a $\mathrm{vol}_{(g_e)} B(0, r) = \pi r^2$) et la métrique hyperbolique g_0 a croissance exponentielle: dans le modèle disque de Poincaré on a $\mathrm{vol}_{(g_0)} B(0, \rho) = \pi \sinh^2 \rho$ (voir encore [1]).

Mais, si deux variétés riemanniennes (M, g) et (M', g') sont quasi-isométriques, alors elles ont le même type de croissance (voir aussi [8]).

2. CONSTRUCTION D'UNE FAMILLE CONTINUE $\{\overline{g}_\alpha\}, \alpha \in]0, +\infty[$, DE MÉTRIQUES RIEMANNIENNES NON QUASI-ISOMÉTRIQUES ENTRE ELLES, DANS LA STRUCTURE CONFORME HYPERBOLIQUE DE H^2.

Nous considerons, maintenant, le modèle disque de Poincaré du plan hyperbolique H^2, *i.e.* le disque unitaire ouvert D de $\mathbb{R}^2$, doté de la métrique hyperbolique (2), et nous démontrons le suivant:

THÉORÈME. *Sur le disque D, dans la structure conforme hyperbolique, il existe une infinité continue de structures asymptotiques complètes.*

DÉMONSTRATION. Nous allons construire une infinité continue $\{\overline{g}_\alpha\}, \alpha \in]0, +\infty[$, de métriques riemanniennes sur le disque D, conformes à la métrique hyperbolique et invariantes par rotations, et nous allons montrer qu'elles sont complètes et telles que, si $\alpha' \neq \alpha''$, $\overline{g}_{\alpha'}$ n'est pas quasi-isométrique à $\overline{g}_{\alpha''}$.

Alors, fixé ε tel que $0 < \varepsilon < 1$, pour chaque $\alpha > 0$, soit $\varphi_\alpha(t)$ la fonction réelle de classe C^∞ donnée par

$$\varphi_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha} E_\alpha(t) \frac{1}{1 - t^2} = E'_\alpha(t), \qquad \varepsilon \leqslant t < 1,$$

où $E_\alpha(t) = \exp[(1/\alpha) \operatorname{sectgh} t]$ et $\operatorname{sectgh} t$ est la fonction inverse de la fonction tangente hyperbolique.

Sur le disque D alors nous considerons, pour chaque $\alpha > 0$, la métrique:

$$\bar{g}_\alpha = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha^2} \exp\left[(2/\alpha)\,\mathrm{sectgh}\,(\sqrt{x^2+y^2})\right] \dfrac{dx^2+dy^2}{[1-(x^2+y^2)]^2}, & \varepsilon \leqslant \sqrt{x^2+y^2} < 1\,, \\ \psi_\alpha^2(\sqrt{x^2+y^2}) \dfrac{dx^2+dy^2}{[1-(x^2+y2)]^2}, & 0 \leqslant \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon\,, \end{cases} \tag{3}$$

où $\psi_\alpha(t)$ est une fonction strictement positive, qui prolonge d'une façon C^∞ à l'intervalle $[0, \varepsilon[$ la restriction à $[\varepsilon, 1[$ de la fonction $(1/\alpha)\, E_\alpha(t)$, définie pour $t > 0$; en outre doit être assez petite pour satisfaire la condition $a_\alpha - b_\alpha > 1$, où

$$a_\alpha \stackrel{\mathrm{def}}{=} E_\alpha(\varepsilon), \qquad b_\alpha \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_0^\varepsilon \psi_\alpha(t)\, dt\,.$$

On voit bien que toutes les métriques $\bar{g}_\alpha$ sont conformes à la métrique hyperbolique g_0 et invariantes par rotations.

Comme on sait bien, les diamètres du disque D sont des géodésiques pour la métrique hyperbolique et donc (voir [4]) également pour toute métrique $\bar{g}_\alpha$. Il s'ensuit que tout disque euclidien fermé $D(r)$ de centre l'origine et de rayon $r < 1$ est, pour toute $\bar{g}_\alpha$, une boule géodésique fermée $B(\rho)$ de rayon ρ (où ρ est la longueur du rayon r, calculée dans la métrique $\bar{g}_\alpha$).

On considère alors le disque euclidien $D(r)$ avec $\varepsilon < r < 1$ et on va calculer la longueur ρ dans la métrique $\bar{g}_\alpha$ du rayon de ce disque. On a:

$$\rho(r) = \int_0^\varepsilon \psi_\alpha(t)\, dt + \int_\varepsilon^r \varphi_\alpha(t)\, dt = E_\alpha(r) - (a_\alpha - b_\alpha)\,.$$

En posant $K_\alpha \stackrel{\mathrm{def}}{=} a_\alpha - b_\alpha$, on a:

$$\rho(r) = \exp\left[(1/\alpha)\,\mathrm{sectgh}\, r\right] - K_\alpha\,, \qquad \text{avec } K_\alpha > 1. \tag{4}$$

Puisque, quand $r \to 1$, $\rho(r) \to +\infty$, toutes les métriques $\bar{g}_\alpha$ sont *complètes*.

Par des calculs faciles, on a:

$$r = \mathrm{tgh}\,(\log\,(\rho + K_\alpha)^\alpha)\,, \qquad \text{avec } \rho + K_\alpha > 1. \tag{5}$$

Nous indiquons, maintenant, par $C(\rho)$ la longueur du bord de la boule $B(\rho)$. En rappelant que $r > \varepsilon$, on trouve:

$$C(\rho) = \int_0^{2\pi} r\,\varphi_\alpha(r)\, d\theta = \frac{2\pi}{\alpha}\,\frac{r}{1-r^2} \exp\left[(1/\alpha)\,\mathrm{sectgh}\, r\right].$$

En remplaçant r par la fonction donnée par la formule (5) on trouve:

$$C(\rho) = \frac{\pi}{2\alpha}\left[(\rho + K_\alpha)^{2\alpha+1} - (\rho + K_\alpha)^{-2\alpha+1}\right].$$

Alors l'aire $A_\alpha(\rho)$ de la boule $B(\rho)$ dans la métrique $\bar{g}_\alpha$ sera (voir, par exemple [7]):

$$A_\alpha(\rho) = \int_0^\rho C(\rho)\, d\rho\,.$$

On obtient:

$$A_\alpha(\rho)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2\alpha(2+2\alpha)}(\rho+K_\alpha)^{2+2\alpha}-\dfrac{\pi}{2\alpha(2-2\alpha)}(\rho+K_\alpha)^{2-2\alpha}+K'_\alpha, & \text{pour } \alpha\neq 1,\\[2ex] \dfrac{\pi}{2\alpha(2+2\alpha)}(\rho+K_\alpha)^{2+2\alpha}-\dfrac{\pi}{2\alpha}\log(\rho+K_\alpha)+K''_\alpha, & \text{pour } \alpha=1,\end{cases}$$

avec K'_α et K''_α constantes qui résultent de l'intégration.

En tout cas, soit pour $\alpha \neq 1$ que pour $\alpha = 1$, la fonction $A_\alpha(\rho)$ est un infini du même ordre de la fonction $f(\rho) = (\rho + K_\alpha)^{2+2\alpha}$ et donc, pour chaque $\alpha > 0$, la métrique $\bar{g}_\alpha$ a croissance polynomiale exacte de degré $2 + 2\alpha > 2$.

Puisque, si $\alpha' \neq \alpha''$, la croissance de $\rho^{2+2\alpha'}$ est différente que celle de $\rho^{2+2\alpha'}$, les métriques $\bar{g}_\alpha$ ne sont pas quasi-isométriques entre elles et le théorème est démontré.

Observer que toutes les métriques $\bar{g}_\alpha$ sur le disque D ont croissance supérieure à la croissance de la métrique euclidienne g_e et que, au contraire, toutes les métriques g_α sur $\mathbb{R}^2$, construites en [4], ont croissance inférieure à celle euclidienne.

On peut poser alors les questions suivantes:

QUESTION I. Sur $\mathbb{R}^2$, dans la structure conforme euclidienne, existe-t-il une métrique complète qui a croissance supérieure à la croissance euclidienne?

QUESTION II. Sur le disque unitaire ouvert D de $\mathbb{R}^2$, dans la structure conforme hyperbolique, existe-t-il une métrique complète qui a croissance inférieure ou égale à celle euclidienne?

CONJECTURE. Sur le disque D, dans la structure conforme hyperbolique, il n'existe aucune métrique g, complète, *invariante par rotations*, telle que $\mathrm{cr}(g) \leq \mathrm{cr}(g_e)$.

REFERENCES

[1] C. GOBILLON, 1986. *Feuilletages. Etudes géométriques.* Vol. II, Publications de l'I.R.M.A. de Strasbourg.

[2] R. GRIMALDI, 1983. *Sulla geometria asintotica delle foglie di una foliazione.* Rend. Circ. Mat. Palermo, s. II, 32: 199-207.

[3] R. GRIMALDI, 1986. *Non esistenza di cusps nella geometria asintotica delle foglie.* Atti Accad. Lincei, Rend. Cl. Sc. Fis. Mat. Natur., s. VIII, LXXX, fasc. 5: 292-297.

[4] R. GRIMALDI, 1988. *Sur l'existence d'une infinité continue de structures asymptotiques sur* $\mathbb{R}^2$. Jour. de Math. pures et appliquées, 67: 405-410.

[5] R. GRIMALDI. *Sur l'existence d'une infinité continue de structures asymptotiques sur* $\mathbb{R}^n$. Atti Accad. Lincei, Rend. Cl. Sc. Fis. Mat. Natur. (sous presse).

[6] G. HECTOR, 1978. *Croissance des feuilletages presque sans holonomie.* Lecture Notes in Math., 652: 141-182, Springer-Verlag.

[7] B. O'NEILL, 1966. *Elementary differential geometry.* Academic Press.

[8] A. PHILLIPS - D. SULLIVAN, 1981. *Geometry of leaves.* Topology, 20: 209-218.