Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Ennio De Giorgi, Giuseppe Congedo, Italo Tamanini

Problemi di regolarità per un nuovo tipo di funzionale del calcolo delle variazioni

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **82** (1988), n.4, p. 673–678.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1988_8_82_4_673_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1988.

Atti Acc. Lincei Rend. fis.
(8), LXXXII (1988), pp. 673-678

Calcolo delle variazioni. — *Problemi di regolarità per un nuovo tipo di funzionale del calcolo delle variazioni.* Nota di Ennio De Giorgi (*), Giuseppe Congedo (**) e Italo Tamanini (***), presentata (****) dal Socio E. De Giorgi.

Abstract. — *Regularity problems for a new functional of the calculus of variations.* Questions concerning the regularity of minimizers of functionals consisting of the sum of volume and area terms are considered. The expected results are formulated in a few cases of special interest, connected to problems of image segmentation in computer vision and to the theory of liquid crystals.

Key words: Regularity; SBV functions; Image segmentation; Liquid crystals.

Riassunto. — Si considerano questioni riguardanti la regolarità delle soluzioni di problemi di minimo di funzionali che coinvolgono sia termini di volume che di superficie. Si danno indicazioni sui risultati attesi in alcuni casi di notevole interesse, collegati a problemi di segmentazione di immagini e alla teoria dei cristalli liquidi.

Introduzione

In due lavori (vedi [Am], [DeGA]) sono stati studiati funzionali del tipo:

$$F(u,A) = \int_A f(x,u,\nabla u)dx + \int_{S_u \cap A} \Phi(x, tr^+(x,u,\nu), tr^-(x,u,\nu),\nu)dH_{n-1} \tag{1}$$

ed in particolare sono state date alcune indicazioni sui problemi di esistenza di minimi e su proprietà di semicontinuità del funzionale (1). In questa nota intendiamo dare qualche prima indicazione sui problemi di regolarità delle funzioni minimizzanti. Osserviamo che i problemi di regolarità sembrano presentare, nel caso generale, notevoli difficoltà, e quindi in questa nota verranno considerati alcuni casi molto speciali, ma qualitativamente significativi, di funzionali del tipo (1), e formulate alcune congetture sulla regolarità dei «minimi locali» di tali funzionali. Nel formulare le congetture di regolarità siamo stati alquanto generosi, indicando in sostanza le massime regolarità compatibili con i controesempi a noi noti.

Pensiamo che progressi interessanti nello studio dei funzionali del tipo (1) potranno venire sia dalla scoperta di nuovi controesempi, sia da verifiche, sia pure parziali, delle congetture esposte.

Definizioni e richiami

Seguendo [DeGA] considereremo il funzionale (1) sotto le seguenti ipotesi: Ω è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$, H_{n-1} è la misura di Hausdorff $(n-1)$-dimensionale,

(*) Scuola Normale Superiore - Piazza dei Cavalieri 7 - 56100 Pisa.
(**) Dipartimento di Matematica, Università di Lecce - 73100 Lecce.
(***) Dipartimento di Matematica, Università di Trento - 38050 Povo (TN).
(****) Nella seduta del 22 giugno 1988.

$u: \Omega \to \mathbb{R}^k$ è una funzione misurabile,

$$f: \Omega \times \mathbb{R}^k \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \to]-\infty, +\infty] \quad \text{e} \quad \Phi: \Omega \times \widetilde{\mathbb{R}}^k \times \widetilde{\mathbb{R}}^k \times S^{n-1} \to]-\infty, +\infty]$$

sono funzioni Boreliane per le quali esistono g, $\Psi: \Omega \to \mathbb{R}$ tali che per ogni scelta di $x \in \Omega$, a, $b \in \widetilde{\mathbb{R}}^k$, $p \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, $\nu \in S^{n-1}$, $A \subset\subset \Omega$ risulti (¹)

$$f(x, u, p) \geq g(x), \qquad \int_A |g(x)|dx < +\infty$$

$$\Phi(x, a, b, \nu) \geq \Psi(x), \qquad \int_A |\Psi(x)| dH_{n-1} < +\infty \quad \text{e} \quad \Phi(x, a, b, \nu) = \Phi(x, b, a, -\nu).$$

Indicheremo inoltre con $M_\delta(A, \mathbb{R}^k)$ lo spazio metrico delle funzioni misurabili $u: A \to \mathbb{R}^k$ dotato della distanza $\delta_A(u, v) = \text{mis}\{x \in A: u(x) \neq v(x)\}$.

Sempre seguendo [DeGA] ricordiamo le definizioni relative ai simboli usati nella formula (1).

Definizione 1. Se $x \in \Omega$, $z \in \widetilde{\mathbb{R}}^k$, diremo che z è il *limite approssimato* della funzione u in x e scriveremo $z = \operatorname{aplim}_{y \to x} u(y)$ se e solo se

$$g(z) = \lim_{\rho \to 0} \fint_{B_\rho} g(u(x+\xi))d\xi \qquad \forall g \in C^0(\widetilde{\mathbb{R}}^k),$$

dove $C^0(\widetilde{\mathbb{R}}^k)$ è lo spazio delle funzioni reali continue (su $\widetilde{\mathbb{R}}^k$). Poniamo anche

$$S_u = \{x \in \Omega: u \text{ non ha limite approssimato in } x\}$$

Definizione 2. Se $x \in \Omega$, $z \in \widetilde{\mathbb{R}}^k$, $\nu \in S^{n-1}$, diremo che z è la *la traccia esterna* della funzione u nel punto x lungo la direzione ν, e scriveremo $z = tr^+(x, u, \nu)$, se e solo se

$$g(z) = \lim_{\rho \to 0} \fint_{B_\rho \cap \{\xi: \langle \nu, \xi \rangle > 0\}} g(u(x+\xi))d\xi \qquad \forall g \in C^0(\widetilde{\mathbb{R}}^k),$$

Definiamo anche la *traccia interna* $tr^-(x, u, \nu)$ nel seguente modo:

$$tr^-(x, u, \nu) = tr^+(x, u, -\nu).$$

Definizione 3. Diremo che $x \in S_u^*$ se e solo se $x \in S_u$ ed esistono $\nu \in S^{n-1}$

(¹) Con $\widetilde{\mathbb{R}}^k = \mathbb{R}^k \cup \{\infty\}$ indichiamo la compattificazione di Alexandroff dello spazio euclideo $\mathbb{R}^k$, con B_ρ^n (o più brevemente, quando non ci siano equivoci, con B_ρ) indichiamo l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n: |x| < \rho\}$ e poniamo $\omega_n = \text{mis}\, B_1^n$ (misura di Lebesgue), $S^{n-1} = \partial B_1^n$. Indichiamo inoltre con $\langle , \rangle$ il prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$ e con $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ lo spazio delle applicazioni lineari di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^k$ munito della norma Hilbertiana

$$|w| = \left(\sum_{i=1}^n |w(e_i)|^2\right)^{1/2}$$

dove $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$. Scrivendo $A \subset\subset \Omega$ intendiamo che A è un aperto con chiusura compatta in Ω.

e $z^+, z^- \in \mathbb{R}^k$ con

$$z^+ = tr^+(x, u, \nu), \qquad z^- = tr^-(x, u, \nu) \quad \text{e} \quad \lim_{\rho \to 0} \rho^{1-n} H_{n-1}(S_u \cap B_\rho(x)) = \omega_{n-1}.$$

DEFINIZIONE 4. Sia $x \in \Omega$ e $w \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$; diremo che u è *differenziabile in media* in x, che w è il *differenziale approssimato* di u in x, e scriveremo $w = \nabla u(x)$, se:

$$x \in \Omega \setminus S_u, \qquad z = \operatorname*{aplim}_{y \to x} u(y) \in \mathbb{R}^k \quad \text{e} \quad \operatorname*{aplim}_{y \to x} \frac{|u(y) - z - w(y-x)|}{|y-x|} = 0.$$

Passiamo ore a definire gli spazi BV e SBV, rimandando a [DeGA] per alcune notevoli generalizzazioni.

DEFINIZIONE 5. Diremo che $u\colon \Omega \to \mathbb{R}^k$ appartiene alla classe $BV_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ se e solo se per ogni $A \subset\subset \Omega$:

$$u \in L^1(A, \mathbb{R}^k) \quad \text{e} \quad \int_A |Du| < +\infty$$

dove per definizione (vedi [G], [MM]):

$$\int_A |Du| = \inf\left\{\liminf_{h \to \infty} \int_A |\nabla u_h|\,dx\colon u_h \in C^1(A, \mathbb{R}^k), \int_A |u_h - u|\,dx \to 0\right\}.$$

PROPOSIZIONE 1 (vedi [DeGA]). Se $u \in BV_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^k)$, allora esiste quasi ovunque in Ω il differenziale approssimato ∇u ed esiste H_{n-1} quasi ovunque su S_u un vettore ν tale che:

a) $tr^+(x, u, \nu) \in \mathbb{R}^k$, $tr^-(x, u, \nu) \in \mathbb{R}^k$;

b) $\displaystyle\int_A |Du| \geq \int_A |\nabla u|\,dx + \int_{S_u \cap A} |tr^+(x, u, \nu) - tr^-(x, u, \nu)|\,dH_{n-1} \;\forall A \subset\subset \Omega.$

DEFINIZIONE 6. Diremo che $u\colon \Omega \to \mathbb{R}^k$ appartiene a $SBV_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ se e solo se:

a) $u \in BV_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^k)$;

b) $\displaystyle\int_A |Du| = \int_A |\nabla u|\,dx + \int_{S_u \cap A} |tr^+(x, u, \nu) - tr^-(x, u, \nu)|\,dH_{n-1} \;\forall A \subset\subset \Omega.$

DEFINIZIONE 7. Diremo che $w \in SBV_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ è *minimo locale* del funzionale (1) se e solo se $\forall A \subset\subset \Omega$ e $\forall u \in SBV_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ verificante la condizione $\operatorname{supp}(u - w) \subset A$ risulta:

$$F(w, A) < +\infty \quad \text{e} \quad F(w, A) \leq F(u, A).$$

Diamo infine due definizioni, riguardanti funzioni e superfici lipschitziane, che ci saranno utili nelle formulazioni delle congetture di regolarità.

DEFINIZIONE 8. Diremo che la funzione $u\colon \Omega \to \mathbb{R}^k$ appartiene a $Ll(\Omega, \mathbb{R}^k)$ (classe delle funzioni localmente lipschitziane su Ω) se e solo se: $\forall K \subset \Omega$, K

compatto, esiste $\lambda(K)$ reale positivo tale che

$$|u(x') - u(x'')| \leq \lambda(K)|x' - x''| \qquad \forall x', x'' \in K.$$

Definizione 9. Diremo che l'insieme $S \subset \Omega$ appartiene a $\boldsymbol{Lls}(\Omega)$ (classe delle ipersuperfici localmente rappresentabili con grafici lipschitziani) se e solo se $\forall x \in S$, esistono A, φ, ν verificanti le seguenti ipotesi:

$$A \text{ aperto}, \quad x \in A, \quad \nu \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi \in \boldsymbol{Ll}(A, \mathbb{R})$$

$$S \cap A = \{\xi \in A : \varphi(\xi) = 0\}, \qquad \langle \nu, \nabla\varphi(\xi)\rangle \geq 1 \text{ per quasi ogni } \xi \in A.$$

Formuliamo ora alcune congetture relative alla regolarità delle funzioni minimizzanti di alcune larghe categorie di funzionali del tipo (1).

Congetture di regolarità

Sia

$$F_1(u, A) = \int_A |\nabla u|^2 \, dx + \int_{S_u \cap A} (\varepsilon + \varphi(\nu)) dH_{n-1} \tag{2}$$

dove $\varepsilon > 0$ e $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ verifica $\varphi(\nu) > 0$ $\forall \nu \neq 0$, φ è convessa e $\varphi(\lambda\nu) = |\lambda|\varphi(\nu)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \nu \in \mathbb{R}^n$.

Allora

I) se, $\forall h \in \mathbb{N}$, w_h è minimo locale di F_1 e $w_h \to w_\infty$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^k)$, allora w_∞ è minimo locale di F_1.

Se ora w è un minimo locale di F_1, allora:

II) $\forall x \in \Omega$ esiste $E(x)$, sottoinsieme finito di $\mathbb{R}^k$, tale che $\lim_{y \to x} \text{dist}[\tilde{w}(y), E(x)] = 0$, dove $\tilde{w}(y) = \operatorname{aplim}_{z \to y} w(z)$.

III) $\forall K \subset \Omega$, K compatto, risulta $H_{n-2}[(\bar{S}_w \setminus S_w) \cap K] < +\infty$.

IV) S^*_w è una ipersuperficie di classe C^1.

V) Esiste C_1 chiuso $\subset \Omega$ tale che $H_{n-2}(C_1) = 0$ e $S_w \setminus (S^*_w \cup C_1)$ è una varietà $(n-2)$-dimensionale di classe C^1.

VI) Esiste C_2 chiuso $\subset \Omega$ tale che $H_{n-2}(C_2) = 0$ e $\bar{S}_w \setminus (S_w \cup C_2)$ è una varietà $(n-2)$-dimensionale di classe C^1.

Osservazione 1. Dalla III) segue la conclusione più debole $H_{n-1}(\bar{S}_w \setminus S_w) = 0$.

Osservazione 2. Se si considera il funzionale (2) con $\varepsilon = 0$, ovvero si pone

$$F_2(u, A) = \int_A |\nabla u|^2 \, dx + \int_{S_u \cap A} \varphi(\nu) dH_{n-1} \tag{3}$$

allora le prime tre congetture rimangono invariate, mentre la IV) è sostituita dalla seguente:

IV*) esiste $S \in \boldsymbol{Lls}(\Omega)$ tale che $S^*_w \subset S \subset S_w$.

Sembra difficile trovare generalizzazioni plausibili delle congetture V) e VI).

Osservazione 3. Livelli di generalità intermedia fra i funzionali del tipo (1) e quelli del tipo (2) o (3) si ottengono aggiungendo a questi ultimi perturbazioni del tipo

$$\int_A |u-g|^p\,dx, \qquad p \geq 1,$$

interessanti per i problemi di segmentazione delle immagini (si veda ad esempio [MoS], [MuS]), oppure del tipo

$$\int_A J(|u|-1)dx$$

(dove J è la funzione indicatrice di 0, ovvero $J(x)=0$ se $x=0$, $J(x)=+\infty$ altrimenti), interessanti per alcuni problemi relativi ai cristalli liquidi (si veda [BCL, 1, 2], [C1, 2], [E], [Vi]).

Un altro tipo di perturbazione consiste nell'aggiunta del termine $\int J(\nabla u)dx$, che sostanzialmente obbliga la funzione u ad assumere un numero finito o una infinità numerabile di valori. Questo di fatto dà luogo a problemi molto simili a quelli studiati nella teoria delle superfici minime (si veda [A], [DeGCP], [F], [G], [MM], [T], [Tal, 2]).

Rinviando, per un confronto sistematico, ai lavori [CT1, 2], segnaliamo in particolare che in questo caso nella congettura I) alla metrica L^1_{loc} va sostituita quella dello spazio $M_\delta(A, \mathbb{R}^k)$; la II) può essere riformulata nel seguente modo:

$\forall x \in \Omega$ esiste $\rho > 0$ tale che w assume un numero finito di valori in $B_\rho(x)$;

infine, le congetture III) e VI) possono essere sostituite dalla condizione più drastica: $\bar{S}_w \setminus S_w = \emptyset$.

Bibliografia

[A] F. J. Almgren (1976) – *Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints*, «Mem. A.M.S. 4.», No. 165.

[Am] L. Ambrosio: lavoro in preparazione.

[AMT1] L. Ambrosio, S. Mortola e V. M. Tortorelli (1988) – *Funzioni a variazione limitata generalizzate*, Di prossima pubblicazione.

[AMT2] L. Ambrosio, S. Mortola and V. M. Tortorelli (1988) – *Functionals with linear growth defined on vector valued BV functions*, Preprint Scuola Normale Superiore, Pisa.

[BCL1] H. Brezis, J. M. Coron and E. H. Lieb (1986) – *Estimations d'energie pour des applications de R^3 a valuers dans S^2*, C.R. Acad. Sc. Paris 303, 207-210.

[BCL2] H. Brezis, J. M. Coron and E. H. Lieb (1986) – *Harmonic maps with defects*, Commun. Math. Phys., *107*, 649-705.

[CLPP] M. Carriero, A. Leaci, D. Pallara and E. Pascali (1988) – *Euler conditions for a minimum problem with free discontinuity surfaces,*, preprint.

[C1] S. Chandrasekhar (1966) – *Liquid crystal*, Brown, Dienes and Labes Editors, Gordon and Breach, New York, 331-340.

[C2] S. Chandrasekhar (1977) – *Liquid crystals*, Cambridge University Press, Cambridge.

[CT1] G. Congedo e I. Tamanini (1988) – *Note sulla regolarità dei minimi di funzionali del tipo dell'area*, Rend. Accad. Naz. XL, 12 (17), 239-257.

[CT2] G. Congedo e I. Tamanini (1988) – lavoro in preparazione.

[DeG1] E. De Giorgi (1954) – *Su una teoria generale della misura* $(r-1)$*-dimensionale in uno spazio ad r dimensioni*, Ann. Mat. Appl. *36*, 191-213.

[DeG2] E. De Giorgi (1955) – *Nuovi teoremi relativi alle misure* $(r-1)$*-dimensionali in uno spazio ad r dimensioni*, Ricerche Mat. *4*, 95-113.

[DeGA] E. De Giorgi e L. Ambrosio (1988) – *Un nuovo tipo di funzionale del calcolo delle variazioni*, Atti Acc. Lincei Rend. fis. *82*, 199-210.

[DeGCP] E. De Giorgi, F. Colombini e L. C. Piccinini (1972) – *Frontiere orientate di misura minima e questioni collegate*, Editrice Tecnico Scientifica, Pisa.

[E] J. L. Ericksen (1976) – *Advances in liquid crystals*, Vol. 2, Glenn and Brown Editors, Academic press, New York, 233-298.

[F] H. Federer (1969) – *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, Berlin.

[G] E. Giusti (1984) – *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, Birkäuser, Boston.

[MM] U. Massari and M. Miranda (1984) – *Minimal surfaces of codimension 1*, North-Holland, Amsterdam.

[Mo] C. B. Morrey (1966) – *Multiple integrals in the calculus of variations.*, Spinger-Verlag, Berlin.

[MoS] J. M. Morel and S. Solimini (1988) – *Segmentation of images by variational methods (on a model of Mumford and Shah)*, preprint.

[MuS] D. Mumford and J. Shah (1985) – *Boundary detection by minimizing functionals I*, preprint.

[T] I. Tamanini (1984) – *Regularity results for almost minimal oriented hypersurfaces in* $\mathbf{R}^n$, Quaderni Dipartimento Matematico Univ. Lecce N. 1.

[Ta1] J. E. Taylor (1976) – *The structure of singularities in soap-bubble-like and soap-film-like minimal surfaces*, Annals of Math. *103*, 489-539.

[Ta2] J. E. Taylor (1978) – *Cristalline variational problems*, Bull. A.M.S., *84*, 568-588.

[Vi] E. Virga (1987) – *Forme di equilibrio di piccole gocce di cristallo liquido*, Preprint n. 562 dell'Istituto di Analisi Matematica, Pavia.

[Vo] A. I. Volpert (1967) – *The spaces BV and quasi-linear equations*, Math. USSR Sb. *2*, 225-267.