Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giorgio Ferrarese

Formulazione intrinseca del problema di Cauchy in relatività generale

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **82** (1988), n.3, p. 497–506.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1988_8_82_3_497_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1988.

Atti Acc. Lincei Rend. fis.
(8), LXXXII (1988), pp. 497-506

Teorie relativistiche. — *Formulazione intrinseca del problema di Cauchy in relatività generale* (*). Nota di GIORGIO FERRARESE, presentata (**) dal Socio D. GRAFFI.

ABSTRACT. – *Intrinsic formulation of the Cauchy problem in general relativity.* – An intrinsic formulation is given for the Cauchy Problem in general relativity, in the case of a global non polar continuum, in terms of properly spatial variables: *metric, spin* and *deformation rate tensor, purely mass density, heat flux* and *temperature*; initial conditions in involution form is also pointed, with *relativistic restrictions* for the constitutive equations.

KEY WORDS: General relativity; Cauchy problem.

RIASSUNTO. – Viene stabilita una *formulazione intrinseca del problema di Cauchy* in *Relatività generale*, per uno spazio-tempo riemanniano descritto da un mezzo continuo globale e non-polare. In termini di *variabili proprie: metrica, velocità angolare e di deformazione, densità di pura materia, flusso termico e temperatura.* Vengono altresì precisate le condizioni iniziali per i dati di Cauchy su una assegnata superficie spaziale σ_3; condizioni in involuzione nel senso d'E. Cartan, le quali mettono in evidenza, per le equazioni costitutive, le restrizioni tipiche dovute al mescolamento relativistico ([22], 79).

INTRODUZIONE

Del problema di Cauchy in Relatività generale esistono, nella vasta letteratura, numerosi approcci, sia in termini di coordinate generali, sia in termini di coordinate armoniche; per Universi vuoti di materia, ovvero in presenza di sorgenti energetiche, con soluzioni locali, ovvero semi-globali, asintoticamente minkowskiane, e globali ([1]-[14]).

Qui viene considerato un nuovo approccio, e cioè una *formalizzazione generale del problema di tipo intrinseco, nell'ambito di un arbitrario continuo non polare*, assumendo, come *equazioni del calore* quelle proposte in un recente lavoro [22], sulla base della più naturale estensione della situazione classica.

Naturalmente *lo schema*, qui semplicemente proposto nella sua generalità, ma non ancora approfondito dal punto di vista analitico (V. il caso lineare o isotropo), *presuppone note le equazioni costitutive proprie del continuo*, e cioè la legge esplicita

(*) Ricerca finanziata dal M.P.I.
(**) Nella seduta del 23 aprile 1988.

dello *stress meccanico* e dell'*energia interna*; leggi la cui conoscenza permette, nel caso di un continuo «ordinario», cioè *senza flusso termico*, di «superare» l'intervento delle equazioni del calore.

Si tratta in definitiva di una *formulazione tridimensionale del problema di evoluzione*, sia del continuo presente nell'Universo, sia dello spazio-tempo associato, attraverso le equazioni gravitazionali; formulazione la quale è *invariantiva per trasformazioni di coordinate interne al continuo*, cioè del tipo:

$$t' = t'(t,y^1,y^2,y^3)\; y^{i'} = y^{i'}(y^1,y^2,y^3)\; (i = 1,2,3), \tag{1}$$

ed è *tradotta in termini geometrico-cinematici*, tutti di evidente significato; fanno invero da variabili, tutte propriamente spaziali: la *metrica*, la *velocità angolare e di deformazione, la densità di pura materia*, e la temperatura «vettoriale», cioè il *flusso termico e la temperatura scalare*. Di qui la denominazione intrinseca.

È chiaro che tale formulazione dà luogo ad una naturale traduzione fisica del problema di evoluzione, nell'ambito di un arbitrario riferimento fluido, cioè in termini relativi; traduzione che, pur essendo un passo «formale», non è meno interessante dal punto di vista fisico, proprio per *l'intervento dei termini di velocità del continuo*, che qui non figurano, trattandosi di formulazione propria.

1. Ingredienti geometrici ed equazioni fondamentali

Consideriamo dapprima gli *aspetti puramente geometrici* connessi al problema di evoluzione. Nello spazio-tempo riemanniano V_4, orientato nel tempo, consideriamo pertanto un *continuo cinematico* che, per semplicità, supporremo indefinitamente esteso; esso è rappresentato da una ben determinata *congruenza temporale orientata* Γ, cioè da un campo di vettori unitari γ: $\gamma \cdot \gamma = -1$, *globale e regolare*.

Per semplicità assumeremo *coordinate adattate a* Γ (1), diciamo $y^\alpha (\alpha = 0,1,2,3;$ $y^0 = ct)$, indicando con $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ la *base naturale* associata, e con $g_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta$ la relativa *metrica*.

In ogni evento $E \in V_4$, la congruenza Γ induce una *struttura quasi prodotto* 1×3, definita localmente dalla *direzione temporale* γ, e dal sottospazio 3-dimensionale Σ ortogonale a γ: *piattaforma spaziale*. Di qui una sistematica decomposizione dei campi tensoriali definiti in V_4: la cosiddetta *decomposizione naturale secondo* γ (cfr. [17] e [18]), la quale è sostanzialmente caratterizzata dai polinomi di vario ordine in γ^α (ovvero γ_α). Tale decomposizione dà luogo, in particolare, attraverso i campi fondamentali $\mathbf{e}_\alpha$, ad una ben determinata base di Σ, diciamo $\{\tilde{\mathbf{e}}_i\}$ $(i = 1,2,3)$:

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \mathbf{e}_i + \gamma_i \gamma \qquad (\gamma = \gamma^0 \mathbf{e}_0;\ i = 1,2,3), \tag{2}$$

(1) Cfr., per il caso di *coordinate non adattate* [15], §3, 81 e, per *basi anolonome arbitrarie* [16], IV.1, 263.

e rispettivamente alla *metrica indotta* $\gamma_{ik} = \tilde{\mathbf{e}}_i \cdot \tilde{\mathbf{e}}_k$:

$$\gamma_{ik} = g_{ik} + \gamma_i \gamma_k, \tag{3}$$

la quale è *strettamente euclidea*.

A differenza di $\{\mathbf{e}_\alpha\} \in V_4$, *la base* $\{\tilde{\mathbf{e}}_i\} \in \Sigma$ *non ha, in generale, carattere olonomo* (la distribuzione Σ non è integrabile); essa è tuttavia di tipo speciale, e cioè *quasi naturale* nel senso di Cattaneo [17] - Ferrarese ([16], 264). Si vuol dire che ogni cambiamento di coordinate adattate (1) induce in Σ una trasformazione della base $\{\tilde{\mathbf{e}}_i\}$ la quale conserva la forma ordinaria:

$$\tilde{\mathbf{e}}_i \to \tilde{\mathbf{e}}_{i'} = \frac{\partial y_i}{\partial y^{i'}} \tilde{\mathbf{e}}_i . \tag{4}$$

Adottando in $E \in V_4$ la *base anolonoma* $\{\tilde{\mathbf{e}}_0 = \gamma, \tilde{\mathbf{e}}_i\}$, in luogo di quella naturale $\{\mathbf{e}_\alpha\}$, intervengono ovviamente *le quattro derivate pfaffiane indipendenti* $\bar{\partial}$ (*temporale*) e $\tilde{\partial}_i$ *(spaziale)* di cui alla (2):

$$\bar{\partial} \equiv \gamma^0 \frac{\partial}{\partial y^0}, \quad \tilde{\partial}_i \equiv \frac{\partial}{\partial y^i} + \gamma_i \gamma^0 \frac{\partial}{\partial y^0} \quad (i = 1,2,3); \tag{5}$$

in pari tempo, le derivate fondamentali sono espresse dalle formule seguenti [19]:

$$\begin{cases} \bar{\partial}\gamma = C^j \tilde{\mathbf{e}}_j, & \tilde{\partial}_k \gamma = \tilde{H}^{\cdot j}_{k} \tilde{\mathbf{e}}_j \\ \bar{\partial}\tilde{\mathbf{e}}_h = \tilde{H}^{\cdot j}_{h} \tilde{\mathbf{e}}_j + C_h \gamma, & \tilde{\partial}_k \tilde{\mathbf{e}}_h = \tilde{\Gamma}^{\cdot j}_{kh} \tilde{\mathbf{e}}_j + \tilde{H}_{kh} \gamma . \end{cases} \tag{6}$$

In queste figurano tutti gli ingredienti fondamentali, di tipo geometrico, relativi alla congruenza Γ:

a) *I tensori caratteristici del 1° ordine*, cioè il *vettore di curvatura* C_J, *il tensore di anolonomia* della distribuzione Σ: $\tilde{\Omega}_{ik}$ (antisimmetrico) e quello di *deformazione*: $\tilde{K}_{ik}$ (simmetrico), riassunti da $\tilde{H}_{ik}$:

$$\tilde{H}_{ik} = \tilde{\Omega}_{ik} + \tilde{K}_{ik} \qquad (i,k = 1,2,3); \tag{7}$$

b) *i simboli di Christoffel spaziali* (di 1ª o 2ª specie):

$$\tilde{\Gamma}_{ik,j} = \gamma_{jl} \tilde{\Gamma}^{l}_{ik} \equiv \frac{1}{2}(\tilde{\partial}_i \gamma_{kj} + \tilde{\partial}_k \gamma_{ji} - \tilde{\partial}_j \gamma_{ik}) \quad (i,k,j = 1,2,3), \tag{8}$$

costruiti con la *metrica indotta* in Σ e la *derivazione trasversa* $\tilde{\partial}_i$ $(i = 1,2,3)$ (2).

Si noti esplicitamente che le (6) *estendono le equazioni fondamentali di una iper-*

(2) In coordinate non adattate tali simboli divengono i «coefficienti di rotazione» di Ricci, e dipendono ovviamente anche dai due ingredienti γ^i e $\tilde{\Omega}_{ik}$ ([15], 78).

superficie $V_3 \in V_4$ *al caso di una distribuzione anolonoma di 3-piani*; nel *caso olonomo* ($\tilde{\Omega}_{ik} = 0$) tali piani si raccordano su una famiglia di varietà V_3 ortogonali a γ, e ciascuna di queste ammette γ_{ik} e $\tilde{H}_{ik}$ rispettivamente, come *primo e secondo tensore fondamentale*. La congruenza Γ è ovviamente normale.

In ogni modo, ove si pensi lo spazio-tempo V_4 immerso in un opportuno spazio euclideo (teorema di Whitney), in modo da ritenere «conosciuto» il suo tensore di curvatura, le equazioni (6) costituiscono, come nel caso olonomo, un ben determinato *sistema ai differenziali totali* per i vettori γ ed $\tilde{e}_h$. Tale sistema, come nel caso minkowskiano [20], non è generalmente compatibile; di qui le *condizioni di integrabilità* per i coefficienti, direttamente espressi dai campi tensoriali C_i e $\tilde{H}_{ik}$, nonché dalla connessione spaziale $\tilde{\Gamma}^j_{ik}$.

2. Formule di commutazione e tensore di curvatura

Innanzitutto, per le derivate pfaffiane (5) valgono le seguenti *formule di commutazione*, come dalle (6):

$$(9) \qquad \begin{cases} \tilde{\partial}_i \tilde{\partial}_k - \tilde{\partial}_k \tilde{\partial}_i = 2\,\tilde{\Omega}_{ik}\bar{\partial} \\ \bar{\partial}\,\tilde{\partial}_k - \tilde{\partial}_k\bar{\partial} = C_k\,\bar{\partial}\,, \end{cases}$$

da cui il *tensore di onolonomia* $A^{g}_{\alpha\beta}$ della base $\{\tilde{e}_\alpha\}$; sussistono altresì le *identità di Jacobi*

$$(10) \qquad \begin{cases} \tilde{\nabla}_{[i}\,\tilde{\Omega}_{kh]} - C_{[i}\,\tilde{\Omega}_{kh]} = 0 \\ \bar{\partial}\,\tilde{\Omega}_{ik} = \tilde{\nabla}_{[i}\,C_{k]} \qquad\qquad (i,k,h = 1,2,3)\,, \end{cases}$$

ove $\tilde{\nabla}_i$ è l'*estensione covariante della derivata trasversa* $\tilde{\partial}_i$, costruita per mezzo dei simboli di Christoffel spaziali $\tilde{\Gamma}^j_{ik}$: *Derivazione covariante trasversa* di Cattaneo [17].

Sia la derivata covariante trasversa, sia la derivazione longitudinale $\bar{\partial}$, possono essere iterate; naturalmente tali derivate non sono commutabili. Più precisamente, per ogni campo vettoriale spaziale $S_h \in \Sigma$, valgono le seguenti *formule di commutazione* ([15], 85):

$$(11) \qquad \begin{cases} (\tilde{\nabla}_i\,\tilde{\nabla}_k - \tilde{\nabla}_k\,\tilde{\nabla}_i)\,S_h = 2\,\tilde{\Omega}_{ik}\,\bar{\partial}S_h - P^{\,j}_{ikh}S_j \\ (\bar{\partial}\,\tilde{\nabla}_i - \tilde{\nabla}_i\bar{\partial})\,S_h = C_i\,\bar{\partial}\,S_h - \tilde{H}^k_{ih}\,S_k\,, \end{cases}$$

con l'intervento del «*tensore di curvatura spaziale*» P_{ikh} [3]:

(3) Esso non gode di tutte le proprietà algebriche di un tensore di curvatura. Si ha infatti

$$\begin{cases} P_{(ik)hj} = 0,\, P_{ik(hj)} = 2\tilde{\Omega}_{ik}\,\tilde{K}_{hj} \\ P_{ikhj} - P_{hjik} = 2\,(\tilde{\Omega}_{ik}\,\tilde{K}_{hj} - \tilde{K}_{ik}\,\tilde{\Omega}_{hj} + \tilde{\Omega}_{ih}\,\tilde{K}_{kj} + \tilde{K}_{ih}\,\tilde{\Omega}_{kj} - \tilde{\Omega}_{kh}\,\tilde{K}_{ij} - \tilde{K}_{kh}\,\tilde{\Omega}_{ij}) \\ P_{[ikh]j} = 0 \end{cases}$$

$$P_{ikh}{}^{j} \equiv \tilde{\partial}_i \tilde{\Gamma}^j_{kh} - \tilde{\partial}_k \tilde{\Gamma}^j_{ih} + \tilde{\Gamma}^\ell_{kh} \tilde{\Gamma}^j_{i\ell} - \tilde{\Gamma}^\ell_{ih} \tilde{\Gamma}^j_{k\ell}, \tag{12}$$

e del tensore H^k_{ih} di cui alla *derivata longitudinale dei simboli di Christoffel spaziali di 2ª specie*:

$$H^k_{ih} \equiv \tilde{\partial} \tilde{\Gamma}^k_{ih}; \tag{13}$$

tensore che, in conseguenza del legame

$$\tilde{\partial} \gamma_{ik} = 2\tilde{K}_{ik}, \tag{14}$$

non differisce da

$$H_{ih,j} = (\tilde{\nabla}_i + C_i)\tilde{K}_{hj} + (\tilde{\nabla}_h + C_h)\tilde{K}_{ji} - (\tilde{\nabla}_j + C_j)\tilde{K}_{ih}. \tag{15}$$

Vale inoltre l'« *identità di Bianchi spaziale* » ([15], 88)

$$\tilde{\nabla}_{[\ell} P_{ik]h}{}^{j} - \tilde{\Omega}_{[\ell i} H^j_{k]h} = 0. \tag{16}$$

Ciò premesso, in vista di tradurre le equazioni gravitazionali, passiamo al *tensore di curvatura*. In termini anolonomi, secondo la base $\{\tilde{e}_\alpha\} \equiv \{\tilde{e}_0 \equiv \gamma, \tilde{e}_i\}$, le componenti del tensore di curvatura $R_{\alpha\beta\varrho}{}^{\sigma}$ fanno capo alla *formula generale*:

$$[\tilde{\partial}_\alpha, \tilde{\partial}_\beta]\tilde{e}_\varrho - A_{\alpha\beta}{}^{\sigma} \tilde{\partial}_\sigma \tilde{e}_\varrho = R_{\alpha\beta\varrho}{}^{\sigma} \tilde{e}_\sigma \qquad (\alpha, \beta, \varrho = 0,1,2,3). \tag{17}$$

Di qui, tenuto conto delle (6) e (9), $(\tilde{\partial}_0 \equiv \tilde{\partial})$, si ricava direttamente la seguente tabella:

$$\begin{cases} R_{ikh}{}^{j} \equiv P_{ikh}{}^{j} + \tilde{H}_{kh} \tilde{H}^j_i - \tilde{H}_{ih} \tilde{H}^j_k - 2\tilde{\Omega}_{ik} \tilde{H}^j_h \\ R_{ikh}{}^{j} = B_{ikh}, R_{iko}{}^{j} = B_{ik}{}^{j} \\ R_{oik}{}^{j} = -\dfrac{1}{2}(B_{ik}{}^{j} + B^j{}_{ik} - B_k{}^j{}_i) \\ R_{0ik}{}^{0} \neq C_{ik}, R_{0i0}{}^{j} = C^j_i, \end{cases} \tag{18}$$

con l'intervento delle *tre proiezioni fondamentali* $R_{ikh}{}^{j}$, B_{ikh} e C_{ik} (cfr. anche [21] e [19]):

$$\begin{cases} B_{ikh} \equiv \tilde{\nabla}_i \tilde{H}_{kh} - \tilde{\nabla}_k \tilde{H}_{ih} - 2\tilde{\Omega}_{ik} C_h \\ C_{ik} \equiv \tilde{\partial} \tilde{H}_{ik} - (\tilde{\nabla}_i + C_i) C_k - \tilde{H}_{ij} \tilde{H}^j_k. \end{cases} \tag{19}$$

3. EQUAZIONI GRAVITAZIONALI E «FORMALIZZAZIONE» DEL PROBLEMA DI CAUCHY PER UNO SCHEMA ENERGETICO ARBITRARIO

Dalla tabella (18) segue direttamente il *tensore di Ricci*, in forma intrinseca, $R_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\sigma\beta}{}^{\sigma}$:

$$R_{ih} \equiv R_{ijh}{}^{j} - C_{ih}, \qquad R_{io} \equiv B_{ij}{}^{j}, \qquad R_{oo} \equiv C^{i}_{i}, \tag{20}$$

nonché lo scalare di curvatura R:

$$R \equiv R_{ij}{}^{ij} - 2C^{i}_{i}. \tag{21}$$

Di qui, a sua volta, il *tensore gravitazionale* $G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}$.

Pertanto, nel caso di uno schema energetico arbitrario $T_{\alpha\beta}$, le equazioni gravitazionali divengono

$$\begin{cases} R_{ik} - \dfrac{1}{2} R \gamma_{ik} = -\varkappa T_{ik} \\ B_{ij}{}^{j} = -\varkappa T_{io}, \qquad R_{ij}{}^{ij} = -2\varkappa T_{00}; \end{cases} \tag{22}$$

al tempo stesso le *equazioni di evoluzione* $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$, conformemente alla (6), si spezzano nei due gruppi di condizioni, *spaziale*:

$$\bar{\partial} T^{0}_{k} + \tilde{H}^{i}_{i} T^{0}_{k} - \tilde{H}_{ik} T^{i}_{0} - \tilde{H}_{k}{}^{i} T^{0}_{i} + (\tilde{\nabla}_{i} + C_{i}) T^{i}_{k} + C_{k} T^{0}_{0} = 0, \tag{23}$$

e rispettivamente *temporale*

$$\bar{\partial} T^{0}_{0} + \tilde{\nabla}_{i} T^{i}_{0} + \tilde{H}^{i}_{i} T^{0}_{0} + \tilde{H}_{i}{}^{k} T^{i}_{k} - C^{i} T^{0}_{i} = 0. \tag{24}$$

A questo punto, appare del tutto naturale assumere, come equazioni di campo, la $(22)_1$, ovvero l'equivalente

$$R_{ik} = -\varkappa \left(T_{ik} - \frac{1}{2} T \gamma_{ik}\right) \qquad (T \equiv \gamma^{ik} T_{ik} - T_{00}), \tag{25}$$

nonché le (23)-(24), la precedente $(10)_2$ e la (14).

D'altra parte, *la* (25), in conformità della (20), *è una equazione esplicita per la derivata* $\bar{\partial}\tilde{H}_{ik}$, *e contiene la* $(10)_2$ *come parte antisimmetrica*. Pertanto ne consegue il seguente *problema di Cauchy del 1° ordine*, nelle incognite γ_{ik}, $\tilde{H}_{ik}$, T^{0}_{k} e T^{0}_{0}:

$$\begin{cases} \bar{\partial} \gamma_{ik} = 2\tilde{H}_{(ik)} \\ \bar{\partial} \tilde{H}_{ik} = (\tilde{\nabla}_{i} + C_{i}) C_{k} + \tilde{H}_{ij} \tilde{H}_{k}{}^{j} + \tilde{P}_{ik} + \varkappa \left(T_{ik} - \dfrac{1}{2} T \gamma_{ik}\right) \\ \bar{\partial} T^{0}_{0} = -\tilde{H}^{i}{}_{i} T^{0}_{0} - (\tilde{\nabla}_{i} + C_{i}) T^{i}_{0} + \tilde{H}_{ik} T^{ik} \\ \bar{\partial} T^{0}_{k} = -\tilde{H}^{i}_{i} T^{0}_{k} + 2\tilde{H}_{[ik]} T^{oi} + C_{k} T^{0}_{0} - (\tilde{\nabla}_{i} + C_{i}) T^{i}_{k}, \end{cases} \tag{26}$$

con le *condizioni iniziali*

$$\begin{cases} \tilde{\nabla}_{i} \tilde{H}^{i}_{j} - \tilde{\nabla}_{j} \tilde{H}^{i}_{i} - 2\tilde{\Omega}_{ij} C^{j} - \varkappa T^{0}_{i} = 0 \\ \gamma^{ik} \tilde{P}_{ik} - 2\varkappa T^{0}_{0} = 0 \\ \tilde{\nabla}_{[i} \tilde{\Omega}_{kh]} - C_{[i} \tilde{\Omega}_{kh]} = 0 \qquad (\tilde{\Omega}_{ij} \equiv \tilde{H}_{[ij]}), \end{cases} \tag{27}$$

ove si è posto per brevità (4)

$$\tilde{P}_{ik} = P_{ijk}{}^{j} + \tilde{H}^{j}_{i}\tilde{H}_{jk} - \tilde{H}_{ik}\tilde{H}^{j}_{j} - 2\tilde{H}_{[ij]}\tilde{H}_{k}{}^{j} = \tilde{P}_{ki}\,. \tag{28}$$

Naturalmente si presuppongono *equazioni costitutive* della forma

$$\begin{cases} C_i = C_i(y^k|\gamma_{hk}|\tilde{H}_{hk}|T^0_0|T^0_k|) \\ T_{ik} = T_{ik}(y^k|\gamma_{hk}|\tilde{H}_{hk}|T^0_0|T^0_k|)\,. \end{cases} \tag{29}$$

Si rilevi altresì che *le condizioni* (27) *sono di tipo involutivo*, nel senso che, subordinatamente alle (26), esse sono sempre soddisfatte, non appena lo siano inizialmente, su una assegnata superficie spaziale σ.

4. PROBLEMA DI CAUCHY PER UN CONTINUO NON POLARE

Passeremo ora ad un esempio concreto e sufficientemente generale, considerando il caso di un *continuo non polare*. Si vuol dire un continuo materiale caratterizzato da un tensore energetico del tipo

$$M^{\alpha\beta} = \mu_0 V^\alpha V^\beta + T^{\alpha\beta}, \tag{30}$$

ove il *tensore delle 4-tensioni* $T^{\alpha\beta}$ è della forma:

$$T^{\alpha\beta} = X^{\alpha\beta} + Q^{\alpha\beta} + \frac{1}{c^2}\,\epsilon V^\alpha V^\beta, \tag{31}$$

ovvero contiene *tre parti significative*, dal punto di vista fisico, e più precisamente:

a) il *tensore proprio degli sforzi meccanici* $X^{\alpha\beta}$, spaziale e simmetrico:

$$X^{\alpha\beta} = X^{\beta\alpha}, \qquad X^{\alpha\beta}V_\beta = 0; \tag{32}$$

b) lo *stress termico proprio* $Q^{\alpha\beta}$:

$$Q^{\alpha\beta} = \frac{1}{c^2}(Q^\alpha V^\beta + Q^\beta V^\alpha), \tag{33}$$

simmetrico e dipendente dal *flusso termico proprio* Q^α, anch'esso spaziale:

$$Q^\alpha V_\alpha = 0; \tag{34}$$

c) l'*energia interna propria* (di conduzione termica) ϵ.

Di qui il contenuto fisico del tensore energetico materiale $M^{\alpha\beta}$:

(4) Il tensore $\tilde{P}_{ik}$ differisce da $\tilde{R}_{ik} \equiv \tilde{R}_{ijk}{}^{j}$ di cui a [15], 84, per un termine simmetrico:

$$\tilde{R}_{ik} = \tilde{P}_{ik} + \tilde{K}^{j}_{j}\tilde{K}_{ik} + 3\tilde{\Omega}^{j}_{i}\tilde{\Omega}_{kj} - \tilde{K}^{j}_{i}\tilde{K}_{kj}.$$

$$M^{\alpha\beta} = \varrho_0 V^\alpha V^\beta + S^{\alpha\beta}, \tag{35}$$

essendo ϱ_0 la *densità propria di massa propria totale* (materiale e termica):

$$\varrho_0 = \mu_0 + \frac{1}{c^2}\epsilon, \tag{36}$$

ed $S^{\alpha\beta}$ lo *stress totale proprio* (materiale e termico):

$$S^{\alpha\beta} = X^{\alpha\beta} + \frac{1}{c^2}(Q^\alpha V^\beta + Q^\beta V^\alpha); \tag{37}$$

in termini anolonomi, adattati alla struttura quasi prodotto indotta dal continuo nello spazio-tempo, si avrà pertanto ($V^\alpha = c\gamma^\alpha$):

$$\tilde{M}^{00} = \varrho_0 c^2, \qquad \tilde{M}^{0i} = \frac{1}{c}\tilde{Q}^i, \qquad \tilde{M}^{ik} = \tilde{X}^{ik}. \tag{38}$$

Appare evidente, a questo punto, che l'assunzione costitutiva di cui alla (29) non è in linea con le direttive della situazione classica: *la presenza del flusso termico non può essere disgiunta dalle equazioni del calore*. Pertanto se, a titolo di esempio, assumiamo il modello proposto in [22], occorre aggiungere, al quadro (26), sia *l'equazione di Fourier, modificata nel senso di* Cattaneo [23]:

$$c\bar{\partial}\,\tilde{Q}_k = -\nu(\tilde{Q}_k + k\tilde{\partial}_k T), \tag{39}$$

ove $1/\nu$ va inteso *proporzionale all'energia interna* ϵ:

$$\nu = \frac{hc^2}{\epsilon}; \tag{40}$$

sia *l'equazione del calore* che, nel caso puramente gravitazionale ($R = 0$), diviene:

$$c\bar{\partial}T = -T\frac{\partial W^{(i)}}{\partial T} + Q, \tag{41}$$

essendo $W^{(i)}$ la *potenza propria delle forze intime* (5), e Q la *potenza di conduzione termica*:

$$W^{(i)} = c\,\tilde{H}_{ik}\tilde{X}^{ik}, \qquad Q = -(\tilde{\nabla}_i + C_i)\tilde{Q}^i. \tag{42}$$

Ne consegue che la $(26)_4$, avuto riguardo alla (39), assume la forma

$$(\varrho_0\delta^i_k + \frac{1}{c^2}\tilde{X}^i{}_k)C_i = -\frac{1}{c^2}\left[\tilde{\nabla}_i\tilde{X}^i_k - \frac{h}{\epsilon}(\tilde{Q}_K + k\tilde{\partial}_k T) + \frac{1}{c}(\tilde{H}^i_i\tilde{Q}_K + 2\tilde{H}_{[ik]}\tilde{Q}^i)\right], \tag{43}$$

(5) Si noti che $\tilde{H}_{ik}$ si riferisce a γ e non a $\mathbf{V} = c\gamma$.

e *dà luogo così alla legge di dipendenza del vettore di curvatura* C_i, ovvero dell'*accelerazione propria* $A_i = c^2 C_i$:

$$C_i = C_i(\varrho_0|\tilde{X}|\tilde{H}|\tilde{Q}|\tilde{\partial}_k T, ..). \tag{43'}$$

Al tempo stesso il *problema di Cauchy* diviene:

$$\left\{\begin{aligned} &\bar{\partial}\, \gamma_{ik} = 2\tilde{H}_{(ik)} \\ &\bar{\partial}\, \tilde{H}_{ik} = (\tilde{\nabla}_i + C_i) C_k + \tilde{H}_i^j \tilde{H}_k^j + \tilde{P}_{ik} + \varkappa\,[\tilde{X}_{ik} - \frac{1}{2}(\tilde{X}^{\ell m}\gamma_{\ell m} - \varrho_0 c^2)\gamma_{ik}] \\ &\bar{\partial}\, \mu_0 = -\tilde{H}_i^i \mu_0 - \frac{1}{c^2}[\bar{\partial}\,\epsilon - \tilde{H}_i^i \epsilon + \tilde{H}_{ik}\tilde{X}^{ik} + \frac{1}{c}(\tilde{\nabla}_i + C_i)\tilde{Q}^i] \\ &\bar{\partial}\, \tilde{Q}_k = -\frac{h\,c}{\epsilon}(\tilde{Q}_k + k\,\tilde{\partial}_k T), \\ &\bar{\partial}\, T = -T\frac{\partial}{\partial T}(\tilde{H}_{ik}\tilde{X}_{ik}) - \frac{1}{c}(\tilde{\nabla}_i + C_i)\tilde{Q}^i, \end{aligned}\right. \tag{44}$$

con le *condizioni iniziali* di cui alla (27):

$$\left\{\begin{aligned} &\tilde{\nabla}_i \tilde{H}_j^j - \tilde{\nabla}_j \tilde{H}_i^j - 2\tilde{H}_{[ij]} C^j + \frac{1}{c}\varkappa\,\tilde{Q}_i = 0 \\ &\tilde{P}_i^i + 2\varkappa\,\varrho_0 c^2 = 0 \\ &\tilde{\nabla}_{[i}\tilde{\Omega}_{kh]} - C_{[i}\tilde{\Omega}_{kh]} = 0. \end{aligned}\right. \tag{45}$$

Naturalmente il problema differenziale è subordinato alla conoscenza delle *equazioni costitutive*:

$$\left\{\begin{aligned} &\epsilon = \epsilon(y^i|\gamma_{ik}|\tilde{H}_{ik}|\mu_0|\tilde{Q}_i|T, ..) \\ &\tilde{X}_{ik} = \tilde{X}_{ik}(y^i|\gamma_{ik}|\tilde{H}_{ik}|\mu_0|\tilde{Q}_i|T, ..), \end{aligned}\right. \tag{46}$$

ove i puntini indicano l'eventuale dipendenza dalle derivate covarianti spaziali degli argomenti fondamentali.

Si noti esplicitamente l'*intreccio, tipicamente relativistico, delle limitazioni iniziali* (45) *con le equazioni costitutive*, le quali intervengono, sia esplicitamente attraverso ϱ_0, sia implicitamente, attraverso la legge (43) del vettore di curvatura.

Nel caso di un continuo ordinario, cioè senza flusso termico, si ricade ovviamente in uno *schema puramente meccanico*, nelle variabili γ_{jk}, $\tilde{H}_{ik}$ e μ_0, nel senso che le equazioni del calore non intervengono direttamente, in quanto superate dalle equazioni costitutive (46).

REFERENCES

[1] CHOQUET-BRUHAT Y., *Sur l'intégration du problème des conditions initiales en mécanique relativiste*, Comptes rendus, 226, 1948, 1071-73; idem Arch. Rat. Mech. Anal., 5, 1956, 951-66.

[2] CHOQUET-BRUHAT Y., *Sur certains équations aux derivées partielles non lineaires*, Acta Math., 88, 1952, 141-225.

[3] LICHNEROWICZ A., *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris, (1955).

[4] CHOQUET-BRUHAT Y., *The Cauchy Problem*, in Gravitation, an Introduction to Current Research, L. Witten ed., J. Wiley, 1962.

[5] MARSDEN J., *The existence of non-trivial, complete, asymptotically flat spacetimes*, Publ. Dept. Math. Lyon, 9, 1972, 183-93.

[6] HUGHES T., KATO T., e MARSDEN J., *Well posed Quasi-linear Second-order Hyperbolic System With Applications to Nonlinear Elastodynamics and General Relativity*, Arch. Rat. Mech. Anal. 63, 1977, 273-94.

[7] FISCHER A., e MARSDEN J., *The initial value problem and the dynamical formulation of general relativity*, in General relativity, An Einstein centenary survey, S. Hawking e W. Israel, ed. Cambridge Univ. Press, 1979.

[8] CHOQUET-BRUHAT Y., e YORK J., *The Cauchy problem in General Relativity and Gravitation*, A. Held ed., Plenum, 1980.

[9] FRIEDRICH H., *The asymptotic characteristic initial value problem for Einstein's vacuum equations as an initial value problem for a first-order quasilinear symmetric hyperbolic system*, Proc. Roy. Soc. (London) A, 378, 1981, 401-21.

[10] CHOQUET-BRUHAT Y., e RUGGERI T., *Hyperbolicity of the 3+1 system of Einstein equations*, Comm. Math. Phys. 89, 1983, 269-75.

[11] FRIEDRICH H., *Cauchy problems for the conformal vacuum field equations in general relativity*, Comm. Math. Phys., 91, 1983, 445-72.

[12] FRIEDRICH H., *On the existence on n-geodesically solutions of Einstein's field equations with smooth asymptotic structure*, Comm. Math. Phys., 107, 1986, 587-609.

[13] CHOQUET-BRUHAT Y., e NOUTCHEGUEME N., *Système hyperbolique pour les équations d'Einstein avec sources*, Comptes rendus, 303, I, 1986, 259-63.

[14] CHOQUET-BRUHAT Y., e NOVELLO M., *Système conforme régulier pour les équations d'Einstein*, Comptes rendus, 305, II, 1987, 155-60.

[15] FERRARESE G., *Proprietà di 2° ordine di un generico riferimento fisico in Relatività generale*, Rend. Matem. Roma, 24, 1965, 57-100.

[16] FERRARESE G., *Introduzione alla Dinamica riemanniana dei sistemi continui*, I, Pitagora Editrice, Bologna, 1979.

[17] CATTANEO C., *Proiezioni naturali e derivazione trasversa in una varietà riemanniana a metrica iperbolica normale*, Annali di Matem. P. Appl., 48, 1959, 361-86.

[18] ZELMANOV A.L., Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R., 107, 1956,815.

[19] FERRARESE G., *Contributi alla tecnica delle proiezioni in una varietà riemanniana a metrica iperbolica normale*, Rend. Matem. Roma, 22, 1963, 147-68.

[20] FERRARESE G., *Intrinsic Formulations in Relativistic Continuum Mechanics*, Atti del Meeting Italian-Polish on «Selected Problems of Modern Continuum Theory», Bologna, 3.6.1987, 49-58; idem, *Sulla formulazione intrinseca della Meccanica dei continui relativistici*, in corso di stampa negli Atti Sem. Mat. e Fis. Univ., Modena.

[21] CATTANEO-GASPARINI I., *Projections naturelles des tenseurs de courboure d'une varieté V_{n+1} à métrique hyperbolique normale*, Comptes rendus 252, 1961, 3722-24; idem, *Proiezioni dei tensori di curvatura di una varietà riemanniana a metrica iperbolica normale*, Rend. Matem. Roma, 22, 1963, 127-46.

[22] FERRARESE G., *Aspetti nuovi della Termodinamica dei continui in Relatività*, Centro Linceo Interdisciplinare, 76, 1985, 55-83; idem, *Sur la formulation 3-dimensionnelle de la Thermodynamique relativiste*, Atti delle «Journées relativistes de Toulouse», 23-25.4.1986, 57-68; idem, *Sulla formulazione della Termodinamica dei continui relativistici*, Conferenza al Semin. Matem. e Fisico di Milano, 8.10.1986.

[23] CATTANEO C., *Sulla conduzione del calore*, Atti Sem. Matem. Fis. Univ. Modena, III, 1948-49, 83-101.