Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giorgio Vergara Caffarelli

Dissipatività e unicità per il problema dinamico unidimensionale della viscoelasticità lineare

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **82** (1988), n.3, p. 483–488.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1988_8_82_3_483_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1988.

Atti Acc. Lincei Rend. fis.
(8), LXXXII (1988), pp. 483-488

Fisica matematica. — *Dissipatività e unicità per il problema dinamico unidimensionale della viscoelasticità lineare.* Nota di GIORGIO VERGARA CAFFARELLI, presentata (*) dal Socio G. FICHERA.

ABSTRACT. - *Uniqueness and dissipativity for the one-dimensional dynamic problem of the linear viscoelasticity.* We consider the one-dimensional dynamic problem for a linear viscoelastic material in the Sobolev space $H^{1,2}$. We prove the uniqueness of the solution for the class of convex relaxation functions. Moreover we prove that this uniqueness is strictly related to the prefixed Sobolev space.

KEY WORDS: Viscoelasticity; Uniqueness; Dissipativity.

RIASSUNTO. - Fissato lo spazio di Sobolev $H^{1,2}$ come ambiente del problema dinamico per un corpo viscoelastico unidimensionale si dimostra un teorema di unicità per la classe delle funzioni di rilassamento convesse. Si fa inoltre vedere come tale unicità sia strettamente legata allo spazio ambiente considerato.

1. - Come il prof. Fichera ha messo in evidenza in [1] e [2] il problema quasistatico della viscoleasticità lineare isoterma così come quello dinamico (cfr. [3], [4], [5]) presenta fenomeni di non unicità e di non esistenza, qualora non si supponga nota la storia della deformazione del corpo da $-\infty$ ad un certo istante t_0. Ciò è dovuto, come precisato anche in [6], alla profonda differenza di comportamento tra un operatore integrale di Volterra avente come primo estremo di integrazione un numero reale t_0 ed un analogo operatore il cui primo estremo di integrazione è $-\infty$.

Una delle questioni proposte dal prof. Fichera è di caratterizzare, fissato uno spazio funzionale in cui sia ambientato il problema integro-differenziale del moto, una classe di funzioni di rilassamento per le quali i suddetti problemi risultino ben posti.

In questa nota, relativa al caso unidimensionale, si assume come spazio delle soluzioni un sottospazio dello spazio di Sobolev $H^{1,2}$ delle funzioni di quadrato sommabile insieme alle loro derivate parziali prime.

Si assume altresì, come classe di funzioni di rilassamento la classe delle funzioni $G(s)$ che siano positive, convesse in $[0, +\infty)$ e tali che

$$\int_0^{+\infty} |\dot{G}(s)|\, ds < +\infty .$$

(*) Nella seduta del 12 marzo 1988.

In tali ipotesi dimostreremo un teorema di unicità e forniremo poi un esempio di funzione di rilassamento nella classe considerata per la quale il problema dinamico omogeneo, con la condizione di spostamento nullo agli estremi, ammette autosoluzioni periodiche.

Tale fenomeno si accorda perfettamente con l'interpretazione fornita dal prof. Capriz sull'esistenza di autosoluzioni del problema dinamico per materiali linearmente elastici dotati di memoria (cfr. [7] ed anche [8]).

2. - Per un corpo unidimensionale omogeneo linearmente viscoelastico non soggetto a forze esterne l'equazione di moto si scrive, con notazioni ovvie,

$$-\varrho u_{tt}(x,t) + G(0)\,u_{xx}(x,t) + \int_0^{+\infty} \dot{G}(s)\,u_{xx}(x,t-s)\,ds = 0. \tag{1}$$

Supporremo che la variabile spaziale x vari nell'intervallo $[0,\ell]$ e che agli estremi valgano le condizioni omogenee

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0. \tag{2}$$

Supporremo inoltre che la variabile temporale t percorra la semiretta $(-\infty,0]$ il cui estremo superiore è scelto con criterio puramente convenzionale, in modo che le soluzioni di (1) saranno cercate nella semistriscia

$$S = (0,\ell) \times (-\infty,0).$$

Indicando con W il sottospazio dello spazio di Sobolev $H^{1,2}(S)$ costituito dalle funzioni $v(x,t)$ aventi traccia nulla sulle semirette $x = 0$, $x = \ell$, con $t < 0$, diremo che una funzione $u \in W$ è la soluzione del problema (1), (2), se

$$\iint_S \Big[\varrho u_t(x,t)\,\phi_t(x,t) - G(0)\,u_x(x,t)\,\phi_x(x,t) - \int_0^{+\infty} \dot{G}(s)\,u_x(x,t-s)\,ds\cdot\phi_x(x,t)\Big]\,dx\,dt = 0 \tag{3}$$

per ogni $\phi \in C_c^\infty((-\infty,0);\,H_0^1(0,\ell))$.

Dimostreremo che

TEOREMA. - *Sia* $G(s) \in C^\circ[0,+\infty)$ *positiva, convessa, e tale che*

$$\int_0^{+\infty} |\dot{G}(s)|\,ds < +\infty.$$

Allora l'unica soluzione in W della (3) è la funzione identicamente nulla.

Alla dimostrazione del teorema premettiamo due lemmi. Il primo riguarda i coefficienti $\alpha_n(t)$ dello sviluppo in serie trigonometrica di soli seni della $u(x,t)$ (cfr. [5]).

LEMMA 1. - Sia $u(x,t) \in W$ soluzione di (3) e poniamo

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x$$

essendo

$$\alpha_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} u(x,t) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x dx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Allora

i) $\alpha_n(t)$ appartiene allo spazio $H^{2,2}(-\infty, 0)$,

ii) verifica l'equazione

$$\varrho \ddot{\alpha}_n(t) + \lambda_n G(0) \alpha_n(t) + \lambda_n \int_0^{+\infty} \dot{G}(s) \alpha_n(t-s) ds = 0, \tag{4}$$

ove si è posto $\lambda_n = (n\pi/\ell)^2$,

iii) risulta

$$\lim_{t \to -\infty} \dot{\alpha}_n(t) = \lim_{t \to -\infty} \alpha_n(t) = 0$$

e quindi si ha $\alpha_n(t), \dot{\alpha}_n(t) \in L^\infty(-\infty, 0)$.

DIM. Assumendo in (3) $\phi(x,t) = \psi(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x$ con $\psi(t) \in C_c^\infty(-\infty, 0)$, si vede subito che $\alpha_n(t)$ verifica, nel senso delle distribuzioni, l'equazione (3). Poiché $\alpha_n(t) \in H^{1,2}(-\infty, 0)$ ovviamente $\alpha_n(t) \in C^0(-\infty, 0) \cap L^2(-\infty, 0)$, dalle proprietà della convoluzione segue allora $\ddot{\alpha}_n(t) \in L^2(-\infty, 0)$ da cui $\dot{\alpha}_n(t) \in C^0(-\infty, 0) \cap L^2(-\infty, 0)$.

Moltiplicando la (4) per $\dot{\alpha}_n(t)$ ed integrando in un intervallo (t_1, t_2) si ha

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \varrho \dot{\alpha}_n^2(t_2) - \frac{1}{2} \varrho \dot{\alpha}_n^2(t_1) + \frac{1}{2} \lambda_n G(0) \alpha_n^2(t_2) - \\ &- \frac{1}{2} \lambda_n G(0) \alpha_n^2(t_1) = - \lambda_n \int_{t_1}^{t_2} \dot{\alpha}_n(t) \left(\int_0^{+\infty} \dot{G}(s) \alpha_n(t-s) ds \right) dt. \end{aligned} \tag{5}$$

Poiché esiste il limite per $t_1 \to -\infty$ del secondo membro di (5) deve esistere anche il limite di $\varrho \dot{\alpha}_n^2(t_1) + G(0) \lambda_n \alpha_n^2(t_1)$ per $t_1 \to -\infty$. Tale limite è necessariamente zero per l'ipotesi di sommabilità $\alpha_n(t) \in H^{1,2}(-\infty, 0)$, ed inoltre ovviamente $\alpha_n(t)$ e $\dot{\alpha}_n(t)$ appartengono ad $L^\infty(-\infty, 0)$.

Dimostriamo ora che:

LEMMA 2. - Sia $f(s) \in C^1[0, +\infty)$ una funzione non negativa tale che

$$f(s), \dot{f}(s) \in L^\infty(0, +\infty)$$

$$f(0) = \dot{f}(0) = 0.$$

Allora

$$\int_0^{+\infty} \dot{f}(s)\dot{G}(s)\, ds \leqslant 0$$

DIM. - Per utilizzare i risultati della teoria delle distribuzioni relative alla dualità fra misure e funzioni continue in $\mathbb{R}$ a supporto compatto, supponiamo preliminarmente $\dot{G}(0^+) > -\infty$ e prolunghiamo la funzione convessa $G(s)$ a tutto $\mathbb{R}$ ponendo $G^*(s) = G(0) + s\dot{G}(0^+)$ per $s < 0$ e la funzione $f \in C^1[0, +\infty)$ a tutto $\mathbb{R}$ ponendo $f^*(s) = 0$ per $s < 0$. Detta $\{\chi_m(s)\}$, $m \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni $C^1(\mathbb{R})$ tali che $0 \leqq \chi_m(s) \leqq 1$, $\chi_m(s) = 1$ per $s < m$, $\chi_m(s) = 0$ per $s > m + 1$ e $|\dot{\chi}_m(s)| \leqq 2$ per $m \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$ è ovvio che risulta

$$f_m(s) = \chi_m(s) f^*(s) \in C^1_c(\mathbb{R})$$

e quindi

$$\int_0^{+\infty} \dot{G}(s) \frac{d}{ds}(f_m(s))\, ds = -\int_0^{+\infty} f_m(s)\, d\dot{G} \leq 0$$

avendo indicato con $d\dot{G}$ la misura positiva ottenuta come derivata seconda, nel senso delle distribuzioni, della funzione convessa $G^*(s)$.

D'altra parte si ha

$$\lim_{m \to +\infty} \left[\int_0^{+\infty} \chi_m(s)\dot{f}(s)\dot{G}(s)\, ds + \int_0^{+\infty} \dot{\chi}_m(s) f(s)\dot{G}(s)\, ds \right] = \int_0^{+\infty} \dot{f}(s)\dot{G}(s)\, ds$$

in quanto al primo addendo si può applicare il teorema di Lebesgue mentre per il secondo risulta:

$$\lim_{m \to +\infty} \left| \int_0^{+\infty} \dot{\chi}_m(s) f(s)\dot{G}(s)\, ds \right| \leq \lim_{m \to +\infty} 2\, \|f\|_{L^\infty(0, +\infty)} (G(m) - G(m+1)) = 0.$$

Concludiamo ora la dimostrazione considerando il caso generale. Poniamo per ogni $m \in \mathbb{N}$ $\dot{G}_m(s) = \max(\dot{G}(s), -m)$. È facile controllare che $\dot{G}_m(s)$ è una funzione limitata, non positiva, non decrescente in $(0, +\infty)$ ed inoltre $|\dot{G}_m(s)| \leq |\dot{G}(s)|$. Per quanto visto prima si ha

$$\int_0^{+\infty} \dot{G}_m(s)\dot{f}(s)\,ds \leq 0 \qquad \text{per ogni } m \in \mathbb{N}$$

e quindi passando al limite per $m \to +\infty$ la tesi.

Dimostrazione del teorema. - Posto $G(+\infty) = \lim_{s \to +\infty} G(s) \geq 0$, essendo ovviamente $\dot{G}(s) \leqq 0$ per quasi ogni $s \in (0, +\infty)$, consideriamo la funzione non negativa

$$V(t) = \frac{1}{2}\varrho\dot{\alpha}_n^2(t) + \frac{1}{2}\lambda_n G(+\infty)\alpha_n^2(t) - \frac{1}{2}\lambda_n \int_0^{+\infty} \dot{G}(s)[\alpha_n(t) - \alpha_n(t-s)]^2 ds \geqq 0.$$

Tenendo presente la (4) ed i lemmi 1 e 2 si ha

$$\frac{dV}{dt} = \varrho\dot{\alpha}_n(t)\ddot{\alpha}_n(t) + \lambda_n G(+\infty)\alpha_n(t)\dot{\alpha}_n(t) -$$

$$-\lambda_n \int_0^{+\infty} \dot{G}(s)[\alpha_n(t) - \alpha_n(t-s)][\dot{\alpha}_n(t) - \dot{\alpha}_n(t-s)]\,ds =$$

$$= \dot{\alpha}_n(t)\left[\varrho\ddot{\alpha}_n(t) + \lambda_n G(\infty)\alpha_n(t) - \lambda_n\alpha_n(t)\int_0^{+\infty} \dot{G}(s)\,ds + \lambda_n \int_0^{+\infty} \dot{G}(s)\alpha_n(t-s)\,ds\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\lambda_n \int_0^{+\infty} \dot{G}(s)\frac{d}{ds}[\alpha_n(t) - \alpha_n(t-s)]^2 ds \leqq 0$$

Poiché $\lim_{t \to -\infty} V(t) = 0$ e $V(t)$ è non negativa e non crescente è facile controllare che, anche se $G(+\infty) = 0$, essendo $\alpha_n \in H^{1,2}(-\infty, 0)$, risulta $\alpha_n(t) = 0$ per ogni $t < 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Osserviamo che l'utilizzazione della funzione $V(t)$ nella dimostrazione di questo teorema è in un certo senso «complementare», a quanto fatto in [9], ove si considera la stabilità asintotica del problema viscoelastico per il quale siano assegnati dati storici.

Diamo ora un esempio di funzione di rilassamento convessa per la quale il corrispondente problema dinamico ammette autosoluzioni periodiche.

Assumiamo per semplicità $\varrho = \ell = 1$ e

$$G(s) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}s & \text{per } 0 \leqq s \leqq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{per } s > 1 \end{cases}$$

L'equazione (1) diviene in tal caso

$$(1') \qquad -u_{tt}(x,t) + u_{xx}(x,t) - \frac{1}{2}\int_{t-1}^{t} u_{xx}(x,\tau)\,d\tau = 0$$

con le condizioni

$$(2') \qquad u(0,t) = u(1,t) = 0$$

È subito visto che la funzione

$$u(x,t) = \operatorname{sen} 2\pi x \operatorname{sen} 2\pi t$$

soddisfa (1′) e (2′).

References

[1] G. Fichera (1979) - *Avere una memoria tenace crea gravi problemi*, «Arch. Rational Mech. Anal.», *70*, 101-112.

[2] G. Fichera (1982) - *Sul principio della memoria evanescente*, «Rend. Sem. Mat. Univ. Padova», *68*, 235-259.

[3] G. Capriz e E.G. Virga (1986) - *Esempi di non-unicità in viscoelasticità lineare*, «Atti Accad. Sc. Torino», suppl. 120, 81-86.

[4] E.G. Virga e G. Capriz (1987) - *Un teorema di unicità in viscoleasticità lineare*, «Rend. Sem. Mat. Padova».

[5] G. Vergara Caffarelli e E.G. Virga (1987) - *Sull'unicità della soluzione del problema dinamico della viscoelasticità lineare*, « Atti Acc. Lincei Rend. fis.» (8), LXXXI, 379-387.

[6] G. Fichera (1988) - *Lettera a A. Morro, Agosto 1985*, pubblicata con il titolo: "Sui materiali elastici con memoria", «Atti Acc. Lincei Rend. fis.» (8), LXXXII, 473-478.

[7] G. Capriz (1986) - *Sulla impostazione di problemi dinamici in viscoelasticità*, tavola Rotonda «Continui con memoria», Accademia Nazionale dei Lincei.

[8] G. Vergara Caffarelli (1989) - *Il problema dinamico della viscoelasticità lineare: unicità per le soluzioni illimitate nel remoto passato*, «Rend. Sem. Mat. Padova», *81*, 21-29.

[9] C.M. Dafermos (1970) - *Asymptotic Stability in viscoelasticity*, «Arch. Rat. Mech. Anal.», *37*, 297-308.