Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giulio Mattei

Su un problema di instabilità gravitazionale di un fluido in presenza di correnti di Hall e di ion slip

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **82** (1988), n.3, p. 479–482.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1988_8_82_3_479_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1988.

Atti Acc. Lincei Rend. fis.
(8), LXXXII (1988), pp. 479-482

Fisica matematica. — *Su un problema di instabilità gravitazionale di un fluido in presenza di correnti di Hall e di ion slip.* Nota di GIULIO MATTEI (*), presentata (**) dal Corrisp. T. MANACORDA.

ABSTRACT. - *On the gravitational instability in the presence of the Hall and ion slip currents.* In this paper we discuss the gravitational instability of a compressible, electrically-conducting fluid described by the magnetofluiddynamic equations in the presence of the Hall and ion slip currrents. The condition for instability is determined relatively to a class of axisymmetric perturbations.

KEY WORDS: Magnetofluiddynamics; Plasma; Instability.

RIASSUNTO. - In questo lavoro si studia la instabilità gravitazionale di un fluido comprimibile, elettroconduttore, descritto dalle equazioni della magnetofluidodinamica in presenza delle correnti di Hall e di ion slip. Si determina la condizione per la instabilità relativa ad una classe di perturbazioni assialsimmetriche.

1. INTRODUZIONE

In [1] si è studiato il problema della instabilità gravitazionale relativa ad una classe di perturbazioni a simmetria assiale di un fluido comprimibile elettroconduttore descritto dalle equazioni della magnetofluidodinamica (MFD) in presenza di effetto Hall. Scopo di questa nota è quello di estendere il contenuto di [1] al caso in cui, oltre a quella di Hall, debba considerarsi anche la corrente di ion slip (1).

Scritte nel n. 2 le equazioni delle perturbazioni, nel n. 3 se ne determina una classe di soluzioni a simmetria assiale con la corrispondente equazione di dispersione; nel n. 4 infine si ricava la condizione di instabilità gravitazionale.

2. LE EQUAZIONI DELLE PERTURBAZIONI

Le equazioni delle perturbazioni sono (cfr. [3] Sect. V e, per la (2.2), [2])

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{a^2}{\varrho_0}\operatorname{grad}\varrho_* + \frac{1}{4\pi\mu\varrho_0}(\operatorname{rot}\mathbf{b})\wedge\mathbf{B}_0 + \operatorname{grad}U_* \tag{2.1}$$

(*) Meccanica Razionale, Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale, Facoltà di Ingegneria dell'Università di Pisa - Via Diotisalvi, 2 - 56100 Pisa.
(**) Nella seduta del 12 marzo 1988.
(1) Per quest'ultima e per una bibliografia a riguardo, cfr. per es. [2].

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \mathrm{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0) + \beta \mathrm{rot}\left(\frac{\mathbf{B}_0}{B_0} \wedge \mathrm{rot}\,\mathbf{b}\right) + \alpha \mathrm{rot}\left[\frac{\mathbf{B}_0}{B_0} \wedge \left(\frac{\mathbf{B}_0}{B_0} \wedge \mathrm{rot}\,\mathbf{b}\right)\right] \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \varrho_*}{\partial t} = -\varrho_0 \mathrm{div}\,\mathbf{v} \tag{2.3}$$

$$\nabla^2 U_* = -4\pi G \varrho_*, \tag{2.4}$$

dove si è posto

$$\beta = \frac{c^2 B_0}{4\pi\mu}\beta_H, \qquad \alpha = \frac{c^2 B_0^2}{4\pi\mu}\beta_I. \tag{2.5}$$

In esse $\mathbf{v}$ indica la perturbazione nel campo di velocità, t il tempo, a la velocità del suono, ϱ_0 la densità nello stato imperturbato, ϱ_* la perturbazione nella densità, μ la permeabilità magnetica (costante), $\mathbf{b}/\mu$ la perturbazione nel campo magnetico, $\mathbf{B}_0/\mu$ il campo magnetico (costante) nello stato imperturbato, U_* la perturbazione nel potenziale gravitazionale, G la costante di gravitazione universale, c la velocità della luce nel vuoto, β_H il coefficiente di Hall e β_I quello di ion slip.

3. Soluzioni cilindriche ed equazioni di dispersione

Introdotta una terna T di coordinate cilindriche ortogonali r, ϕ, z, di corrispondenti versori $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$ ed $\mathbf{e}_z$ con $\mathbf{e}_z$ parallelo e concorde a $\mathbf{B}_0$, supponiamo le perturbazioni dotate di simmetria cilindrica rispetto all'asse z.

Indicate con v_r, v_φ, v_z e con b_r, b_φ, b_z le componenti fisiche relative a T di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{b}$ (proiezioni di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{b}$ secondo $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$ ed $\mathbf{e}_z$ rispettivamente), le (2.1) e (2.2) proiettate su T forniscono le

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{a^2}{\varrho_0}\frac{\partial \varrho_*}{\partial r} + \frac{\partial U_*}{\partial r} + \frac{B_0}{4\pi\mu\varrho_0}\left(\frac{\partial b_r}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial r}\right) \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \frac{B_0}{4\pi\mu\varrho_0}\frac{\partial b_\varphi}{\partial z} \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{a^2}{\varrho_0}\frac{\partial \varrho_*}{\partial z} + \frac{\partial U_*}{\partial z} \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial b_r}{\partial t} = B_0\frac{\partial v_r}{\partial z} + \beta\frac{\partial^2 b_\varphi}{\partial z^2} + \alpha\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial b_r}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 b_r}{\partial z^2} - \frac{b_r}{r^2}\right] \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial b_\varphi}{\partial t} = B_0\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} - \beta\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial b_r}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial r}\right) + \alpha\frac{\partial^2 b_\varphi}{\partial z^2} \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} = -\frac{B_0}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) - \beta\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r b_\varphi)\right] + \alpha\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial b_z}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 b_z}{\partial z^2}\right]. \tag{3.6}$$

Da (2.3) e (2.4) discendono le

$$\frac{\partial \varrho_*}{\partial t} = -\varrho_0\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\, v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right] \tag{3.7}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U_*}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 U_*}{\partial z^2} = -4\pi G\varrho_*. \tag{3.8}$$

Il sistema (3.1)-(3.8) ammette la seguente soluzione, corrispondente alla propagazione lungo l'asse z di onde cilindriche,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \{J_1(\gamma r)(\bar{v}_r\mathbf{e}_r + \bar{v}_\varphi\mathbf{e}_\varphi) + J_0(\gamma r)\bar{v}_z\mathbf{e}_z\}\exp[i(\omega t - kz)] \\ \mathbf{b} &= \{J_1(\gamma r)(\bar{b}_r\mathbf{e}_r + \bar{b}_\varphi\mathbf{e}_\varphi) + J_0(\gamma r)\bar{b}_z\mathbf{e}_z\}\exp[i(\omega t - kz)] \\ (\varrho_*, U_*) &= (\bar{\varrho}_*, \bar{U}_*)J_0(\gamma r)\exp[i(\omega t - kz)], \end{aligned} \tag{3.9}$$

fornendo l'equazione di dispersione (il numero d'onda k è considerato prefissato reale e $w = i\omega$)

$$w^6 + a_1 w^5 + a_2 w^4 + a_3 w^3 + a_4 w^2 + a_5 w + a_6 = 0 \tag{3.10}$$

con

$$a_1 = \alpha(\gamma^2 + 2k^2),$$

$$a_2 = M + A^2(\gamma^2 + 2k^2) + k^2(\gamma^2 + k^2)(\alpha^2 + \beta^2),$$

$$a_3 = 2A^2k^2\alpha(\gamma^2 + k^2) + a_1 M,$$

$$a_4 = 2Mk^2A^2 + k^2(\gamma^2 + k^2)[A^4 + M(\alpha^2 + \beta^2)],$$

$$a_5 = A^2k^2Ma_1,$$

$$a_6 = A^4k^4M,$$

dove $A^2 = B_0^2/4\pi\mu\varrho_0$ è il quadrato della velocità di Alfvén e

$$M = a^2(\gamma^2 + k^2) - 4\pi G\varrho_0. \tag{3.11}$$

Nella (3.9) $\bar{v}_r$, $\bar{v}_\varphi$, $\bar{v}_z$, $\bar{b}_r$, $\bar{b}_\varphi$, $\bar{b}_z$, $\bar{\varrho}_*$, $\bar{U}_*$ sono delle costanti, J_1 e J_0 sono le funzioni di Bessel di prima specie di ordine uno e zero rispettivamente e γ una costante reale non nulla determinabile con le condizioni al contorno (cfr. [1)].

4. La condizione di instabilità gravitazionale

Dall'esame della (3.10) si riconosce facilmente che se $M < 0$, ossia se è verificata la condizione

$$\alpha^2(\gamma^2 + k^2) < 4\pi G \varrho_0, \tag{4.1}$$

la (3.10) possiede almeno una radice reale positiva, il che porta alla instabilità gravitazionale; corrispondentemente si ha per il valore critico k_c del numero d'onda l'espressione

$$k_c = \frac{(4\pi G \varrho_0 - a^2\gamma^2)^{1/2}}{a}. \tag{4.2}$$

La (4.1) fornisce quindi la cercata condizione di instabilità gravitazionale.

Il valore di k_c dato dalla (4.2) coincide con quello trovato in [1] nel caso $\alpha = 0$: *si ha quindi il risultato che la corrente di ion slip, come già quella di Hall, non influenza il valore del numero d'onda critico.*

Bibliografia

[1] G. Mattei (1970) - *Su un problema di instabilità gravitazionale di un plasma in presenza di effetto Hall*, «Boll. Un. Mat. Ital.», (4), *3*, 230-241.

[2] G. Mattei (1984) - *Sulla propagazione ondosa in un fluido in presenza di correnti di Hall e di ion slip*, «Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena», *33*, 113-123.

[3] S. Chandrasekhar and E. Fermi (1953) - *Problems of gravitational stability in the presence of a magnetic field*, «Astrophys. J.», *118*, 116-141.