Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Gaetano Fichera

## Sui materiali elastici con memoria

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **82** (1988), n.3, p. 473–478.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1988_8_82_3_473_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1988.

*Atti Acc. Lincei Rend. fis.*
*(8), LXXXII (1988), pp. 473-478*

**Fisica matematica.** — *Sui materiali elastici con memoria.* Nota (*) del Socio GAETANO FICHERA.

ABSTRACT. - *On elastic materials with memory.* The point of view of the author with respect to mathematical models of hereditary elasticity is expounded. Particular emphasis is given to the influence of the topology of the space of the admissible functions on the basic concepts of the theory.

KEY WORDS: Viscoelasticity; Hereditary Elasticity; Principle of Fading Memory.

RIASSUNTO. - Viene esposto il punto di vista dell'autore rispetto ai modelli matematici dell'elasticità ereditaria. Particolare rilievo viene dato all'influenza della topologia dello spazio delle funzioni ammissibili sui concetti fondamentali della teoria.

Nel 1963 B. D. Coleman e W. Noll pubblicavano un lavoro [1] nel quale veniva data forma matematica al Principle of Fading Memory (Principio della memoria evanescente) secondo il quale un materiale elastico dotato di memoria tende, con il volger del tempo, a dimenticare la sua «storia» più remota. Tale assioma era stato enunciato, sotto una forma matematica diversa da quella di Coleman e Noll, già da Volterra (cfr. [2], p. 102) fin dal 1913.

La caratteristica più saliente della formulazione di Coleman e Noll è che in essa appare, per la prima volta sotto forma esplicita, un'organizzazione dello spazio delle funzioni ammissibili in spazio funzionale dotato di una topologia. Da allora numerosi lavori sono stati dedicati al sopraddetto Principio, con varianti più o meno rilevanti nell'enunciazione del Principio stesso.

Nell'estate dell'85 il Collega Prof. Angelo Morro dell'Università di Genova mi trasmise un suo dattiloscritto, dal titolo «*Constitutive Equations in Thermoelasticity*», relativo ad una conferenza da lui tenuta ad un Convegno linceo, svoltosi nel maggio di quell'anno. In quel lavoro venivano esposte sue ricerche e ricerche sue e di M. Fabrizio relative ai problemi termoelastici dei materiali con memoria (1).

Rispondendo al gentile Collega esponevo, nella mia lettera, i punti in vista relativi al problema dell'evanescenza della memoria in un corpo elastico, da me maturati dopo diversi anni di riflessione sul problema stesso.

(*) Presentata nella seduta del 12 marzo 1988.

(1) Per un'esposizione riassuntiva dei risultati di M. Fabrizio e A. Morro, cfr. [3]. Cfr. anche [4].

Tale lettera era poi stata da me fatta conoscere a diversi altri Colleghi, interessati al problema. Poichè le considerazioni in essa contenute sembrano avere interessato alcuni Studiosi ed originato altre ricerche (2), mi sembra non inutile pubblicare qui la predetta lettera, lasciando ad essa lo stile discorsivo e ... umoristico che essa aveva come lettera privata.

*

* *

... Mi congratulo molto con Lei per il Suo Lavoro, rivolto ad un argomento difficile, costituito da un autentico problema di Fisica matematica: *come tradurre in termini matematicamente plausibili il problema dell'equilibrio di un corpo elastico, tenendo conto della sua precedente storia.*

Le Sue considerazioni, assai interessanti, si uniscono a quelle svolte da altri Colleghi (Gurtin & Capriz, Graffi, etc.) per «sedare lo scandalo» suscitato da alcuni miei esempî (cfr. [4], [5], [6]) con i quali si dimostra che il PRINCIPLE OF FADING MEMORY di Coleman e Noll (in verità, un po' ... semplicistico) può ben dar luogo ad equazioni costitutive che, nell'ambito della visco-elasticità lineare (e temo il peggio in quella non lineare!), possono essere inconsistenti o incomplete, venendo a mancare il teorema di esistenza e/o di unicità per la soluzione.

Con un'analisi, che ho assai apprezzato, Ella dimostra che, nello scrivere le equazioni costitutive, bisogna tener conto di ulteriori diseguaglianze per le «funzioni di rilassamento», diseguaglianze che scaturiscono dalla seconda legge della termodinamica. Condizioni che Ella, con saggia prudenza, ritiene soltanto «necessarie», ma non «sufficienti». Posso, in effetti, assicurarle che non mi sarebbe difficile produrre un ulteriore esempio di una funzione di rilassamento che, verificando tutte le condizioni richieste da Coleman, Noll, Gurtin, Capriz, Morro, etc., è tale da disattendere la esistenza e/o l'unicità (3).

Questo porterebbe qualche ulteriore, pur valoroso, Collega a scoprire che il nuovo esempio da me prodotto «is not at all surprising», dato che non verificherebbe chissà quale altra diabolica condizione necessaria, suggerita da chissà quali leggi e assiomi da aggiungere a quelli della classica teoria lineare dell'Elasticità.

Ma è il tempo di porre fine a questo poco divertente «jeu de massacre»!

Nella mia Nota [6] (dedicata a Peppino Grioli) è «contenuto un messaggio» (quanti modi balordi di dire si acquistano seguendo, anche moderatamente, come nel caso mio, i mass-media!), che mi permetto di ritenere Ella non abbia recepito: *la estrema sensibilità del problema in istudio rispetto allo spazio funzionale scelto ed alla topologia in esso introdotta.*

(2) Cfr. la Nota del Prof. G. Vergara Caffarelli pubblicata in questo fascicolo ed altra dello stesso Autore che apparirà nel fascicolo di aprile.

(3) Dopo la pubblicazione di [3], quest'esempio è stato prodotto in [4].

In effetti, non sta scritto in alcun Sacro Libro quale debba essere lo spazio funzionale nel quale assegnare il dato e ricercare l'incognita dell'equazione integrale

(1) $$\sigma(t) = G(0)\,\epsilon(t) + \int_{-\infty}^{t} G'(t-\tau)\,\epsilon(\tau)\,d\tau, \qquad G(0) \neq 0$$

$$(-\infty < t \leqslant q).$$

La scelta di un tale spazio è un *libero arbitrio* del ricercatore e non può essere dettata da esperienze fisiche. (Come, infatti, sarebbero possibili?). In realtà, dato un qualsiasi fenomeno fisico, in cui si assume che il «dato» e la «incognita» siano funzioni del tempo t nell'intervallo infinito, *qualunque sia l'esperienza fisica che un essere umano possa escogitare,* detta esperienza potrà essere descritta solo usando funzioni di t definite in un *intervallo limitato* [a, b] di $\mathbb{R}$.

Ora, supponga che la G verifichi la condizione

$$\int_{0}^{+\infty} |G'(s)|\,ds < +\infty$$

e che lo spazio funzionale sia quello di Banach delle funzioni continue in $(-\infty, q]$ per le quali sia finita la norma

(2) $$\|\epsilon\| = \sup_{(-\infty,q)} |e^{-\alpha t}\,\epsilon(t)|.$$

Come costante $\alpha$ si assuma una qualsiasi delle costanti positive tali che

$$\frac{1}{|G(0)|}\int_{0}^{+\infty} |G'(s)|\,e^{-\alpha s}\,ds < 1$$

(l'integrale al primo membro tende a 0 per $\alpha \to +\infty$). Allora per la (1), come facilmente si dimostra, sussiste l'esistenza e l'unicità nello spazio funzionale considerato. E questo è vero se, in particolare, si assume come funzione di rilassamento

$$G(s) = \frac{1}{2} - s\exp(-s),$$

per la quale viene a cadere, mi pare, la Sua analisi di preclusione, visto che Ella non può più servirsi della funzione, usata nel Suo lavoro, cioé la $\epsilon(t) = \epsilon_0 \sin(\omega t)$ $(\omega \in \mathbb{R}^+)$ (4), dato che tale «test function» non appartiene ad alcuno spazio funzionale

(4) Nel lavoro del Prof. Morro sono ammissibili le funzioni con la norma [2], considerata per $\alpha = 0$.

definito da (2) se è $\alpha > 0$. E debbo dirLe, caro Collega Morro, che respingerei «a priori» qualsiasi arzigogolo tendente a convincermi che lo spazio funzionale che Ella adopera può essere preso in considerazione e quelli definiti da (2) no: *data comunque una funzione continua nell'arbitrario intervallo limitato* $[a,b]$ *di* $\mathbb{R}$, *essa è sempre la traccia in* $[a,b]$ *sia di una funzione dello spazio funzionale da Lei impiegato, sia di una di quelli definiti tramite la (2).*

La ragione per la quale i problemi con memoria, schematizzati con equazioni quali le (1), presentano gravi difficoltà, è assai più profonda. Essa, secondo il mio modesto parere (maturato dopo diversi anni di riflessioni sull'argomento), dipende dalla ipotesi «semplicistica» consistente nel far variare il tempo t in un intervallo infinito, cioé da $-\infty$ ad un certo istante finito q. A ciò credo si sia giunti schematizzando, in un modo che «a posteriori» si rivela grossolano, il fatto che il fenomeno copre un lunghissimo intervallo di tempo. Si pensa allora che far variare t in $(t_0, q)$ oppure in $(-\infty, q)$ sia la stessa cosa, dato che la parte del fenomeno relativa a $(-\infty, t_0)$, se $t_0$ è negativo e $|t_0|$ è molto grande, è «trascurabile». Questo modo di vedere, anche se oggi universalmente accettato, si rivela, ad un'analisi più profonda, come un fatale errore! In effetti, i due operatori

$$\mathcal{T}_{-\infty}(\epsilon) = G(0)\,\epsilon(t) + \int_{-\infty}^{t} G'(t-\tau)\,\epsilon(\tau)\,d\tau,$$

$$\mathcal{T}_{t_0}(\epsilon) = G(0)\,\epsilon(t) + \int_{t_0}^{t} G'(t-\tau)\,\epsilon(\tau)\,d\tau$$

sono, dal punto di vista dell'Analisi funzionale, completamente diversi, dato che $\mathcal{T}_{t_0}$ soffre, in generale, di una sorta di «discontinuità» quando $t_0 \to -\infty$. Ciò fa sì che:

1) lo spettro di $\mathcal{T}_{t_0}$, che per ogni $t_0 > -\infty$ contiene solo l'elemento $\mu = G(0)$, per $t_0 \doteq -\infty$ può «esplodere» e contenere infiniti punti o, addirittura, tutto un disco del piano complesso.

2) L'operatore $\mathcal{T}_{t_0}$ che, in ipotesi di modesta regolarità per $G'(s)$, è, sostanzialmente, insensibile allo spazio funzionale nel quale si studia l'equazione $\sigma = \mathcal{T}_{t_0}(\epsilon)$, diventa sensibilissimo alla scelta di tale spazio se $t_0 = -\infty$.

Occorre quindi, come faceva Volterra, studiare i problemi ereditari *in intervalli di tempo finiti* e ciò, non in base ad infondate considerazioni di «trascurabilità», ma semplicemente perchè un corpo elastico, antico che possa essere, *non è sempre esistito,* almeno nella configurazione chimico-fisico-geometrica nella quale noi pretendiamo di studiarlo. La Matematica, che è onesta, va sempre d'accordo, se bene usata, con la Natura!

Ma allora, come si descrive il fenomeno del «fading» della memoria? Secondo me, questo va fatto introducendo una funzione continua $f(t)$, la quale è definita per ogni istante $t : t \geq t_0$, è non negativa, ed esprime l'ampiezza dell'intervallo di tempo lungo il quale il sistema materiale «ricorda» la sua storia. Talchè l'operatore $\mathcal{T}_{t_0}$ va sostituito da uno del tipo seguente

$$\mathcal{T}(\epsilon) = g_0 \epsilon(t) + \int_{t-f(t)}^{t} K(t,\tau)\epsilon(\tau)\,d\tau \qquad (t \geq t_0).$$

Ovviamente, la f(t) deve verificare la condizione

$$0 \leq f(t) \leq t - t_0 \qquad (t \geq t_0).$$

Questo significa che l'ampiezza dell'*intervallo di memoria* del corpo non può essere maggiore dell'*età del corpo*, cioè del tempo dal quale il corpo esiste. Alcuni Autori (lo stesso Volterra, sia pure con un fugace accenno ([8] p. 190), A. Green, Rivlin [9], etc.) assumono, talvolta, $f(t) = T$ (T costante positiva assegnata), ma ciò, a meno che non si voglia (Dio liberi!) postulare, per $t_0 \leq t < t_0 + T$, una sorta di metempsicosi dei corpi elastici, appare inaccettabile.

La funzione f(t) è da chiamarsi *tenacia della memoria del corpo.* Se è $f(t) = 0$, il corpo non ha memoria. Se $f(t) = t - t_0$, il corpo ricorda sempre tutto. Se $f(t) > 0$, ma $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$, la memoria è totalmente «fading» (5). È ovvio che tante altre eventualità sono possibili: temporanea assenza di memoria, temporanea memoria totale, temporaneo «fading», etc.

La funzione f(t) è un elemento costitutivo del corpo, che dipende dal materiale di cui esso è fatto, ma anche dalla sua geometria; una lunga e sottile sbarra di un dato materiale è da presumere che avrà una tenacia di memoria diversa da quella di una palla dello stesso materiale.

*In ipotesi di ragionevole regolarità per* $K(t,\tau)$ ma, peraltro, assai generali, l'equazione $\sigma = \mathcal{T}(\epsilon)$ *ha sempre un teorema di esistenza ed unicità.* Essa, in sostanza, si riduce (supposto $g_0 \neq 0$) ad una equazione integrale di Volterra di II specie a nucleo discontinuo, la cui soluzione è una ben determinata funzione continua che non dipende dalla topologia introdotta nello spazio funzionale.

Naturalmente, a $K(t,\tau)$ si possono imporre ulteriori restrizioni del tipo di quelle che vuole Graffi (cfr. [7]), o Ella stessa, o altri, restrizioni che, comunque, non intaccano l'esistenza e l'unicità. Ma a questo punto l'analista non c'entra più.

La teoria, così concepita, può estendersi a situazioni assai più generali (solido elastico anisotropo e non omogeneo tri-dimensionale).

L'impostazione proposta dovrebbe, secondo me, essere appagante; tuttavia mi rendo conto che sopprimere il $-\infty$ e sostituirlo con un $t_0$ finito può urtare la suscettibilità o il gusto di alcuni (in fondo, l'aspirazione all'«eterno» non è la maggiore istanza dell'animo umano?).

(5) In generale, il "fading" della memoria è determinato dal comportamento asintotico di f(t) per $t \to +\infty$.

Volendo, si possono accontentare anche costoro. Ma, allora, la via da seguire è, a mio modesto parere, quella di fare in modo che l'operatore $\mathscr{T}_{t_0}$ non «esploda» per $t_0 = -\infty$ e ci sia la «stabilità dello spettro», cioè questo, anche per $t_0 = -\infty$, sia costituto dal solo punto $\mu = G(0)$ (6). Evidentemente, tale obiettivo può raggiungersi in due modi: a) coloro che, illuminati dalla Grazia, sanno esattamente, nel caso dell'intervallo infinito, qual'è lo spazio funzionale da impiegare, dovranno, allora, caratterizzare tutte le G(s) che abbiano un comportamento asintotico tale da assicurare, in quello spazio, la predetta stabilità; b) coloro che, o dall'oracolo di Delfo, o da qualche Santo, o ... da Coleman e Noll, hanno saputo come G(s) si comporta asintoticamnete, dovranno, invece, caratterizzare tutti gli spazi funzionali nei quali lo spettro di $\mathscr{T}_{t_0}$ si mantiene stabile per $t_0 \to = -\infty$.

Indipendentemente dalla loro rilevanza meccanica, a) e b) costituiscono, indubbiamente, due affascinanti problemi di Analisi funzionale...

## References

[1] B.D. Coleman-W. Noll, *Foundations of Linear Viscoelasticity*, «Rev. of Modern Physics», 33, n. 2, 1961, pp. 239-356.

[2] V. Volterra *Leçons sur les fonctions de lignes*, Gauthier-Villars, Paris, 1913.

[3] M. Fabrizio-A. Morro, *Thermodynamic Restrictions on Relaxation Functions in Linear Viscoelasticity*, «Mech. Res. Comm. V. 12 (2)», 1985, pp. 101-105.

[4] G. Fichera, *On Linear Viscoelasticity*, «Mech. Res. Comm. v. 12 (5)», 1985, pp. 241-242.

[5] G. Fichera, *Avere una memoria tenace crea gravi problemi*, «Arch. Rat. Mech. & Anal.», *70*, n. 2, 1979, pp. 101-102.

[6] G. Fichera, *Sul principio della memoria evanescente*, «Rend. Sem. Mat. Padova», v. 68, 1982, pp. 245-259.

[7] D. Graffi, *On the Fading Memory*, «Applicable Anal.», v. 15, 1983, pp. 295-311.

[8] V. Volterra, *Theory of functionals and of integral and integro-differential equations*, «Dover Publ. Inc.», New York, 1959.

[9] A.E. Green-R.S. Rivlin, *The Mechanics of nonlinear materials with memory*, «Arch. for Rat. Mech. & Anal.», *1*, 1957-58, pp. 1-21.

(6) O, tutt'al più, sia contenuto in un disco di centro G(o) e raggio $\varrho < |G(0)|$.