Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giovambattista Amendola, Adele Manes

Su un particolare vincolo interno superficiale per solidi termoelastici

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **82** (1988), n.2, p. 299–307.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1988_8_82_2_299_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1988.

Atti Acc. Lincei Rend. fis.
(8), LXXXII (1988), pp. 299-307

Fisica matematica. — *Su un particolare vincolo interno superficiale per solidi termoelastici* (*). Nota di GIOVAMBATTISTA AMENDOLA (**) e ADELE MANES (***), presentata (****) dal Corrisp. T. MANACORDA.

ABSTRACT. - *On a surface internal constraint for thermoelastic solids.* In this work we derive the fundamental results which characterize the thermoelastic behaviour in solids, which are defined by very general constitutive equations and are subject to a surface internal constraint. With such a constraint we suppose that the area of any element of the surfaces of a given family does not vary in any motion of the body; moreover we consider the case when this constraint is thermomechanical: in such a case the area can change but its variation is a known function of the temperature.

KEY WORDS: Thermoelasticity; Internal constraint; Surface constraint.

RIASSUNTO. - In questo lavoro si ricavano alcuni risultati fondamentali che caratterizzano il comportamento termoelastico di solidi definiti da equazioni costitutive alquanto generali in presenza di un vincolo interno superficiale. Con tale vincolo si suppone che durante ogni processo esiste una famiglia di superfici la cui dilatazione superficiale è unitaria nel caso di vincolo puramente meccanico, ed è invece una funzione nota della temperatura nell'ipotesi più generale di vincolo termomeccanico.

INTRODUZIONE

Vincoli interni di varia natura sono stati presi in considerazione da vari autori. Tali vincoli, come è noto, costituiscono delle restrizioni per i possibili processi di un solido elastico o termoelastico, quali ad es. la rigidità, l'incomprimibilità, l'inestendibilità in una o più direzioni.

Oltre ai vincoli di natura puramente meccanica, sono stati studiati anche vincoli di tipo termomeccanico e per tali argomenti rimandiamo, ad es., a [7], dove T. Manacorda prende in esame alcuni vincoli interni e dà, in particolare, una generalizzazione del vincolo di inestendibilità esaminando cioè il caso in cui l'inestendibilità in una direzione è una funzione nota della temperatura. Una teoria generale per vincoli

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del C.N.R. con finanziamenti del M.P.I.
(**) Istituto di Matematiche Applicate "U. Dini", Facoltà di Ingegneria, via Diotisalvi, 2, Pisa.
(***) Dipartimento di Matematica, via Buonarroti, 2, Pisa.
(****) Nella seduta del 13 febbraio 1988.

di tipo termomeccanico è svolta nel lavoro di M.E. Gurtin e P. Podio Guidugli [5]. Si veda anche [6], [8], [11], [12].

In questa nota si introduce un nuovo vincolo di tipo meccanico e si esamina anche una sua generalizzazione che porta ad un vincolo di tipo termomeccanico. Si tratta di un vincolo superficiale, in base al quale si ammette che durante ogni processo di un solido termoelastico esiste una famiglia di superfici la cui dilazione superficiale è unitaria nel caso di vincolo puramente meccanico, è invece una funzione nota della temperatura nel caso più generale di vincolo termomeccanico.

In questa sede ci si limita a considerare questi due vincoli ricavando in entrambi i casi le relazioni fondamentali che caratterizzano il comportamento termoelastico di tali solidi; si rimanda a lavori successivi per applicazioni di tali risultati.

Preliminari

Sia C_0 una configurazione di riferimento per un solido termoelastico $\mathcal{C}$ che al tempo t occupa la configurazione C; riferiamo entrambe le configurazioni ad un comune sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Rispetto a tale sistema siano $\mathbf{X}$ e $\mathbf{x}$ le posizioni assunte dalla stessa particella di $\mathcal{C}$ nelle due configurazioni rispettivamente.

Risulta pertanto definito il gradiente di deformazione

$$\mathbf{F} = \mathrm{grad}_{\mathbf{X}}\mathbf{x} \qquad \text{con} \qquad J = \det \mathbf{F} > 0 \tag{2.1}$$

e quindi il tensore di deformazione di Cauchy-Green

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}, \tag{2.2}$$

legato al tensore di deformazione $\mathbf{E}$ dalla relazione

$$\mathbf{C} = \mathbf{1} + 2\mathbf{E}. \tag{2.3}$$

Sia Σ una superficie regolare in C_0, indichiamo con $\boldsymbol{\nu}_\Sigma$ la normale in ogni suo punto; a Σ corrisponde in C una regione σ dotata in ogni suo punto di normale unica $\boldsymbol{\nu}_\sigma$ con verso tale che $\boldsymbol{\nu}_\sigma$ formi un angolo acuto con il vettore corrispondente in C a $\boldsymbol{\nu}_\Sigma$; in tale situazione sussiste la seguente relazione [3]

$$\boldsymbol{\nu}_\sigma \mathrm{d}\sigma = J(\mathbf{F}^T)^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma \mathrm{d}\Sigma. \tag{2.4}$$

La dilatazione superficiale nel punto $\mathbf{X}$ di Σ è uno scalare definito da

$$\delta_\Sigma = \mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Sigma; \tag{2.5}$$

d'altra parte la (2.4) implica

(2.6) $$(d\sigma)^2 = J^2 \boldsymbol{\nu}_\Sigma \cdot \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{F}^T)^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma (d\Sigma)^2,$$

per cui la (2.5) assume la seguente forma [v. (2.2), $(2.1)_2$]

(2.7) $$\delta_\Sigma = J(\boldsymbol{\nu}_\Sigma \cdot \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma)^{\frac{1}{2}}.$$

Ricordiamo che tra il tensore degli sforzi di Cauchy $\mathbf{T}$, il primo ed il secondo tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff $\mathbf{T}_K$ e $\mathbf{T}_0$ sussistono le seguenti relazioni [2]

(2.8) $$\mathbf{T}_K = \mathbf{F}\mathbf{T}_0 = J\mathbf{T}(\mathbf{F}^T)^{-1}.$$

Riportiamo inoltre la formulazione locale del primo e del secondo principio della termodinamica [3]

(2.9) $$\varrho\dot{\epsilon} = w + \mathrm{div}_x\mathbf{q} + \varrho s \quad \text{e} \quad \varrho(\dot{\psi} + \eta\dot{\theta}) - w - \mathbf{q}\cdot\mathbf{g}/\theta \leq 0$$

e quella referenziale, riferita cioè a C_0,

(2.10) $$\varrho_0\dot{\epsilon} = w_0 + \mathrm{div}_X\mathbf{Q} + \varrho_0 s \quad \text{e} \quad \varrho_0(\dot{\psi} + \eta\dot{\theta}) - w_0 - \mathbf{Q}\cdot\mathbf{G}/\theta \leq 0,$$

dove ϱ (ϱ_0) è la densità materiale in C (C_0), s sono le sorgenti termiche, θ è la temperatura in C, q il flusso di calore, ϵ l'energia interna, η l'entropia, $\psi = \epsilon - \eta\theta$ l'energia libera,

(2.11) $$\mathbf{G} = \mathrm{grad}_X\theta = \mathbf{F}^T\mathrm{grad}_x\theta = \mathbf{F}^T\mathbf{g},$$

inoltre w e w_0 sono la potenza degli sforzi in C e C_0 rispettivamente

(2.12) $$w = \mathbf{T}(\mathbf{F}^{-1})^T\cdot\dot{\mathbf{F}} \quad \text{e} \quad w_0 = \mathbf{T}_0\cdot\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}\mathbf{T}_0\cdot\dot{\mathbf{C}},$$

inoltre il flusso di calore referenziale $\mathbf{Q}$ è dato da

(2.13) $$\mathbf{Q} = J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{q}.$$

L'equazione di moto di $\mathcal{C}$ riferita a C e a C_0 si scrive rispettivamente

(2.14) $$\mathrm{div}_x\mathbf{T} + \varrho\mathbf{b} = \varrho\ddot{\mathbf{x}} \quad \text{e} \quad \mathrm{div}_X\mathbf{T}_K + \varrho_0\mathbf{b} = \varrho_0\ddot{\mathbf{x}},$$

dove $\mathbf{b}$ sono le forze di massa.

Si ha inoltre

(2.15) $$\varrho J = \varrho_0.$$

EQUAZIONI COSTITUTIVE E CARATTERIZZAZIONE DEL VINCOLO INTERNO

Per stabilire in modo completo il comportamento termoelastico del solido $\mathcal{C}$, dobbiamo fissare per esso le equazioni costitutive. A tale scopo supponiamo che i valori dell'energia libera, dell'entropia, del tensore degli sforzi e del flusso di calore siano noti in ogni punto del corpo quando lo siano il gradiente di deformazione, il gradiente di temperatura, la temperatura e cioè che valgano per tali grandezze le seguenti relazioni

$$(3.1) \qquad \begin{aligned} \psi &= \tilde{\psi}(\mathbf{F}, \mathbf{g}, \theta; \theta_0, \mathbf{X}), & \eta &= \tilde{\eta}(\mathbf{F}, \mathbf{g}, \theta; \theta_0, \mathbf{X}), \\ \mathbf{T} &= \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{F}, \mathbf{g}, \theta; \theta_0, \mathbf{X}), & \mathbf{q} &= \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{F}, \mathbf{g}, \theta; \theta_0, \mathbf{X}), \end{aligned}$$

dove si è ammessa anche la dipendenza esplicita dal posto e dalla temperatura θ_0 della prefissata configurazione di riferimento C_0.

Supponiamo inoltre che esista un vincolo interno superficiale per il solido termoelastico $\mathcal{C}$, vincolo che può essere di tipo meccanico o termomeccanico nel senso che ora preciseremo.

Ammettiamo dapprima che esista una famiglia $\mathcal{F}$ di superfici regolari Σ, densa in C_0, tali che l'area di ogni elemento superficiale di Σ conservi inalterato il suo valore nella trasformazione $C_0 \to C$. Tenendo presente l'espressione della dilatazione superficiale (2.7), detta condizione di inestendibilità superficiale viene espressa dalla seguente relazione

$$(3.2) \qquad J^2 \boldsymbol{\nu}_\Sigma \cdot \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\nu}_\Sigma = 1,$$

valida per ogni punto di $\Sigma \in \mathcal{F}$.

Tale vincolo interno di tipo meccanico può essere facilmente generalizzato ammettendo che la dilatazione superficiale δ_Σ sia una funzione nota della temperatura, pervenendo così al seguente vincolo interno di tipo termomeccanico

$$(3.3) \qquad \delta_\Sigma^2 = f(\theta; \theta_0, \mathbf{X}) \quad \text{con} \quad f(\theta_0; \theta_0, \mathbf{X}) = 1,$$

che, in base alle (2.7), si scrive nella forma seguente

$$(3.4) \qquad J^2 \boldsymbol{\nu}_\Sigma \cdot \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\nu}_\Sigma = f(\theta; \theta_0, \mathbf{X}), \qquad f(\theta_0; \theta_0, \mathbf{X}) = 1,$$

dove a priori non è esclusa la dipendenza esplicita dal posto e da θ_0.

Esamineremo nel seguito questi due vincoli separatamente.

Osserviamo però fin da ora che, data la particolare forma del vincolo (3.2) o (3.4), anche per i solidi termoelastici in esame la dipendenza da $\mathbf{g}$ nelle equazioni costitutive $(3.1)_{1,2,3}$ viene eliminata imponendo che le (3.1) verifichino il secondo principio della termodinamica, cioè la $(2.9)_2$, per ogni trasfromazione termoelastica, che ovviamente sia compatibile con le $(2.9)_1$ e $(2.14)_1$, e tenendo conto del vincolo (3.2) o (3.4) come sarà fatto in seguito.

D'altra parte, tenendo conto del principio di obiettività, è possibile dare alle (3.1) una forma diversa (v.[9]); assumiamo pertanto per l'energia libera ed il flusso di calore le seguenti relazioni costitutive

$$\psi = \hat{\psi}\,(\mathbf{E}, \theta; \theta_0, \mathbf{X}), \qquad \mathbf{q} = \mathrm{J}^{-1}\mathbf{F}\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{E}, \mathbf{G}, \theta; \theta_0, \mathbf{X}) \tag{3.5}$$

mentre le equazioni costitutive di $\mathbf{T}$ ed η saranno ricavate in seguito in funzione di (3.5) e del vincolo (3.2) o (3.4) separatamente.

Osserviamo infine che in entrambi i casi con l'equazione di moto, ad es. nella forma $(2.14)_2$, va considerata l'equazione del calore che, in base alle (2.10) e alle considerazioni relative [8], si può porre nella forma referenziale

$$\varrho_0 \theta \dot{\eta} = \mathrm{div}_{\mathrm{X}} \mathrm{Q} + \varrho_0 \mathrm{s}. \tag{3.6}$$

VINCOLO DI TIPO MECCANICO

Cominciamo ad esaminare il vincolo espresso dalla (3.2), che in base alle (2.1) e (2.2) si può scrivere nella forma

$$\mathrm{III}_{\mathrm{C}}\, \boldsymbol{\nu}_\Sigma \cdot \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\nu}_\Sigma = 1. \tag{4.1}$$

Tale relazione, lungo ogni processo del solido termoelastico, vale identicamente rispetto al tempo, per cui si ha anche

$$\dot{\overline{\mathrm{III}_{\mathrm{C}}}}\, \boldsymbol{\nu}_\Sigma \cdot \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\nu}_\Sigma + \mathrm{J}^2 \boldsymbol{\nu}_\Sigma \cdot \dot{\overline{\mathbf{C}^{-1}}}\, \boldsymbol{\nu}_\Sigma = 0. \tag{4.2}$$

In questa è

$$\dot{\overline{\mathrm{III}_{\mathrm{C}}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{III}_{\mathrm{C}}}{\partial \mathrm{C}_{\mathrm{HK}}} + \frac{\partial \mathrm{III}_{\mathrm{C}}}{\partial \mathrm{C}_{\mathrm{KH}}}\right) \dot{\mathrm{C}}_{\mathrm{HK}} = \mathrm{J} \boldsymbol{\chi} \cdot \dot{\mathbf{C}}, \tag{4.3}$$

dove il tensore

$$\boldsymbol{\chi} = \left\| \frac{1}{2\mathrm{J}} \left(\frac{\partial \mathrm{III}_{\mathrm{C}}}{\partial \mathrm{C}_{\mathrm{HK}}} + \frac{\partial \mathrm{III}_{\mathrm{C}}}{\partial \mathrm{C}_{\mathrm{KH}}}\right) \right\| = \boldsymbol{\chi}^{\mathrm{T}}, \tag{4.4}$$

avendo per componenti i complementi algebrici degli elementi della matrice di $\mathbf{C}$ divisi per J per cui si ha

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\chi}^{\mathrm{T}} = \mathrm{J}\mathbf{1}, \tag{4.5}$$

assume la seguente espressione

$$\chi = JC^{-1}; \tag{4.6}$$

in definitiva si ricava che

$$\dot{\overline{\mathrm{III}}}_C = J^2 C^{-1} \cdot \dot{C}. \tag{4.7}$$

Il calcolo della derivata rispetto al tempo di C^{-1} si ricava facilmente derivando rispetto al tempo l'identità

$$CC^{-1} = 1 \tag{4.8}$$

cioè

$$C\dot{\overline{C^{-1}}} = -\dot{C}C^{-1} \tag{4.9}$$

da cui si ha

$$\dot{\overline{C^{-1}}} = -C^{-1}\dot{C}C^{-1}. \tag{4.10}$$

La (4.2), dopo aver sostituito in essa le espressioni (4.7) e (4.10), tenendo presente la (4.1), si scrive nella forma seguente

$$\dot{C} \cdot C^{-1} - J^2 C^{-1} \boldsymbol{\nu}_\Sigma \cdot \dot{C} C^{-1} \boldsymbol{\nu}_\Sigma = 0. \tag{4.11}$$

D'altra parte ricordando che per ogni tensore **S** e per ogni coppia di vettori **a** e **b** si ha [4]

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{S}\mathbf{b} = \mathbf{S} \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}), \tag{4.12}$$

la (4.11) assume la seguente forma

$$\dot{C} \cdot (C^{-1} - J^2 C^{-1} \boldsymbol{\nu}_\Sigma \otimes C^{-1} \boldsymbol{\nu}_\Sigma) = 0. \tag{4.13}$$

Accanto a questa relazione, per il solido termoelastico $\mathcal{C}$ vale anche la $(2.10)_2$ con ψ e **q** date dalle (3.5). La contemporanea validità di queste due relazioni porta alla seguente disequazione [v.$(2.12)_2$]

$$[\varrho_0 \partial_E \hat{\psi} - T_0 - p(C^{-1} - J^2 C^{-1} \boldsymbol{\nu}_\Sigma \otimes C^{-1} \boldsymbol{\nu}_\Sigma)] \cdot \dot{C}/2 + \varrho_0(\partial_\theta \hat{\psi} + \eta)\dot{\theta} - Q \cdot G/\theta \leq 0, \tag{4.14}$$

ottenuta sommando alla $(2.10)_2$ la (4.13) dopo averla moltiplicata per p/2, parametro lagrangiano; tale disequazione deve valere per ogni $\dot{C}$ e per ogni $\dot{\theta}$ e quindi si ha

$$T_0 = \varrho_0 \partial_E \hat{\psi} - p(C^{-1} - J^2 C^{-1} \boldsymbol{\nu}_\Sigma \otimes C^{-1} \boldsymbol{\nu}_\Sigma), \qquad \eta = -\partial_\theta \hat{\psi} \tag{4.15}$$

e

$$Q \cdot G \geq 0. \tag{4.16}$$

Nota l'espressione del tensore lagrangiano degli sforzi $\mathbf{T}_0$, in base alla $(2.8)_1$ si può ricavare quella di $\mathbf{T}_K$. Tenendo presente che [v. (2.2)].

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{F}^T)^{-1} \tag{4.17}$$

e che

$$\mathbf{F}(\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma \otimes \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma)\mathbf{a} = (\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma \cdot \mathbf{a})\mathbf{F}\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma = [(\mathbf{F}^T)^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma \otimes \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma]\mathbf{a} \quad \forall \text{ vettore } \mathbf{a}, \tag{4.18}$$

si ottiene

$$\mathbf{T}_K = \varrho_0 \mathbf{F}\partial_E \hat{\psi} - p[(\mathbf{F}^T)^{-1} - J^2(\mathbf{F}^T)^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma \otimes \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma]. \tag{4.19}$$

Infine, sempre dalle (2.8), si ricava l'espressione del tensore degli sforzi di Cauchy $\mathbf{T}$, per il quale, essendo [v.(4.17)]

$$\begin{aligned} [\mathbf{F}(\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma \otimes \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma)\mathbf{F}^T]\mathbf{a} &= (\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma \cdot \mathbf{F}^T\mathbf{a})\mathbf{F}\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma = [(\mathbf{F}^T)^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma \cdot \mathbf{a}]\,(\mathbf{F}^T)^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma = \\ &= [(\mathbf{F}^T)^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma \otimes (\mathbf{F}^T)^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma]\mathbf{a} \qquad \forall \text{ vettore } \mathbf{a}, \end{aligned} \tag{4.20}$$

si ha [v.(2.15)]

$$\mathbf{T} = J^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T}_0\mathbf{F}^T = \varrho \mathbf{F}\partial_E \hat{\psi}\mathbf{F}^T - pJ^{-1}[\mathbf{1} - J^2(\mathbf{F}^T)^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma \otimes (\mathbf{F}^T)^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma]. \tag{4.21}$$

VINCOLO DI TIPO TERMOMECCANICO

Passiamo ora ad esaminare il vincolo termomeccanico (3.4) e cioè

$$\mathrm{III}_C \boldsymbol{\nu}_\Sigma \cdot \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma = f(\theta; \theta_0, \mathbf{X}), \tag{5.1}$$

che, come la (4.1), vale identicamente rispetto al tempo lungo ogni processo di $\mathcal{C}$ per cui si ricava che

$$\dot{\overline{\mathrm{III}_C}}\, \boldsymbol{\nu}_\Sigma \cdot \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma + J^2 \boldsymbol{\nu}_\Sigma \cdot \dot{\overline{\mathbf{C}^{-1}}}\,\boldsymbol{\nu}_\Sigma = f_\theta \dot{\theta}, \tag{5.2}$$

dove

$$f_\theta = \partial_\theta f(\theta; \theta_0, \mathbf{X}). \tag{5.3}$$

Sostituendo in questa le espressioni già calcolate nella precedente sezione e cioè (4.7) e (4.10) e tenendo conto anche del vincolo (5.1), si ha

$$\dot{\mathbf{C}} \cdot [f(\theta; \theta_0, \mathbf{X})\mathbf{C}^{-1} - J^2\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma \otimes \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma] - f_\theta \dot{\theta} = 0. \tag{5.4}$$

Pertanto l'analoga della (4.14) assume la forma

$$\{\varrho_0 \partial_E \hat{\psi} - \mathbf{T}_0 - p[f(\theta;\theta_0,\mathbf{X})\mathbf{C}^{-1} - J^2\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma \otimes \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma]\}\cdot \dot{\mathbf{C}}/2 + \tag{5.5}$$

$$+ [\varrho_0(\partial_\theta \hat{\psi} + \eta) + \frac{p}{2} f_\theta]\dot{\theta} - \mathbf{Q}\cdot\mathbf{G}/\theta \leq 0,$$

dalla quale con il solito ragionamento segue che

$$\mathbf{T}_0 = \varrho_0 \partial_E \hat{\psi} - p[f(\theta;\theta_0,\mathbf{X})\mathbf{C}^{-1} - J^2\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma \otimes \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma], \quad \eta = -\partial_\theta \hat{\psi} - \frac{p}{2\varrho_0} f_\theta \tag{5.6}$$

e ancora

$$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{G} \geq 0. \tag{5.7}$$

Osserviamo che, in virtù del vincolo (5.1), dalla $(5.6)_1$ si ha anche

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_0 &= \varrho_0 \partial_E \hat{\psi} - p[f(\theta;\theta_0,\mathbf{X})\mathbf{1} - J^2\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma \otimes \boldsymbol{\nu}_\Sigma]\mathbf{C}^{-1} = \\ &= \varrho_0 \partial_E \hat{\psi} - pJ^2[\boldsymbol{\nu}_\Sigma \cdot \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma \mathbf{1} - \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma \otimes \boldsymbol{\nu}_\Sigma]\mathbf{C}^{-1} \end{aligned} \tag{5.8}$$

essendo

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma \otimes \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma)\mathbf{a} &= (\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma \cdot \mathbf{a})\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma = (\boldsymbol{\nu}_\Sigma \cdot \mathbf{C}^{-1}\mathbf{a})\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma = \\ &= (\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma \otimes \boldsymbol{\nu}_\Sigma)\mathbf{C}^{-1}\mathbf{a} \qquad \forall \text{ vettore } \mathbf{a}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Sempre dalla $(5.6)_1$, tenendo presenti le (2.8), (4.17) e (4.18), segue che

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_K &= \varrho_0 \mathbf{F} \partial_E \hat{\psi} - p[f(\theta;\theta_0,\mathbf{X})(\mathbf{F}^T)^{-1} - J^2(\mathbf{F}^T)^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma \otimes \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma] = \\ &= \varrho_0 \mathbf{F} \partial_E \hat{\psi} - p(\mathbf{F}^T)^{-1}[f(\theta;\theta_0,\mathbf{X})\mathbf{1} - J^2\boldsymbol{\nu}_\Sigma \otimes \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma] = \\ &= \varrho_0 \mathbf{F} \partial_E \hat{\psi} - pJ^2(\mathbf{F}^T)^{-1}[\boldsymbol{\nu}_\Sigma \cdot \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma \mathbf{1} - \boldsymbol{\nu}_\Sigma \otimes \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma] \end{aligned} \tag{5.10}$$

essendo

$$\begin{aligned} [(\mathbf{F}^T)^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma \otimes \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma]\mathbf{a} &= (\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma \cdot \mathbf{a})(\mathbf{F}^T)^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma = (\mathbf{F}^T)^{-1}[\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma \cdot \mathbf{a})\boldsymbol{\nu}_\Sigma] = \\ &= (\mathbf{F}^T)^{-1}(\boldsymbol{\nu}_\Sigma \otimes \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma)\mathbf{a} \qquad \forall \text{ vettore } \mathbf{a}; \end{aligned} \tag{5.11}$$

inoltre, tenendo conto delle $(4.21)_1$, (2.15), (4.17), (4.20) e (5.1), si ricava

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \varrho \mathbf{F} \partial_E \hat{\psi} \mathbf{F}^T - pJ^{-1}[f(\theta;\theta_0,\mathbf{X})\mathbf{1} - J^2(\mathbf{F}^T)^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma \otimes (\mathbf{F}^T)^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma] = \\ &= \varrho \mathbf{F} \partial_E \hat{\psi} \mathbf{F}^T - pJ[\boldsymbol{\nu}_\Sigma \cdot \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma \mathbf{1} - (\mathbf{F}^T)^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma \otimes (\mathbf{F}^T)^{-1}\boldsymbol{\nu}_\Sigma]. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Osserviamo infine che le equazioni della termoelasticità possono ormai essere scritte facilmente sia nel caso del vincolo meccanico (Sez. 4) che nel caso di quello termomeccanico (Sez. 5); basta infatti ricorrere a tale scopo alla $(2.14)_2$ e (3.6), ma non riportiamo qui tali equazioni e rimandiamo a successive note per applicazioni dei risultati ottenuti.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. TRUESDELL and R. TOUPIN, The classical field theory, in Handbuch der Physik, Bd.III/1, Springer-Verlag, Berlin, 1960.
[2] C. TRUESDELL and W. NOLL, The non-linear field theories of mechanics, in Handbuch der Physik, Bd.III/3, Springer-Verlag, Berlin 1965.
[3] C. TRUESDELL, The elements of continuum mechanics, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
[4] M.E. GURTIN, The linear theory of elasticity, in Handbuch der Physik, Bd.VI/a2, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
[5] M.E. GURTIN and P. PODIO GUIDUGLI, The thermodynamics of constrained materials, Arch. Ration. Mech. Anal., *51* (1973), 192-208.
[6] T. MANACORDA, Un'osservazione al riguardo di vincoli interni in un solido, Riv. Mat. Univ. Parma, (3), *3* (1974), 169-174.
[7] T. MANACORDA, Introduzione alla termomeccanica dei continui, Quad. Un. Mat. Ital., *14*, Pitagora, Bologna, 1979.
[8] G. AMENDOLA, A general theory of thermoelastic solids restrained by an internal thermomechanical constraint, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, XXVII (1978), 1-14.
[9] G. AMENDOLA and T. MANACORDA, Piccole deformazioni termoelastiche sovrapposte ad una deformazione termostatica finita, Riv. Mat. Univ. Parma, (4), *6* (1979), 1-15.
[10] C. TRUESDELL, Rational Thermodynamics, second edition, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
[11] G. CAPRIZ and P. PODIO GUIDUGLI, Internal constraints, 159-170, in: C. Truesdell, Rational Thermodynamics, 2th Edition, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
[12] T. MANACORDA, Solidi con vincoli interni dipendenti dalla temperatura, Scritti per Lucio Lazzarino, Pacini Editore, Pisa, 1986.