Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giorgio Vergara Caffarelli, Epifanio G. Virga

Sull'unicità della soluzione del problema dinamico della viscoelasticità lineare

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **81** (1987), n.4, p. 379–387.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1987_8_81_4_379_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1987.

Atti Acc. Lincei Rend. fis.
(8), LXXXI (1987), pp. 379-387

Fisica matematica. — *Sull'unicità della soluzione del problema dinamico della viscoelasticità lineare.* Nota di GIORGIO VERGARA CAFFARELLI e EPIFANIO G. VIRGA, presentata (*) dal Corrisp. T. MANACORDA.

ABSTRACT. — *A uniqueness theorem in linear viscoelasticity.* We prove that the dynamic problem of linear viscoelasticity has a unique weak solution. We assume neither that the quasi-static approximation holds, nor that the past history of the displacement is known. We require the instantaneous elastic response to be greater than a value depending on the memory of the material and the asymtotic behaviour in the past of the admissible solutions.

KEY WORDS: Linear viscoelasticity; Equation of motion; Uniqueness theorem.

RIASSUNTO. — Si dimostra che il problema dinamico della viscoelasticità lineare ha un'unica soluzione debole. Non si suppone che valga l'approssimazione quasi-statica, né che sia nota la storia passata dello spostamento. Si richiede, invece, che il modulo di elasticità istantaneo sia più grande di un valore critico che dipende dalla memoria del materiale e dal comportamento nel remoto passato prescritto alle soluzioni.

In lavori ormai classici [1], [2], il Professor Fichera ha tra l'altro messo in luce come il problema dinamico della viscoelasticità lineare nell'approssimazione quasi-statica possa non avere una sola soluzione quando, in contrasto con la tradizione (*v. ad es.* [3]), non sia assegnata la storia passata dello spostamento.

Anche fuori dall'approssimazione quasi-statica si presentano casi di non unicità della soluzione, che sono compatibili sia con condizioni di evanescenza della memoria che con condizioni asintotiche nel passato per lo spostamento e la velocità che ne richiedono la decrescenza almeno esponenziale [4]. L'unicità della soluzione regolare resta, invece, dimostrata qualora oltre a queste condizioni asintotiche si supponga che il modulo di elasticità istantaneo sia sufficientemente più grande del contributo di memoria [5].

Una condizione di questo tipo era emersa con il ruolo di disuguaglianza di coercitività nello studio dell'esistenza di soluzioni deboli del problema dinamico [6] (*v. anche* [7]). In quello studio le condizioni asintotiche nel passato erano sostituite dal richiedere che la soluzione appartenesse ad un opportuno spazio di Sobolev con peso esponenziale. Qui dimostriamo l'unicità della soluzione debole, nell'ipotesi che il peso esponenziale sia divergente nel passato,

(*) Nella seduta del 19 giugno 1987.

ed il modulo di elasticità istantaneo sia maggiore di un valore dipendente dalla funzione di memoria e dall'andamento asintotico nel passato delle soluzioni ammesse.

L'equazione unidimensionale di moto della viscoelasticità lineare per un corpo omogeneo soggetto a forze di massa di densità ρf si scrive

$$(1) \qquad -\rho u_{tt}(x,t) + \mathrm{G}(0)\, u_{xx}(x,t) + \int_0^{+\infty} \dot{\mathrm{G}}(s)\, u_{xx}(x, t-s)\, ds = $$
$$= \rho f(x,t),$$

dove $\mathrm{G}(s)$, la funzione di rilassamento degli sforzi, è positiva, limitata e di classe $\mathrm{C}^2([0, +\infty))$. Supporremo che la variabile spaziale x appartenga all'intervallo $[0, l]$, mentre la variabile temporale t percorre la semiretta $(-\infty, 0)$, il cui estremo superiore è scelto coincidente con l'origine solo per semplicità. Studieremo l'equazione (1) nella semistriscia

$$\mathrm{S} = \{(x,t) \mid x \in (0, l),\ t \in (-\infty, 0)\}.$$

Supponiamo che $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{S})$; accetteremo la seguente definizione di soluzione debole di (1).

DEFINIZIONE. *La funzione* $u \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{S})$ *è soluzione debole dell'equazione* (1), *se la funzione* $(x,t) \mapsto \int_0^{+\infty} \dot{\mathrm{G}}(s)\, u(x, t-s)\, ds$ *è in* $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{S})$, *e se*

$$(2) \qquad \iint_{\mathrm{S}} \left\{ -\rho u\, \phi_{tt} + \left[\mathrm{G}(0)\, u + \int_0^{+\infty} \dot{\mathrm{G}}(s)\, u(x, t-s)\, ds \right] \phi_{xx} \right\} dx\, dt =$$
$$= \rho \iint_{\mathrm{S}} f\phi\, dx\, dt,$$

per ogni $\phi \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{S})$.

Nei problemi dinamici ordinari il moto è individuato, oltre che da opportune condizioni al bordo, anche dai valori iniziali dello spostamento e della velocità. Nel problema in esame occorre sostituire alle condizioni iniziali delle condizioni asintotiche per $t \to -\infty$. Per il problema omogeneo noi rifletteremo queste condizioni e le condizioni di spostamento al bordo,

$$(3) \qquad u(0, t) = u(l, t) = 0 \text{ per ogni } t \leqq 0,$$

sulla scelta dello spazio funzionale in cui ambientare il problema.

Introduciamo la classe di funzioni regolari

$$W_\varepsilon = \Big\{ u \in C^\infty(\bar{S}) \mid u(0,t) = u(l,t) = 0 \qquad \forall\, t \leqq 0\,,$$

$$\iint_S (|u_x|^2 + |u_t|^2)\, e^{-\varepsilon t}\, dx\, dt < +\infty \Big\}$$

con $\varepsilon > 0$, e sia H_ε lo spazio di Hilbert generato per completamento di W_ε rispetto alla norma

$$\| u \|_\varepsilon = \left(\iint_S (|u_x|^2 + |u_t|^2)\, e^{-\varepsilon t}\, dx\, dt \right)^{1/2}$$

Per ogni $\varepsilon > 0$, H_ε è incluso nello spazio di Sobolev $H^{1,2}(S)$.

Se $u \in H_\varepsilon$, si prova facilmente che non solo

$$\iint_S |u_t|^2\, e^{-\varepsilon t}\, dx\, dt < +\infty\,, \tag{4}$$

ma anche

$$\iint_S |u|^2\, e^{-\varepsilon t}\, dx\, dt < +\infty\,. \tag{5}$$

La convergenza di questi integrali può essere interpretata come una richiesta di « affievolimento » nel remoto passato per u e u_t.

Non cercheremo in H_ε le soluzioni deboli di (1); vi cercheremo piuttosto le funzioni per cui due soluzioni possono differire, quando è assegnata $f \in L^1_{loc}(S)$. Mostreremo che, in opportune ipotesi, vi si trova solo la funzione identicamente nulla.

Per farne uso nel seguito, introduciamo adesso anche gli spazi di Hilbert

$$L_\varepsilon(-\infty, 0) = \{ v \in L^2(-\infty, 0) \mid \int_{-\infty}^{0} |v(t)|^2\, e^{-\varepsilon t}\, dt < +\infty \}\,,$$

$$L_\varepsilon(0, +\infty) = \{ g \in L^2(0, +\infty) \mid \int_{0}^{+\infty} |g(s)|^2\, e^{-\varepsilon s}\, ds < +\infty \}\,,$$

con le rispettive norme

$$\| v \|_{-,\varepsilon} = \left(\int_{-\infty}^{0} | v(t) |^2 e^{-\varepsilon t} \, dt \right)^{1/2} ,$$

$$\| g \|_{+,\varepsilon} = \left(\int_{0}^{+\infty} | g(s) |^2 e^{-\varepsilon s} \, ds \right)^{1/2} .$$

Se $g \in L^2(0, +\infty)$, e $\| g \|_2$ è la sua norma, subito risulta

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \| g \|_{+,\varepsilon} = \| g \|_2 . \tag{6}$$

Dimostreremo il seguente teorema.

TEOREMA. *Se* $\dot{G}$, $\ddot{G} \in L^2(0, +\infty)$ *e*

$$G(0) > \frac{2}{\varepsilon} \, | \dot{G}(0) | + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \| \dot{G} \|_2 + \frac{2}{\varepsilon \sqrt{\varepsilon}} \| \ddot{G} \|_2 \tag{7}$$

per qualche $\varepsilon > 0$, *allora per ogni coppia* u_1, u_2 *di soluzioni deboli dell'equazione* (1) *tali che* $u_1 - u_2 \in H_\varepsilon$ *risulta* $u_1 \equiv u_2$.

OSSERVAZIONE. — La disuguaglianza (7) richiede che la risposta elastica istantanea del corpo prevalga sulla risposta ereditaria in una misura che dipende tramite ε dal comportamento ammesso nel remoto passato per la differenza di due soluzioni. Ad esempio, se per la soluzione di (1) è prescritta la storia sino all'istante $t_0 < 0$, ogni coppia u_1, u_2 di soluzioni soddisfa a $u_1 = u_2$ per $t \leqq t_0$, così che $u_1 - u_2 \in H_\varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$. L'ipotesi (7) è verificata per un opportuno valore di ε, poiché $G(0) > 0$, e dal Teorema segue che $u_1 \equiv u_2$.

La dimostrazione del Teorema sarà preceduta da due lemmi. Il primo stabilisce alcune proprietà delle funzioni di $L_\varepsilon(-\infty, 0)$ ed il secondo estende a questo spazio un risultato elementare per le equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine.

LEMMA 1. *Sia* v *una funzione di* $L_\varepsilon(-\infty, 0)$ *e* $\dot{v}$ *la sua derivata debole. Se* $\dot{v} \in L_\varepsilon(-\infty, 0)$, $g_1 \in L^2(0, +\infty)$ *e* $g_2 \in L^\infty(0, +\infty)$, *allora le funzioni*

$$h_i(t) = \int_{0}^{+\infty} g_i(s) \, v(t-s) \, ds , \qquad i = 1, 2 \tag{8}$$

appartengono a $L_\varepsilon(-\infty, 0) \cap C^0(-\infty, 0)$ *e soddisfano rispettivamente a*

$$\| h_1 \|_{-,\varepsilon} \leqq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \| g_1 \|_2 \| v \|_{-,\varepsilon}, \tag{9}$$

$$\| h_2 \|_{-,\varepsilon} \leqq \frac{2}{\varepsilon} \| g_2 \|_\infty \| v \|_{-,\varepsilon}. \tag{10}$$

Dimostrazione. Per ogni $\upsilon \in (0, 1)$ si ha

$$\begin{aligned} | h_1(t) | &\leqq \int_0^{+\infty} g_1(s) e^{-\frac{\upsilon}{2}\varepsilon s} | v(t-s) | e^{\frac{\upsilon}{2}\varepsilon s} ds \leqq \\ &\leqq \| g_1 \|_{+,\upsilon\varepsilon} \left(e^{\upsilon\varepsilon t} \int_{-\infty}^{t} | v(\tau) |^2 e^{-\upsilon\varepsilon\tau} d\tau \right)^{1/2}, \end{aligned} \tag{11}$$

per ogni $t \in (-\infty, 0)$, dove si è fatto uso della disuguaglianza di Hölder. Da (11), applicando il Teorema di Fubini-Tonelli, si ottiene

$$\begin{aligned} \| h_1 \|_{-,\varepsilon} &\leqq \| g_1 \|_{+,\upsilon\varepsilon} \left[\int_{-\infty}^{0} | v(\tau) |^2 e^{-\upsilon\varepsilon\tau} \left(\int_{\tau}^{0} e^{(\upsilon-1)\varepsilon t} dt \right) d\tau \right]^{1/2} = \\ &= \| g_1 \|_{+,\upsilon\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{(1-\upsilon)\varepsilon}} (\| v \|^2_{-,\varepsilon} - \| v \|^2_{-,\upsilon\varepsilon})^{1/2} \leqq \\ &\leqq \| g_1 \|_{+,\upsilon\varepsilon} \frac{\| v \|_{-,\varepsilon}}{\sqrt{(1-\upsilon)\varepsilon}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Quando $\upsilon \to 0^+$, per la (6), dalla (12) si perviene alla (9). La deduzione di (10) si sviluppa in modo analogo. La (11) è sostituita dalla disuguaglianza

$$| h_2(t) | \leqq \| g_2 \|_\infty \frac{1}{\sqrt{\upsilon\varepsilon}} \left(e^{\upsilon\varepsilon t} \int_{-\infty}^{t} | v(\tau) |^2 e^{-\upsilon\varepsilon\tau} d\tau \right)^{1/2},$$

e la (12) da

$$\| h_2 \|_{-,\varepsilon} \leqq \| g_2 \|_\infty \frac{\| v \|_{-,\varepsilon}}{\varepsilon \sqrt{\upsilon(1-\upsilon)}},$$

che dà la (10) quando si pone $\upsilon = 1/2$. Quanto alla continuità delle funzioni h_i, essa si prova osservando che per $t'-s$, $t''-s \in (-\infty, 0)$ risulta

$$| v(t''-s) - v(t'-s) | = \left| \int_{t'-s}^{t''-s} \dot{v}(\tau)\, d\tau \right| \leqq \| \dot{v} \|_{-,\varepsilon} \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{2}s}}{\sqrt{\varepsilon}} |e^{\varepsilon t''} - e^{\varepsilon t'}|^{1/2},$$

da cui segue

$$| h_i(t'') - h_i(t') | \leqq \int_0^{+\infty} | g_i(s) | \, | v(t''-s) - v(t'-s) | \, ds \leqq$$

$$\leqq \frac{\| \dot{v} \|_{-,\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}} | e^{\varepsilon t'} - e^{\varepsilon t''} |^{1/2} \int_0^{+\infty} | g_i(s) | \, e^{-\frac{\varepsilon}{2}s} \, ds, \qquad i = 1, 2.$$

LEMMA 2. *Sia* $h \in L_\varepsilon(-\infty, 0) \cap C^0(-\infty, 0)$ *e* v *una funzione tale che, come nel Lemma* 1, $v, \dot{v} \in L_\varepsilon(-\infty, 0)$. *Se* $\ddot{v}$ *è la derivata debole di* $\dot{v}$ *ed in* $(-\infty, 0)$ *risulta*

$$\ddot{v} + \omega^2 v = h, \qquad con \quad \omega \in \mathbf{R}, \quad \omega \neq 0, \tag{13}$$

allora $v \in C^2(-\infty, 0)$ *e*

$$v(t) = \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^{t} \sin \omega (t - \tau) \, h(\tau) \, d\tau. \tag{14}$$

Dimostrazione. Dall'ipotesi che $\dot{v} \in L_\varepsilon(-\infty, 0)$ segue facilmente che $\dot{v} \in L^1(-\infty, 0)$: cioè v è assolutamente continua, e dunque $v \in C^0(-\infty, 0)$. In modo analogo, poiché $h, v \in L^1(-\infty, 0)$, dalla (13) si ha che $\ddot{v} \in L^1(-\infty, 0)$ e $\dot{v} \in C^0(-\infty, 0)$. Ancora dall'equazione (13) segue che $\ddot{v} \in C^0(-\infty, 0)$, e quindi $v \in C^2(-\infty, 0)$, per un noto teorema sulle derivate deboli delle funzioni continue (*v.* [8], *Teorema* 1.4.2). Moltiplicando per la funzione $\dot{v}\, e^{-\varepsilon t}$ i due membri dell'equazione (13), in cui le derivate possono ora intendersi in senso classico, ed integrando successivamente per parti nell'intervallo $(s, 0)$, con $s < 0$, si giunge a

$$\begin{aligned} &[\dot{v}^2(s) + \omega^2 v^2(s)] \, e^{-\varepsilon s} = \\ &= \varepsilon \int_s^0 (\dot{v}^2 + \omega^2 v^2) \, e^{-\varepsilon t} \, dt - 2 \int_s^0 h\dot{v} \, e^{-\varepsilon t} \, dt + \dot{v}^2(0) + \omega^2 v^2(0). \end{aligned} \tag{15}$$

Poiché $h, v, \dot{v} \in L_\varepsilon(-\infty, 0)$, gli integrali al secondo membro di (15) convergono per $s \to -\infty$. Se ne conclude che esiste finito il

$\lim_{s \to -\infty} [\dot{v}^2(s) + \omega^2 v^2(s)] e^{-\varepsilon s}$, e quindi che

$$\lim_{s \to -\infty} v(s) = \lim_{s \to -\infty} \dot{v}(s) = 0 . \tag{16}$$

Dall'espressione dell'integrale generale di (13), fissato $s \in (-\infty, 0)$, si ha per v la classica rappresentazione

$$v(t) = \frac{1}{\omega} \int_s^t \sin \omega (t - \tau) h(\tau) d\tau + v(s) \cos \omega (t - s) + \frac{\dot{v}(s)}{\omega} \sin \omega (t - s) .$$

Da questa, per (16), si perviene alla (14) quando $s \to -\infty$.

Dimostrazione del Teorema. Sia $w \in H_\varepsilon$ la differenza di due soluzioni dell'equazione (2), u_1 e u_2. Qualunque sia $\phi \in C_0^\infty(S)$, w risolve l'equazione

$$\iint_S \left\{ \rho w_t \phi_t - \left[G(0) w_x + \int_{-\infty}^t \dot{G}(t - \tau) w_x(x, \tau) d\tau \right] \phi_x \right\} dx\, dt = 0 . \tag{17}$$

Poiché $C_0^\infty(S)$ è denso in $H_0^{1,2}(S)$, possiamo scegliere ϕ della forma $\phi(x, t) = \psi(t) \sin(n\pi x/l)$, con $\psi \in C_0^\infty(-\infty, 0)$. Questa scelta è nel seguito sottintesa. Sia $\bar{w}(\cdot, t)$ l'estensione con legge dispari di $w(\cdot, t)$ all'intervallo $[-l, l]$. Poiché, per quasi ogni $t \in (-\infty, 0)$, $\bar{w}(\cdot, t)$ appartiene ad $H^{1,2}(-l, l)$ e $\bar{w}_t(\cdot, t)$ appartiene ad $L^2(-l, l)$, le due serie di Fourier

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^\infty v_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad , \quad w_t(x, t) = \sum_{n=1}^\infty \hat{v}_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} ,$$

di coefficienti

$$v_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l w(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad , \quad \hat{v}_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l w_t(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx ,$$

convergono rispettivamente in $H^{1,2}(0, l)$ ed $L^2(0, l)$. Per il teorema di Fubini-Tonelli è poi facile verificare che $\hat{v}_n$ è la derivata debole di v_n, $\dot{v}_n$, e che $v_n, \dot{v}_n \in L_\varepsilon(-\infty, 0)$. Dall'equazione (17) si deduce che v_n, per $n = 1, 2, \ldots$, risolve, nel senso della teoria delle distribuzioni, l'equazione

$$\ddot{v}_n + \omega_n^2 v_n = -\frac{\omega_n^2}{G(0)} \int_{-\infty}^t \dot{G}(t - \tau) v_n(\tau) d\tau , \quad \text{con} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{G(0)}{\rho}} \frac{n\pi}{l} . \tag{18}$$

Poniamo

$$h_n(t) = -\frac{\omega_n^2}{G(0)} \int_{-\infty}^{t} \dot{G}(t-\tau)\, v_n(\tau)\, d\tau .$$

Poiché $\dot{G} \in L^2(0, +\infty)$, per il Lemma 1 $h_n \in L_\varepsilon(-\infty, 0) \cap C^0(-\infty, 0)$, per ogni $n \in \mathbf{N}$. Il Lemma 2 si applica dunque all'equazione (18) ed implica

$$v_n(t) = -\frac{\omega_n}{G(0)} \int_{-\infty}^{t} \sin \omega_n(t-\sigma) \left(\int_{-\infty}^{\sigma} \dot{G}(\sigma-\tau)\, v_n(\tau)\, d\tau \right) d\sigma .$$

Un'integrazione per parti rispetto a σ dà a questa formula la forma più conveniente

$$v_n = F_n[v_n], \tag{19}$$

dove, per $n = 1, 2, \ldots, F_n$ è l'operatore lineare di $L_\varepsilon(-\infty, 0)$ in sé definito da

$$\begin{aligned} F_n[v] = \frac{1}{G(0)} \Bigg[& \int_{-\infty}^{t} \dot{G}(t-\tau)\, v(\tau)\, d\tau - \dot{G}(0) \int_{-\infty}^{t} \cos \omega_n(t-\sigma)\, v(\sigma)\, d\sigma + \\ & - \int_{-\infty}^{t} \cos \omega_n(t-\sigma) \left(\int_{-\infty}^{\sigma} \ddot{G}(\sigma-\tau)\, v(\tau)\, d\tau \right) d\sigma \Bigg] . \end{aligned} \tag{20}$$

Applicando la (9) al primo integrale del secondo membro di (20), la (10) al secondo integrale, ed entrambe al terzo, si ottiene

$$\| F_n[v] \|_{-,\varepsilon} \leqq \frac{1}{G(0)} \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \| \dot{G} \|_2 + \frac{2}{\varepsilon} | \dot{G}(0) | + \frac{2}{\varepsilon \sqrt{\varepsilon}} \| \ddot{G} \|_2 \right] \| v \|_{-,\varepsilon} .$$

Se quindi vale la (17), per ogni $n \in \mathbf{N}$ F_n è una contrazione di $L_\varepsilon(-\infty, 0)$ e $v_n \equiv 0$ è l'unica soluzione di (19); cosicché $w \equiv 0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. FICHERA (1979) – *Avere una memoria tenace crea gravi problemi*, « Arch. Rational Mech. Anal. », *70*, 101-112.

[2] G. FICHERA (1982) – *Sul principio di memoria evanescente*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », *68*, 235-259.

[3] C.M. DAFERMOS (1970) – *Asymptotic stability in viscoelasticity*, « Arch. Rational Mech. Anal. », *37*, 297-308.

[4] G. CAPRIZ e E.G. VIRGA (1986) – *Esempi di non-unicità in viscoelasticità lineare*, « Atti Accad. Sc. Torino », Suppl. *120*, 81-86.

[5] E.G. VIRGA e G. CAPRIZ (1987) – *Un teorema di unicità in viscoelasticità lineare, in corso di stampa*, in « Rend. Sem. Mat. Padova ».

[6] G. VERGARA CAFFARELLI e G. CAPRIZ (1986) – *Alcune osservazioni sul problema dinamico in viscoelasticità lineare*, Atti VIII Congresso AIMETA, Vol. 1, 11-13, Torino.

[7] G. CAPRIZ (1986) – *Sulla impostazione di problemi dinamici in viscoelasticità*, Tavola Rotonda su « Continui con memoria », Accademia Nazionale dei Lincei.

[8] L. HÖRMANDER (1964) – *Linear partial differential operators*, Springer, Berlin.