
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

PAOLO PODIO-GUIDUGLI, EPIFANIO G. VIRGA

Sull'equilibrio di un involucro elastico pieno di gas.

Nota 2

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 81 (1987), n.4, p. 373–378.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1987_8_81_4_373_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica. — *Sull'equilibrio di un involucro elastico pieno di gas.* Nota II di PAOLO PODIO-GUIDUGLI e EPIFANIO G. VIRGA, presentata (*) dal Corrisp. T. MANACORDA.

ABSTRACT. — *On the equilibrium of a gas-filled elastic container.* Part II. In this Note, which is a sequel of the one immediately preceding in this Journal, we continue our study of the equilibrium problem of a gas-filled elastic container, looking at small perturbation of a given equilibrium placement, driven by small inflations or deflations of gas. Restricting attention to radial deformations of a spherical container with a spherical cavity, we show that the elasticity tensor is strongly elliptic, and yet the non-locality of boundary conditions is responsible for inducing loss of existence of solutions for the linearized equilibrium problem, so that the non-linear problem is not "linearization stable".

KEY WORDS: Finite elasticity; Live loads; Linearization instability; Non-local boundary conditions.

RIASSUNTO. — In questa Nota, che è il seguito della Nota precedente, proseguiamo lo studio del problema di equilibrio di un involucro elastico pieno di gas, considerando piccole perturbazioni di una configurazione di equilibrio, prodotte da insufflazioni o desufflazioni di piccole quantità di gas. Limitando la nostra attenzione al caso che l'involucro sia una corona sferica che subisce solo deformazioni radiali, mostriamo che, per un valore critico dello spessore della corona, il carattere non locale delle condizioni al contorno è responsabile della non esistenza di soluzioni per il problema di equilibrio linearizzato, anche se il tensore elastico è fortemente ellittico.

FENOMENI DI INSTABILITÀ NEL PROBLEMA LINEARIZZATO

In questa Nota proseguiamo lo studio intrapreso nella precedente Nota I, supponendo che il materiale dell'involucro elastico sia omogeneo ed isotropo e la pressione dell'ambiente esterno sia mantenuta fissa.

Limitando la nostra attenzione alle deformazioni radiali di un corpo sferico con una cavità sferica concentrica, mostreremo che il problema linearizzato dell'equilibrio per piccole insufflazioni o desufflazioni di gas può non ammettere soluzione, anche se il tensore elastico relativo alla configurazione di equilibrio imperturbata è fortemente ellittico. Ciò rivela una situazione di instabilità particolare, considerata da Marsden e Hughes nel § 4.4 di [9] per un'equazione non lineare astratta, e qui indotta dal carattere non locale delle condizioni al contorno del problema di equilibrio.

(*) Nella seduta del 24 aprile 1987.

3. PROBLEMA LINEARIZZATO PER MATERIALI ELASTICI ISOTROPI

In questo paragrafo ci proponiamo di studiare il problema di equilibrio considerato al § 2 per valori del parametro di insufflazione ε molto prossimi a zero. A questo scopo, scriviamo la deformazione f nella forma

$$(3.1) \quad f(p) = p + \varepsilon u(p) + o(\varepsilon),$$

per poi linearizzare le equazioni (1.5)-(1.7).

Dalla (3.1) segue immediatamente che

$$(3.2) \quad F = I + \varepsilon H + o(\varepsilon),$$

dove $H := Du$ è il gradiente di spostamento. Da (1.3) e (3.2) si ha anche

$$F^* = I + \varepsilon [(\operatorname{tr} H) I - H^T] + o(\varepsilon).$$

Il tensore di Piola-Kirchhoff S corrispondente alla deformazione (3.1) si esprime come

$$S = -\pi_0 I + \varepsilon S[H] + o(\varepsilon),$$

dove S è il tensore elastico relativo alla configurazione di riferimento. All'ordine zero in ε le equazioni (1.5)-(1.7) esprimono l'equilibrio nella configurazione di riferimento; al primo ordine, esse diventano

$$(3.3) \quad \operatorname{Div} S[H] = 0 \quad \text{in } \mathcal{B},$$

$$(3.4) \quad S[H]n = -\pi_0 \tilde{H}n \quad \text{su } \partial_e \mathcal{B},$$

$$(3.5) \quad S[H]n = -\pi_0 [(I + \tilde{H})n + (3 \operatorname{vol}(\partial_i \mathcal{B}))^{-1} \left(\int_{\partial_i \mathcal{B}} (p \cdot \tilde{H}n + u \cdot n) \right) n]$$

su $\partial_i \mathcal{B}$, dove si è posto

$$(3.6) \quad \tilde{H} := (\operatorname{tr} H) I - H^T.$$

Si sa che, se $\mathcal{B}$ è omogeneo ed isotropo, $S[H]$ ha la seguente rappresentazione (*vid.* [8], pp. 248-251)

$$(3.7) \quad S[H] = (\mu - \pi_0) H + \mu H^T + \lambda (\operatorname{tr} H) I,$$

con μ e λ costanti materiali ⁽²⁾. Ricordiamo altresì che $\mathbf{S}$ si dice fortemente ellittico se soddisfa alla condizione

$$(3.8) \quad (a \otimes b) \cdot \mathbf{S} [a \otimes b] > 0 \quad \text{per ogni coppia di vettori } a \neq 0 \text{ e } b \neq 0.$$

È semplice verificare che il tensore elastico definito da (3.7) obbedisce a (3.8) se, e solo se,

$$(3.9) \quad \mu - \pi_0 > 0 \quad \text{e} \quad 2\mu + \lambda - \pi_0 > 0.$$

Nel seguito supporremo sempre che entrambe le disuguaglianze (3.9) siano verificate.

Ogni soluzione u delle equazioni (3.3)-(3.5) descrive un campo di spostamenti che individua una configurazione di equilibrio prossima alla configurazione di riferimento, assunta in seguito ad una piccola insufflazione di gas, se $\varepsilon > 0$, o desufflazione, se $\varepsilon < 0$. L'equazione (3.5) mostra che il problema dell'equilibrio linearizzato mantiene il carattere non locale del problema non lineare.

Nel paragrafo seguente daremo una semplice soluzione delle equazioni (3.3)-(3.5), scegliendo opportunamente la forma della configurazione di riferimento e la classe degli spostamenti incrementali. L'analisi mostrerà che la particolare struttura della condizione al contorno (3.5) è responsabile di un fenomeno di instabilità, che si manifesta anche se $\mathbf{S}$ è fortemente ellittico. Ciò illustra una circostanza messa in luce in [9], *loc. cit.*, sotto il nome di "linearization instability", circostanza che in generale è indice o di una biforcazione del problema non lineare dell'equilibrio, o di una brusca transizione dall'equilibrio al moto.

4. INSTABILITÀ PER SPOSTAMENTI RADIALI

Supponiamo che $\mathcal{B}$ sia la corona sferica

$$\mathcal{B} = \{p \in \mathbf{R}^3 \mid 1 < |p| < 1 + \delta\},$$

per modo che le frontiere interna ed esterna di $\mathcal{B}$ sono, rispettivamente, le sfere

$$\partial_i \mathcal{B} = \{p \in \mathbf{R}^3 \mid |p| = 1\}$$

e

$$\partial_e \mathcal{B} = \{p \in \mathbf{R}^3 \mid |p| = 1 + \delta\}.$$

La simmetria geometrica della configurazione di riferimento, avendo già in mente di considerare materiali omogenei ed isotropi (o, almeno, a simmetria

(2) Se $\pi_0 = 0$, eventualità che nel presente lavoro è esclusa dalla (1.6)₂, μ e λ coincidono con le costanti di Lamé dell'elasticità lineare isotropa.

materiale radiale), suggerisce di limitarsi a considerare spostamenti esclusivamente radiali. Assumeremo dunque per u la seguente forma

$$(4.1) \quad u(p) = \eta(r) r^{-1} p,$$

con $r := |p|$ ed

$$\eta : [1, 1 + \delta] \rightarrow \mathbf{R}$$

una funzione di classe C^2 . Se u è definito da (4.1), la deformazione linearizzata (3.1) trasforma la sfera interna a $\mathcal{B}$ di raggio r nella sfera di raggio $r + \varepsilon\eta(r)$.

Indicato con P il proiettore ortogonale radiale

$$P := r^{-2} p \otimes p,$$

da (4.1) segue che

$$(4.2) \quad H = \eta'(r) P + r^{-1} \eta(r) (I - P),$$

dove l'apice ' denota l'operazione di differenziazione; per la (3.7), lo sforzo incrementale può scriversi

$$(4.3) \quad \mathbf{S}[H] = [(2\mu + \lambda - \pi_0) \eta' + 2\lambda r^{-1} \eta] P + [\lambda \eta' + (2\mu + 2\lambda - \pi_0) r^{-1} \eta] (I - P).$$

La (4.3) mostra che $\mathbf{S}[H] \in \text{Sym}$ e, in ogni punto p di $\mathcal{B}$, ha per autospazi la retta generata da $r^{-1} p$ ed il piano ad essa ortogonale, cui corrispondono, rispettivamente, gli autovalori

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \sigma_1(r) &= (2\mu + \lambda - \pi_0) \eta' + 2\lambda r^{-1} \eta, \\ \sigma_2(r) &= \sigma_3(r) = \lambda \eta' + (2\mu + 2\lambda - \pi_0) r^{-1} \eta. \end{aligned}$$

Per il particolare campo di spostamenti (4.1), l'equazione di equilibrio (3.3) si riduce all'equazione scalare

$$\sigma_1' + 2r^{-1}(\sigma_1 - \sigma_2) = 0$$

(*vid. e.g.* [10], p. 94), che, per la (4.4), si scrive

$$(4.5) \quad (2\mu + \lambda - \pi_0)(\eta' + 2r^{-1}\eta)' = 0, \quad r \in (1, 1 + \delta).$$

Inoltre, dalle (4.2) e (3.6) segue che

$$\tilde{H} = 2r^{-1}\eta P + (\eta' + r^{-1}\eta)(I - P).$$

Così le condizioni al contorno (3.4), (3.5) si traducono, rispettivamente, nelle seguenti condizioni ai limiti per l'equazione (4.5):

$$(4.6) \quad (2\mu + \lambda - \pi_0) \eta' (1 + \delta) + 2(\lambda + \pi_0)(1 + \delta)^{-1} \eta (1 + \delta) = 0,$$

$$(4.7) \quad (2\mu + \lambda - \pi_0) \eta' (1) + (2\lambda - \pi_0) \eta (1) = -\pi_0.$$

Si noti che la condizione (3.9)₂ assicura che l'equazione (4.5) non degeneri in una identità ovvia. L'integrale generale di (4.5) risulta

$$(4.8) \quad \eta(r) = \eta_1 r + \eta_2 r^{-2},$$

e le equazioni (4.6), (4.7) si traducono nel seguente sistema lineare per le costanti η_1 , η_2 :

$$(4.9) \quad (2\mu + 3\lambda + \pi_0) \eta_1 + 4(1 + \delta)^{-3} (\pi_0 - \mu) \eta_2 = 0,$$

$$(4.10) \quad (2\mu + 3\lambda - 2\pi_0) \eta_1 + (\pi_0 - 4\mu) \eta_2 = -\pi_0.$$

Il determinante della matrice dei coefficienti di (4.9), (4.10) si annulla se, e soltanto se, lo spessore δ della corona $\mathcal{B}$ assume il valore critico δ_c definito da

$$(4.11) \quad (1 + \delta_c)^3 = 4(2\mu + 3\lambda - 2\pi_0)(\pi_0 - \mu) [(2\mu + 3\lambda + \pi_0)(\pi_0 - 4\mu)]^{-1}.$$

Pertanto, se $\delta = \delta_c$, le equazioni (4.9) e (4.10) non sono compatibili ed il problema di equilibrio linearizzato non ammette soluzione nella classe di spostamenti radiali. La (4.11) definisce correttamente $\delta_c > 0$, se il secondo membro è maggiore di uno. Si mostra facilmente che ciò non contraddice le condizioni (3.9) per la forte ellitticità se, e soltanto se, λ , μ e π_0 obbediscono a

$$(4.12) \quad 2\mu + 3\lambda + \pi_0 < 0, \quad (3).$$

Questo risultato di irrisolubilità nella classe degli spostamenti radiali segue dalla natura non locale delle condizioni al contorno. Per convincercene, consideriamo l'analogo problema di equilibrio linearizzato nel caso in cui si assegni una piccola variazione della pressione π_i del gas contenuto all'interno di $\mathcal{B}$.

Il procedimento di linearizzazione esposto nel paragrafo precedente si applica invariato, pur di ridefinire il parametro perturbativo ε secondo la formula

(3) Osserviamo che, se fosse $\pi_0 = 0$, da (4.12) seguirebbe che il tensore elastico $\mathbf{S}$ non è positivo definito; se invece $\pi_0 > 0$, come qui si è sempre ammesso, è facile verificare che $\mathbf{S}$ non è positivo definito per nessun valore di μ e λ .

$$\pi_i = (1 + \varepsilon) \pi_0,$$

e di scrivere anche la condizione al contorno su $\partial_i \mathcal{B}$ nella forma

$$(4.13) \quad \mathbf{S}[\mathbf{H}] \mathbf{n} = -\pi_0 \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{n}.$$

L'equazione (4.13), analoga alla (3.4), presenta unicamente dipendenza locale da u . Nella classe di spostamenti radiali l'equazione di campo è immutata e risolta da (4.8); le costanti η_1 , η_2 sono determinate da (4.9) e da

$$(4.14) \quad (2\mu + 3\lambda + \pi_0) \eta_1 + 4(\pi_0 - \mu) \eta_2 = -\pi_0.$$

Per la (3.9)₁, nell'ipotesi che valga ancora la (4.12), le equazioni (4.9) e (4.14) sono compatibili e determinano univocamente η_1 ed η_2 , per qualunque valore di δ .

NOTA BIBLIOGRAFICA

Nel 1901 i fratelli Cosserat hanno dato degli esempi di non unicità della soluzione del classico problema al contorno di trazione per un involucro sferico [11], una sfera piena [12] e un ellissoide [13] di materiale elastico isotropo (cfr. anche [14], per un contributo italiano). Tutti gli esempi dei Cosserat sussistono quando il tensore elastico è fortemente ellittico (cfr. [15], pp. 49-50).

BIBLIOGRAFIA

- [9] J.E. MARSDEN and T.J.R. HUGHES (1983) - *Mathematical foundations of elasticity*, Prentice Hall, Englewood Cliff.
- [10] M.E. GURTIN (1972) - *The linear theory of elasticity*, in « Handbuch der Physik », vol. VIa/2, Springer, Berlin.
- [11] E. COSSERAT et F. COSSERAT (1901) - *Sur la déformation infiniment petite d'une enveloppe sphérique élastique*, « C.R. Acad. Sci. Paris », 133, 326-329.
- [12] E. COSSERAT et F. COSSERAT (1901) - *Sur la déformation infiniment petite d'un corps élastique soumis à des forces données*, « C.R. Acad. Sci. Paris », 133, 271-273, 400.
- [13] E. COSSERAT et F. COSSERAT (1901) - *Sur la déformation infiniment petite d'un ellipsoïde élastique soumis à des efforts données sur la frontière*. « C.R. Acad. Sci. Paris », 133, 361-364.
- [14] T. BOGGIO (1907) - *Determinazione della deformazione di un corpo elastico per date tensioni superficiali*, « Atti R. Accad. Lincei, Red. Cl. Sci. Mat. Fis. Natur. », 16, 441-449.
- [15] R.J. KNOPS and L.E. PAYNE (1971) - *Uniqueness theorems in linear elasticity*, Springer, Berlin.