Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Paolo Podio-Guidugli, Epifanio G. Virga

Sull'equilibrio di un involucro elastico pieno di gas

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **81** (1987), n.3, p. 287–292.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1987_8_81_3_287_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1987.

Atti Acc. Lincei Rend. fis.
(8), LXXXI (1987), pp. 287-292

Meccanica. — *Sull'equilibrio di un involucro elastico pieno di gas.* Nota I di PAOLO PODIO-GUIDUGLI e EPIFANIO G. VIRGA, presentata (*) dal Corrisp. T. MANACORDA.

ABSTRACT. — *On the Equilibrium of a Ga-Filled Elastic Container.* When an elastic body containing a certain amount of gas in a cavity is placed into a hydrostatic environment, the resulting equilibrium problem involves non-local boundary conditions. In this Note, the first of a series, we consider the case of a container filled with a perfect gas and subject to a fixed external pressure, and derive mean stress identities to be obeyed by all equilibrium solutions (in particular, by all homogeneous equilibrium solutions) independently of the constitutive equation of the material of which the container is made.

KEY WORDS: Finite elasticity; Live loadings, non-local boundary conditions.

RIASSUNTO. — Quando si pone in un ambiente idrostatico un corpo elastico contenente una certa quantità di gas in una sua cavità, il problema di equilibrio che ne risulta presenta condizioni al bordo di tipo non locale. In questa Nota, la prima di una serie, consideriamo il caso di un contenitore riempito di un gas perfetto e soggetto ad una pressione esterna fissata, ed otteniamo certe identità di media degli sforzi che valgono per tutte le soluzioni del problema di equilibrio (in particolare, per tutte le soluzioni omogenee) indipendentemente dalle equazioni costitutive del materiale di cui è fatto il contenitore.

GENERALITÀ

Quando un corpo elastico, che contenga in una cavità interna una certa quantità di gas, è immerso in un ambiente idrostatico, il problema di equilibrio presenta nelle condizioni sull'intero contorno una insolita dipendenza dalla soluzione, dipendenza che sul bordo interno è di tipo non locale. Infatti, la pressione del gas sulla parete della cavità dipende dal volume di quest'ultima nella configurazione deformata.

In questa Nota formuliamo il problema di equilibrio per il sistema, supponendo che il gas contenuto nella cavità sia perfetto e mantenuto a temperatura costante, ma senza alcuna ulteriore ipotesi costitutiva sul corpo elastico o sulla classe delle deformazioni ammesse. Otteniamo altresì alcune proprietà di media degli sforzi, ed esaminiamo le loro conseguenze per deformazioni omogenee.

In una Nota successiva studieremo le perturbazioni di una data configurazione di equilibrio, conseguenti a piccole insufflazioni o desufflazioni di gas.

(*) Nella seduta del 24 aprile 1987.

1. Problema di equilibrio con carichi non locali

Consideriamo un corpo materiale, la cui configurazione di riferimento $\mathscr{B}$ costituisca un involucro di superficie interna $\partial_i \mathscr{B}$ ed esterna $\partial_e \mathscr{B}$, in modo che sia

$$\partial_i \mathscr{B} \cap \partial_e \mathscr{B} = \varnothing \quad , \quad \partial \mathscr{B} = \partial_i \mathscr{B} \cup \partial_e \mathscr{B} .$$

Supponiamo che l'ambiente esterno eserciti su $\mathscr{B}$ la pressione uniforme π_0, qualunque sia la configurazione assunta da $\mathscr{B}$; supponiamo inoltre che l'ambiente interno sia costituito da un gas perfetto, mantenuto a temperatura costante.

Se si varia la quantità di gas contenuta all'interno dell'involucro, si induce in $\mathscr{B}$ una deformazione, rappresentata dal diffeomorfismo regolare

$$f : \mathscr{B} \to \mathbf{R}^3 \quad , \quad x = f(p) ,$$

secondo il quale un punto $p \in \mathscr{B}$ è trasformato in $x \in \mathbf{R}^3$. Indicando con

$$\mathrm{F}(p) := \mathrm{D}f(p) \quad , \quad \forall p \in \mathscr{B} ,$$

il gradiente di deformazione, ci si attende che risulti $\det \mathrm{F} > 0$ in $\mathscr{B}$.

La pressione π_i del gas contenuto all'interno dell'involucro è inversamente proporzionale al volume racchiuso dalla superficie interna nella configurazione deformata:

$$\pi_i = \nu(1+\varepsilon)(\mathrm{vol}\langle f(\partial_i \mathscr{B})\rangle)^{-1} \text{ (1)}, \tag{1.1}$$

con ν costante positiva. Nella (1.1) $\varepsilon \geq -1$ rappresenta il *parametro di insufflazione*, ed esprime il rapporto tra la variazione della quantità di gas e la quantità presente nella configurazione di riferimento: se $\varepsilon > 0$, la quantità di gas aumenta, diminuisce se $\varepsilon < 0$, è nulla se $\varepsilon = -1$. Se n ed m sono, rispettivamente, i campi della normale esterna a $\partial \mathscr{B}$ e $\partial f(\mathscr{B})$, segue dal teorema della divergenza che

$$\mathrm{vol}\langle f(\partial_i \mathscr{B})\rangle = -(1/3)\int_{f(\partial_i \mathscr{B})} x \cdot m = -(1/3)\int_{\partial_i \mathscr{B}} f \cdot \mathrm{F}^* n , \tag{1.2}$$

dove F^* è definito da:

$$\mathrm{F}^* := (\det \mathrm{F})(\mathrm{F}^T)^{-1} , \tag{1.3}$$

(1) Per ogni superficie chiusa Σ, indicheremo con $\mathrm{vol}\langle \Sigma \rangle$ il volume che essa racchiude.

e dove

$$m = |\mathrm{F}^* n|^{-1} \mathrm{F}^* n .$$

Per la $(1.2)_2$, la (1.1) può scriversi

$$\pi_i = -\varkappa(1+\varepsilon)\left(\int_{\partial_i \mathscr{B}} f \cdot \mathrm{F}^* n\right)^{-1}, \tag{1.4}$$

dove si è posto $\varkappa = 3\nu$.

Supponiamo che siano assenti le forze di massa. La deformazione f individua una configurazione di equilibrio per l'involucro elastico in esame, se risolve le equazioni

$$\operatorname{Div} \mathrm{S} = 0 \quad \text{in } \mathscr{B}, \tag{1.5}$$

$$\mathrm{S} n = -\pi_0 \mathrm{F}^* n, \text{ con } \pi_0 > 0, \qquad \text{su } \partial_e \mathscr{B}, \tag{1.6}$$

$$\mathrm{S} n = \varkappa(1+\varepsilon)\left(\int_{\partial_i \mathscr{B}} f \cdot \mathrm{F}^* n\right)^{-1} \mathrm{F}^* n \qquad \text{su } \partial_i \mathscr{B}, \tag{1.7}$$

dove F^* dipende da F come precisato da (1.3) e $\mathrm{S} = \mathrm{S}(\mathrm{F})$ è interpretato come il tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff corrispondente a F.

Il problema a contorno (1.5)-(1.7) ha alcuni caratteri distintivi rispetto agli ordinari problemi di forze assegnate: la (1.6) esprime una condizione di trazione al bordo di tipo *vivo* (*vid. e.g.* [1], p. 182; [2], [3]), poiché il carico applicato su $\partial_e \mathscr{B}$ dipende dalla deformazione tramite la normale m alla superficie deformata; la (1.7), oltre a questa peculiarità, contiene una dipendenza ***non locale*** dalla deformazione attraverso l'integrale $\int_{\partial_i \mathscr{B}} f \cdot \mathrm{F}^* n$.

2. Proprietà di media

La presenza di carichi vivi e non locali rende particolarmente ardua l'analisi del problema di equilibrio. Tuttavia, è possibile trovare alcune proprietà di media degli sforzi che, come quelle di Signorini e Grioli (cfr. [4], [5], [6] e [7], p. 574), sono indipendenti dalla natura costitutiva del materiale.

Supponiamo che la configurazione di riferimento sia di equilibrio, con il gas contenuto all'interno dell'involucro che, essendo $\varepsilon = 0$, esercita la pressione π_0 su $\partial_i \mathscr{B}$. Allora, per essere $f(p) = p$ in tutto $\mathscr{B}$ e, quindi,

$$\mathrm{F}(p) = \mathrm{F}^*(p) \equiv \mathrm{I},$$

segue che le (1.5), (1.6) e (1.7) sono soddisfatte se lo sforzo è una pressione uniforme in $\mathscr{B}$:

$$\mathrm{S}(\mathrm{F}(p)) \equiv -\pi_0 \mathrm{I}$$

ed inoltre

$$\varkappa = 3\,\pi_0 \operatorname{vol} \langle \partial_i \mathscr{B} \rangle, \tag{2.1}$$

come del resto prescrive la (1.4).

Dalle (1.4) e (1.7) segue facilmente che, assegnato ε, ogni deformazione di equilibrio f corrispondente ad ε deve soddisfare alla condizione

$$\int_{\partial_i \mathscr{B}} f \cdot \mathrm{S}(\mathrm{F}) n = \varkappa (1 + \varepsilon), \tag{2.2}$$

con $\varkappa$ come sopra. Inoltre, poiché segue da (1.5) che

$$\int_{\mathscr{B}} \mathrm{S} \cdot \mathrm{F} = \int_{\partial \mathscr{B}} f \cdot \mathrm{S} n,$$

(2.2) e (1.6) implicano

$$\int_{\mathscr{B}} \mathrm{S} \cdot \mathrm{F} + \pi_0 \int_{\partial_i \mathscr{B}} f \cdot \mathrm{F}^* n = \varkappa (1 + \varepsilon). \tag{2.3}$$

L'impiego più immediato di (2.2) e (2.3), una volta assegnata una legge costitutiva $\mathrm{S}(\mathrm{F})$, sembra essere la costruzione di stime *a priori* del gradiente di deformazione $\mathrm{F} = \mathrm{D}f$, eventualmente per provare risultati tipo « buona posizione » per il problema (1.5)-(1.7). Giungere a tali stime non è semplice e noi non perseguiamo qui questa direzione di ricerca.

Invece, le identità (2.2) e (2.3) hanno facili e tuttavia interessanti conseguenze nel caso di deformazioni omogenee. Si consideri la deformazione

$$f(p) = \mathrm{L}\, p, \tag{2.4}$$

con $\mathrm{L} \in \mathrm{Lin}^+$ indipendente da p. La (2.4) risolve l'equazione di campo (1.5), mentre (2.2) diviene

$$\int_{\partial_i \mathscr{B}} \mathrm{S}^{\mathrm{T}}(\mathrm{L})\, \mathrm{L} p \cdot n = \varkappa (1 + \varepsilon),$$

da cui, per la (2.1), si ottiene facilmente, applicando il teorema della divergenza,

$$\mathrm{S}(\mathrm{L})\cdot\mathrm{L} = -3\,\pi_0(1+\varepsilon) \leq 0\,. \tag{2.5}$$

Fissato $\mathrm{L}_0 \in \mathrm{Lin}^+$, sia adesso Γ un processo di dilatazione della configurazione locale individuato da L_0, cioè, un segmento di Lin^+ definito da

$$\Gamma : [0\,,\tilde{\alpha}] \to \mathrm{Lin}^+\,,\ \mathrm{L}(\alpha) := (1+\alpha)\,\mathrm{L}_0\,,\ \text{con } \alpha > -1\,;$$

più precisamente, Γ è un processo di espansione se $\tilde{\alpha} > 0$, di contrazione se $\tilde{\alpha} < 0$. Il lavoro delle forze di contatto nel processo Γ è per definizione (cfr. [8], § 83)

$$\mathscr{L}(\Gamma) = \int_{[0,\tilde{\alpha}]} \mathrm{S}(\mathrm{L}(\alpha))\cdot d\mathrm{L}(\alpha)\,, \tag{2.6}$$

da cui, vista la $(2.5)_1$,

$$\mathscr{L}(\Gamma) = -3\,\pi_0(1+\varepsilon)\,\mathit{ln}(1+\tilde{\alpha})\,.$$

Dunque, per la $(2.5)_2$, $\mathscr{L}(\Gamma) \leq 0$ in un processo di espansione; $\mathscr{L}(\Gamma) \geq 0$ in un processo di contrazione.

Infine, scrivendo la (2.3) per la deformazione (2.4) e facendo uso di (1.3) e (2.5), si ottiene

$$\det \mathrm{L} = 1 + \varepsilon\,. \tag{2.7}$$

L'equazione (2.7) mostra che, se la deformazione è omogenea, insufflazione produce espansione, e desufflazione contrazione, in accordo con l'intuizione.

Osserviamo infine che le considerazioni precedenti sono del tutto indipendenti dalla natura del materiale elastico in esame; tuttavia, il legame costitutivo $\mathrm{S}(\mathrm{F})$ deve godere di una particolare proprietà perché la deformazione omogenea (2.4) sia soluzione del problema di equilibrio (1.5)-(1.7). Da (1.6) e da (1.7), in cui si tenga conto di (2.7), segue, infatti, che

$$\mathrm{S}(\mathrm{L})\,n = -\pi_0\,\mathrm{L}^* n \quad \text{su} \quad \partial_i\mathscr{B} \ \text{e} \ \partial_e\mathscr{B}\,. \tag{2.8}$$

Poiché $\partial_i\mathscr{B}$ e $\partial_e\mathscr{B}$ sono entrambe superfici regolari chiuse, (2.8) implica che il tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff ha all'equilibrio il valore costante

$$\mathrm{S}(\mathrm{L}) = -\pi_0\,\mathrm{L}^*\,,$$

cui corrisponde uno sforzo di Cauchy pari allo sforzo residuo nella configurazione di riferimento

$$\mathrm{T}(\mathrm{L}) = -\pi_0\,\mathrm{I} = \mathrm{T}(\mathrm{I})\,.$$

Bibliografia

[1] M.E. Gurtin (1981) - *An introduction to continuum mechanics*, Academic Press, New York.

[2] S.J. Spector (1980) - *On uniqueness in finite elasticity with general loading*, « J. Elasticity », *10*, 145-161.

[3] P. Podio-Guidugli and G. Vergara Caffarelli (1984) - *On a class of live traction problems in elasticity*, in « Trends and applications of pure mathematics to mechanics », P.G. Ciarlet and M. Roseau Eds., Springer, Berlin.

[4] A. Signorini (1932) - *Sollecitazioni iperelastiche*, « Rend. Ist. Lombardo », *65*, 1-7.

[5] G. Grioli (1952) - *Relazioni quantitative per lo stato tensionale di un qualunque sistema continuo e per le deformazioni di un corpo elastico in equilibrio*, « Ann. di Mat. », *33*, 239-246.

[6] G. Grioli (1953) - *Proprietà di media ed equilibrio elastico*, « Atti IV Congresso Un. Mat. Ital. », *1*, 68-77.

[7] C. Truesdell and R. Toupin (1960) - *The classical field theories*, in « Handbuch der Physik », vol. III/1, Springer, Berlin.

[8] C. Truesdell and W. Noll (1965) - *The non-linear field theories of mechanics*, in « Handbuch der Physik », vol. III/3, Springer, Berlin.