Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Biagio Ricceri

Une propriété topologique de l'ensemble des points fixes d'une contraction multivoque à valeurs convexes

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **81** (1987), n.3, p. 283–286.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1987_8_81_3_283_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1987.

Atti Acc. Lincei Rend. fis.
(8), LXXXI (1987), pp. 283-286

Analisi funzionale. — *Une propriété topologique de l'ensemble des points fixes d'une contraction multivoque à valeurs convexes.* Nota di BIAGIO RICCERI, presentata (*) dal Socio G. SCORZA DRAGONI.

ABSTRACT. — *A topological property of the set of fixed points of a multivalued contraction with convex values.* In this Note we first establish a result on the structure of the set of fixed points of a multi-valued contraction with convex values. As a consequence of this result, we then obtain the following theorem: Let $(U, \|\cdot\|_U)$, $(V, \|\cdot\|_V)$ be two real Banach spaces and let Φ be a continuous linear operator from U onto V. Put: $\alpha = \sup\{\inf\{\|u\|_U : u \in \Phi^{-1}(v)\} : v \in V, \|v\|_V \leq 1\}$. Then, for every $v \in V$ and every lipschitzian operator $\Psi : U \to V$, with Lipschitz constant L such that $\alpha L < 1$, the set $\{u \in U : \Phi(u) + \Psi(u) = v\}$ is non-empty and arcwise connected.

KEY WORDS: Multi-valued contraction; Fixed point; Absolute extensor.

RIASSUNTO. — *Una proprietà topologica dell'insieme dei punti fissi d'una contrazione multivoca a valori convessi.* In questa Nota viene stabilito un risultato sulla struttura dell'insieme dei punti fissi d'una contrazione multivoca, a valori convessi. Come conseguenzadi tale risultato, si ottiene il seguente teorema: Siano $(U, \|\cdot\|_U)$, $(V, \|\cdot\|_V)$ due spazi di Banach reali e Φ un operatore lineare e continuo definito in U ed a valori su tutto V. Si ponga: $\alpha = \sup\{\inf\{\|u\|_U : u \in \Phi^{-1}(v)\} : v \in V, \|v\|_V \leq 1\}$. Allora, per ogni $v \in V$ ed ogni operatore lipschitziano $\Psi : U \to V$, con costante di Lipschitz L tale che $\alpha L < 1$, l'insieme $\{u \in U : \Phi(u) + \Psi(u) = v\}$ è non vuoto e connesso per archi.

Le but de cette Note est d'établir le résultat suivant:

THÉORÈME 1. *Soit* X *une partie non vide, convexe et fermée d'un espace de Banach* E *et soit* F *une contraction multivoque de* X *dans* X, *à valeurs convexes et fermées. Alors, l'ensemble des points fixes de* F *est un extenseur absolu, non vide, pour les espaces paracompacts.*

Avant de prouver ce résultat, nous rappelons quelques notions de base.

Soit Y un espace topologique. En suivant E. Michael [1], on dit que Y est un *extenseur absolu pour les espaces paracompacts* (*resp. normaux*) si pour tout espace topologique paracompact (resp. normal) T, toute partie fermée A de T et toute fonction continue $\psi : A \to Y$, il existe une fonction continue $\varphi : T \to Y$ telle que $\varphi_{|A} = \psi$.

(*) Nella seduta del 24 aprile 1987

Soit (Σ, d) un espace métrique. Pour tous $y \in \Sigma$, Γ, $\Omega \subseteq \Sigma$ non vides et $r > 0$, on pose: $B_d(y, r) = \{z \in \Sigma : \mathrm{d}(y, z) < r\}$, $\mathrm{d}(y, \Gamma) = \inf\{\mathrm{d}(y, z) : z \in \Gamma\}$, $\mathrm{d}^*(\Gamma, \Omega) = \sup\{\mathrm{d}(z, \Omega) : z \in \Gamma\}$, $\mathrm{d}_H(\Gamma, \Omega) = \max\{\mathrm{d}^*(\Gamma, \Omega), \mathrm{d}^*(\Omega, \Gamma)\}$. Soit G une multifonction de Σ dans lui-même, à valeurs non vides. On dit que G est une *contraction multivoque* (par rapport à d) s'il existe $k \in [0, 1[$ tel que $\mathrm{d}_H(G(x), G(y)) \leq k\mathrm{d}(x, y)$ pour tous $x, y \in \Sigma$. Soit $\hat{x} \in \Sigma$. On dit que $\hat{x}$ est un *point fixe* de G si $\hat{x} \in G(\hat{x})$.

Pour d'autres notions de base sur les multifonctions, nous renvoyons à [2].

Nous rappelons maintenant deux résultats dont nous ferons usage: le premier est une conséquence immédiate du Théorème 3.2″ et de la Proposition 1.4 de [3] tandis que le second est une version modifiée de la Proposition 5, p. 44, de [4] (voir aussi la Proposition 2.3 de [3]).

THÉORÈME 2. *Soient* T *un espace topologique paracompact,* E *un espace de Banach et* G *une multifonction semi-continue inférieurement de* T *dans* E, *à valeurs non vides, convexes et fermées. Alors, pour toute partie fermée A de* T *et toute sélection continue* ψ *de* $G_{|A}$, *il existe une sélection continue* φ *de* G *telle que* $\varphi_{|A} = \psi$.

PROPOSITION 3. *Soient* T *un espace topologique,* (Σ, d) *un espace métrique,* G *une multifonction semi-continue inférieurement de* T *dans* Σ, f *une fonction continue de* T *dans* Σ *et* g *une fonction réelle non négative continue dans* T. *Posons*:

$$Q(t) = \begin{cases} B_d(f(t), g(t)) & si \quad t \in T, \quad g(t) > 0 \\ \{f(t)\} & si \quad t \in T, \quad g(t) = 0. \end{cases}$$

Supposons que $G(t) \cap Q(t) \neq \varnothing$ *pour tout* $t \in T$. *Alors, la multifonction* $t \to G(t) \cap Q(t)$ *est semi-continue inférieurement.*

Démonstration du Théorème 1. Soit $\|\cdot\|$ la norme de E et soit d la métrique sur X induite par $\|\cdot\|$. En outre, soit $k \in]0, 1[$ tel que $\mathrm{d}_H(F(x), F(y)) \leq \leq k\|x - y\|$ pour tous x, $y \in X$. Posons: $Y = \{x \in X : x \in F(x)\}$. D'après le Corollaire 3 de [5], Y n'est pas vide. Soient maintenant T un espace topologique paracompact, A une partie non vide fermée de T et ψ une fonction continue de A dans Y. D'après le Théorème 2, appliqué en prenant $G(t) = X$ pour tout $t \in T$, il existe une fonction continue $\varphi_0 : T \to X$ telle que $\varphi_{0|A} = \psi$. Fixons $\beta \in]1, 1/k[$. Nous allons prouver qu'il existe une suite $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de fonctions continues de T dans X telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on ait:

(*a*) $\varphi_{n|A} = \psi$;

(*b*) $\varphi_n(t) \in F(\varphi_{n-1}(t))$ pour tout $t \in T$;

(*c*) $\|\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)\| \leq (\beta k)^{n-1} \|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\|$ pour tout $t \in T$.

On construit la suite $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ par induction. Observons d'abord que la fonction ψ est, sur A, une sélection continue de la multifonction $t \to F(\varphi_0(t))$, laquelle, dans T, est semi-continue inférieurement et à valeurs non vides, convexes et fermées. Par conséquent, toujours d'après le Théorème 2, il existe une fonction continue $\varphi_1 : T \to X$ telle que $\varphi_{1|A} = \psi$ et $\varphi_1(t) \in F(\varphi_0(t))$ pour tout $t \in T$. La fonction φ_1 satisfait donc à (a), (b) et (c) pour $n = 1$. Supposons alors d'avoir construit des fonctions continues $\varphi_1, \ldots, \varphi_h$ de T dans X satisfaisant à (a), (b) et (c) pour $n = 1, \ldots, h$. Par conséquent, pour tout $t \in T$, on a:

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} &d(\varphi_h(t), F(\varphi_h(t))) \leq d_H(F(\varphi_{h-1}(t)), F(\varphi_h(t))) \leq \\ &\leq k \| \varphi_{h-1}(t) - \varphi_h(t) \| \leq \beta^{h-1} k^h \| \varphi_1(t) - \varphi_0(t) \| . \end{aligned}$$

Posons:

$$Q_h(t) = \begin{cases} B_d(\varphi_h(t), (\beta k)^h \| \varphi_1(t) - \varphi_0(t) \|) & si \quad t \in T,\ \varphi_1(t) \neq \varphi_0(t) \\ \{\varphi_h(t)\} & si \quad t \in T,\ \varphi_1(t) = \varphi_0(t). \end{cases}$$

Compte tenu de (1), on voit aisément que $F(\varphi_h(t)) \cap Q_h(t) \neq \emptyset$ pour tout $t \in T$. On peut donc appliquer la Proposition 3, en prenant $G(t) = F(\varphi_h(t))$, $f(t) = \varphi_h(t)$ et $g(t) = (\beta k)^h \| \varphi_1(t) - \varphi_0(t) \|$ pour tout $t \in T$. Alors, la multifonction $t \to \overline{F(\varphi_h(t)) \cap Q_h(t)}$, à valeurs non vides, convexes, fermées, est semi-continue inférieurement dans T et coincide avec ψ sur A. Par conséquent, grâce au Théorème 2, il existe une fonction continue $\varphi_{h+1} : T \to X$ telle que $\varphi_{h+1|A} = \psi$ et $\varphi_{h+1}(t) \in \overline{F(\varphi_h(t)) \cap Q_h(t)}$ pour tout $t \in T$. La fonction φ_{h+1} satisfait donc à (a), (b) et (c) pour $n = h + 1$, ce qui termine la preuve de l'existence de la suite $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. Observons maintenant que la famille $\{\{t \in T : \| \varphi_1(t) - \varphi_0(t) \| < \lambda\}\}_{\lambda>0}$ est un recouvrement ouvert de T et que, dans chaque membre de cette famille, la suite $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, grâce à (c), converge uniformément, puisque X est complet et $\beta k < 1$. Soit φ la limite ponctuelle de $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. D'après ce qui précède, φ est une fonction continue de T dans X telle que $\varphi_{|A} = \psi$. D'ailleurs, si dans (b) on passe à la limite, on obtient $\varphi(t) \in F(\varphi(t))$ pour tout $t \in T$. C'est-à-dire, la fonction φ est à valeurs dans Y, ce qui achève la démonstration.

Parmi les applications du Théorème 1, nous signalons ici le résultat suivant.

THÉORÈME 4. *Soient* $(U, \|\cdot\|_U)$, $(V, \|\cdot\|_V)$ *deux espaces de Banach réels et* Φ *un opérateur linéaire et continu de* U *sur* V. *On pose :* $\alpha = \sup\{\inf\{\|u\|_U : u \in \Phi^{-1}(v)\} : v \in V,\ \|v\|_V \leq 1\}$. *Alors, pour tout* $v \in V$ *et tout opérateur lipschitzien* $\Psi : U \to V$, *avec une constante de Lipschitz* L *telle que* $\alpha L < 1$, *l'ensemble* $\{u \in U : \Phi(u) + \Psi(u) = v\}$ *est un extenseur absolu, non vide, pour les espaces paracompacts, et donc, en particulier, il est connexe par arcs.*

Démonstration. Observons d'abord que, grace au théorème classique de Banach, l'opérateur Φ est ouvert. Par conséquent, la multifonction $v \to \Phi^{-1}(v)$ est un processus convexe ([6], p. 127) semicontinu inférieurement de V dans U. Alors, d'après le Théorème 1 de [6], on a $\alpha < +\infty$. Soient maintenant v et Ψ comme dans l'énoncé. Pour tout $u \in U$, posons $F(u) = \Phi^{-1}(v - \Psi(u))$. Fixons u', $u'' \in U$. Compte tenu du Théorème 6 de [6], on a: $d_H(F(u'), F(u'')) \leq \alpha \| \Psi(u') - \Psi(u'') \|_V \leq \alpha L \| u' - u'' \|_U$, d étant la métrique sur U induite par $\| \cdot \|_U$. Par conséquent, la multifonction F est une contraction multivoque de U dans lui-même, à valeurs convexes et fermées. Alors, comme $\{u \in U : u \in F(u)\} = \{u \in U : \Phi(u) + \Psi(u) = v\}$, la conclusion découle directement du Théorème 1.

En appliquant conjointement le Théorème 1, le Théorème de [7], p. 71, et l'assertion (d) du Théorème 3.1 de [1], on obtient, en outre, le résultat suivant:

THÉORÈME 5. *Soient* X *une partie non vide, convexe et compacte d'un espace de Banach, n un entier positif et* F *une contraction multivoque de* X *dans* X, *à valeurs convexes, fermées et de dimension au moins n. Alors, l'ensemble des points fixes de* F *est un extenseur absolu pour les espaces normaux et sa dimension topologique est supérieure ou égale à n.*

La question suivante semble ouverte:

PROBLÈME 6. Soit Y une partie non vide et fermée d'un espace de Banach E. Supposons que Y soit un extenseur absolu pour les espaces paracompacts. Alors, quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse construire une partie convexe et fermée X de E, avec $Y \subseteq X$, et une contraction multivoque F de X dans X, à valeurs convexes et fermées, de sorte que $Y = \{x \in X : x \in F(x)\}$?

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] E. MICHAEL (1953) - « Pacific J. Math. », *3*, 789-806.
[2] R.E. SMITHSON (1972) - « Nieuw Arch. Wisk. », *20*, 32-53.
[3] E. MICHAEL (1956) - « Ann. of Math. », *63*, 361-382.
[4] J.-P. AUBIN et A. CELLINA (1984) - « Differential inclusions », Springer-Verlag.
[5] H. COVITZ et S.B. NADLER, Jr. (1970) - « Israel J. Math. », *8*, 5-11.
[6] S.M. ROBINSON (1972) - « Trans. Amer. Math. Soc. », *174*, 127-140.
[7] J. SAINT RAYMOND (1984) - « C.R. Acad. Sc. Paris », *298*, série I, 71-74.