Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Alberto Cialdea

L'equazione $\Delta_2 u + a_{10}(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + a_{01}(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + a_{00}(x,y)u = F(x,y)$. Teoremi di completezza

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **81** (1987), n.3, p. 245–257.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1987_8_81_3_245_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1987.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Luglio - Settembre 1987

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Atti Acc. Lincei Rend. fis.
(8), LXXXI (1987), pp. 245–257

Analisi matematica. — *L'equazione* $\Delta_2 u + a_{10}(x, y) \dfrac{\partial u}{\partial x} + a_{01}(x, y) \dfrac{\partial u}{\partial y} + a_{00}(x, y) u = \mathrm{F}(x, y)$. *Teoremi di completezza.* Nota (*) di ALBERTO CIALDEA, presentata dal Socio G. FICHERA.

ABSTRACT. — *The equation* $\Delta_2 u + a_{10}(x, y) \dfrac{\partial u}{\partial x} + a_{01}(x, y) \dfrac{\partial u}{\partial y} + a_{00}(x, y) u = \mathrm{F}(x, y)$. *Completeness theorems.* Under very general hypotheses theorems of completeness in the sense of Picone for equation (1) are proved. As by-product it follows that the Runge approximation property holds.

KEY WORDS: Partial differential equations; Completeness theorems; Boundary value problems.

RIASSUNTO. — In ipotesi molto generali si dimostrano teoremi di completezza nel senso di Picone per l'equazione (1). Come corollario si ottengono teoremi del tipo Runge.

Come annunciato in [3], in questa Nota studio il problema della completezza nel senso di Picone (1) di sistemi di soluzioni particolari della equazione

(*) Pervenuta all'Accademia il 14 agosto 1986.
(1) Cfr. [2], [6] e le bibliografie ivi citate.

omogenea seguente:

$$\Delta_2 u + a_{10}(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + a_{01}(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + a_{00}(x, y)\, u = 0 \tag{1}$$

Come corollario, ottengo dei teoremi tipo Runge, nelle generali ipotesi assunte per i coefficienti. È trattato, infine, il caso particolare in cui a_{10}, a_{01}, a_{00} sono costanti (complesse) e il caso in cui detti coefficienti sono funzioni analitiche.

1. Un teorema di completezza nel senso di Picone

Sia Ω un campo semplicemente connesso e limitato del piano, avente per frontiera una curva $\Sigma = \partial\Omega$ di Jordan semplice di classe $C^{1+\lambda}$; in [3], [4], [5] abbiamo considerato (2) i seguenti operatori:

$$\begin{aligned} \mathrm{L} &= \Delta_2 u + \sum_{|\alpha|\le 1} a_\alpha(z)\, \mathrm{D}^\alpha \qquad && a_\alpha \in \mathrm{C}^\lambda(\overline{\Omega}) \\ \mathrm{B} &= \sum_{|\beta|\le 1} b_\beta(z)\, \mathrm{D}^\beta && b_\beta \in \mathrm{C}^\lambda(\Sigma) \end{aligned} \tag{1.1}$$

dove B verifica la condizione di Lopatinskii. Richiediamo, ora, che gli a_α siano definiti in un aperto connesso Ω_2 tale che $\overline{\Omega} \subset \Omega_2$ e risulti: $a_\alpha \in \mathrm{C}^\lambda(\overline{\Omega}_2)$. Supponiamo, inoltre, che in Ω_2 è verificata la proprietà del prolungamento unico per l'operatore L^*; precisamente faremo quest'ipotesi: *Sia* $\mathrm{A} \subseteq \Omega_2$, A *aperto connesso,* $w \in \mathrm{L}^p(\mathrm{A})$ *tale che*

$$\int_{\mathrm{A}} w\, \mathrm{L}\varphi\, d\tau = 0 \qquad\qquad \forall \varphi \in \overset{\circ}{\mathrm{C}}{}^\infty(\mathrm{A})$$

Se $w = 0$ *q.o. in un aperto* $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$, *allora* $w = 0$ *in* A.

Questa proprietà è verificata se, per $|\alpha| = 1$, si ha $a_\alpha \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega}_2)$ o, più in generale, se $\frac{\partial}{\partial x} a_{10}$ e $\frac{\partial}{\partial y} a_{01}$ (nel senso delle distribuzioni) appartengono a $\mathrm{L}^\infty(\Omega_2)$ (3).

1. *Sia* Ω_1 *un qualsiasi aperto semplicemente connesso tale che* $\overline{\Omega} \subset \Omega_1$, $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$, $\Sigma_1 = \partial\Omega_1$ *una curva di Jordan semplice di classe* $\mathrm{C}^{1+\lambda}$. *Sia* $\mathscr{S}$ *la classe delle funzioni* $f \in \mathscr{U}(\Omega_1)$ *tali che* $\mathrm{L}f = 0$ in Ω_1. *Il sistema* $\{\mathrm{B}f \mid f \in \mathscr{S}\}$ *è com-*

(2) Per le notazioni, cfr. [3], [4], [5].

(3) Cfr. [1], p. 163. Si veda anche [7] e la bibliografia ivi citata.

pleto nello spazio delle funzioni $g \in L^p(\Sigma)$ *tali che:*

$$\int_\Sigma g\phi_j \, ds = 0 \qquad j = 1, \ldots, l \tag{1.2}$$

dove le ϕ_j *sono le funzioni che compaiono in* (I.2.5) (4).

Faremo vedere che, se $\beta \in L^q(\Sigma)$ è tale che

$$\int_\Sigma \beta B f \, ds = 0 \qquad \forall f \in \mathscr{S} \tag{1.3}$$

allora si ha:

$$\int_\Sigma \beta g \, ds = 0$$

per ogni $g \in L^p(\Sigma)$ che verifica le (1.2) ossia tale che $(0, g)$ è ortogonale all'$A(\mathscr{T}^*)$ (dove $\mathscr{T}$ è l'operatore introdotto nella dimostrazione del Teorema 2 di [3]).

Per ogni $f \in \mathscr{S}$ si ha (cfr. Teorema 1 di [3]) che esiste $(\psi, \varphi, c) \in C^\lambda(\overline{\Omega}_1) \times C^\lambda(\Sigma_1) \times \mathbf{C}$ tale che:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_1} \psi(\zeta) \log|z - \zeta| \, d\tau_\zeta + \int_{\Sigma_1} \varphi(\zeta) \log|z - \zeta| \, ds_\zeta + c \tag{1.4}$$

$$\psi(z) + \sum_{|\alpha| \leq 1} a_\alpha(z) D^\alpha \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_1} \psi(\zeta) \log|z - \zeta| \, d\tau_\zeta + \right. \tag{1.5}$$

$$\left. + \int_{\Sigma_1} \varphi(\zeta) \log|z - \zeta| \, ds_\zeta + c \right) = 0 \qquad z \in \Omega_1$$

Poniamo

$$\Gamma(z) = \int_\Sigma \beta(\zeta) \sum_{|\beta| \leq 1} b_\beta(\zeta) D_\zeta^\beta \log|z - \zeta| \, ds_\zeta$$

Invertendo l'ordine di integrazione in (1.3), segue:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_1} \psi \, \Gamma d\tau + \int_{\Sigma_1} \varphi \Gamma ds + c \int_\Sigma b_{00} \, \beta \, ds = 0 \tag{1.6}$$

per ogni $(\psi, \varphi, c) \in C^\lambda(\overline{\Omega}_1) \times C^\lambda(\Sigma_1) \times \mathbf{C}$ che verifichi (1.5).

(4) Con (I.2.5), intendiamo la (2.5) di [3].

Sia $\mathscr{F}$ l'operatore

$$\mathscr{F}: \mathrm{L}^p(\Omega_1) \times \mathrm{L}^p(\Sigma_1) \times \mathbf{C} \to \mathrm{L}^p(\Omega_1) \times \mathrm{L}^p(\Sigma_1)$$

definito al modo seguente: dato $(\psi, \varphi, c) \in \mathrm{L}^p(\Omega_1) \times \mathrm{L}^p(\Sigma_1) \times \mathbf{C}$ si consideri la f data dalla (1.4) e si ponga:

$\mathscr{F}(\psi, \varphi, c) = \left(\mathrm{L}f, \frac{\partial}{\partial s} f\right)$ (dove la $\frac{\partial}{\partial s} f$ è nel senso specificato in [4]). $\mathscr{F}$ risulta essere un operatore riducibile con $\dim \mathrm{A}(\mathscr{F}^*) < \infty$; inoltre le f tali che $\mathrm{L}f = 0$, $\frac{\partial}{\partial s} f = 0$ appartengono ad $\mathscr{S}$ (cfr. dimostrazione del Teorema 2 di [3]). Per $\mathscr{F}^*$ vale quindi il teorema dell'alternativa [5] e da (1.6) segue che $\left(\frac{\Gamma}{2\pi}, \Gamma|_{\Sigma_1}, \int_\Sigma b_{00}\, \beta\, \mathrm{d}s\right)$ è ortogonale all'$\mathrm{A}(\mathscr{F})$. Allora esiste un $(k, h) \in \mathrm{L}^q(\Omega_1) \times \mathrm{L}^q(\Sigma_1)$ tale che $\mathscr{F}^*(k, h) = \left(\frac{\Gamma}{2\pi}, \Gamma|_{\Sigma_1}, \int_\Sigma b_{00}\, \beta\, \mathrm{d}s\right)$. Se indichiamo con $< \cdot, \cdot >$ la dualità tra $\mathrm{L}^q(\Omega_1) \times \mathrm{L}^q(\Sigma_1)$ e $\mathrm{L}^p(\Omega_1) \times \mathrm{L}^p(\Sigma_1)$, da (1.6) si ha: $<(k, h), \mathscr{F}(\psi, \varphi, c)> = 0$ per ogni $(\psi, \varphi, c) \in \mathrm{C}^\lambda(\bar{\Omega}_1) \times \mathrm{C}^\lambda(\Sigma_1) \times \mathbf{C}$ che verifichi la (1.5), ossia:

$$\int_{\Sigma_1} h \frac{\partial}{\partial s} f \,\mathrm{d}s = 0 \qquad \forall f \in \mathscr{S} \tag{1.7}$$

D'altra parte, data una $\mu \in \mathrm{C}^\lambda(\Sigma_1)$, esiste una $f \in \mathscr{S}$ tale che $\frac{\partial}{\partial s} f = \mu$ se, e solo se, μ verifica

$$\int_{\Sigma_1} \mu\, \mathrm{G}_j \,\mathrm{d}s = 0 \qquad j = 1, \ldots, m$$

essendo $(\mathrm{F}_j, \mathrm{G}_j)$ una base di $\mathrm{A}(\mathscr{F}^*)$. Posto

$$\mathrm{P}\mu = \mu - \sum_{j=1}^{m} \int_{\Sigma_1} f \mathrm{G}_j \,\mathrm{d}s\, \gamma_j$$

dove $\gamma_j \in \mathrm{C}^\lambda(\Sigma_1)$ e $\int_{\Sigma_1} \mathrm{G}_i\, \gamma_j \,\mathrm{d}s = \delta_{ij}\ (i, j = 1, \ldots, m)$, la (1.7) equivale a:

$$\int_{\Sigma_1} h\, \mathrm{P}\mu \,\mathrm{d}s = 0 \qquad \forall \mu \in \mathrm{C}^\lambda(\Sigma_1).$$

(5) Dalle proprietà di $\mathscr{F}$ è facile dedurre che $\mathscr{R}(\mathscr{F}^*)$ è chiuso; essendo $\dim \mathrm{A}(\mathscr{F}^*) < \infty$, $\mathscr{F}^*$ è riducibile.

Deve quindi essere $P^* h = 0$, ossia:

$$h = \sum_{j=1}^{m} c_j G_j \quad ; \quad c_j = \int_{\Sigma_1} h \gamma_j \, ds \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

Allora possiamo scrivere: $\mathscr{F}^*(k, h) = \mathscr{F}^*\left(k, \sum_{j=1}^{m} c_j G_j\right) = \mathscr{F}^*\left(k - \sum_{j=1}^{m} c_j F_j, 0\right)$. Abbiamo quindi fatto vedere che esiste una $w \in L^q(\Omega_1)$ tale che $\mathscr{F}^*(w, 0) = \left(\frac{\Gamma}{2\pi}, \Gamma|_{\Sigma_1}, \int_{\Sigma} b_{00} \beta \, ds\right)$. In altri termini:

$$\frac{1}{2\pi} \Gamma(z) = w(z) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_1} w(\zeta) \sum_{|\alpha| \le 1}' a_\alpha(\zeta) D_\zeta^\alpha \log|z - \zeta| \, d\tau_\zeta \tag{1.8}$$

$$z \in \Omega_1$$

$$\Gamma(z) = \int_{\Omega_1} w(\zeta) \sum_{|\alpha| \le 1} a_\alpha(\zeta) D_\zeta^\alpha \log|z - \zeta| \, d\tau_\zeta \qquad z \in \Sigma_1 \tag{1.9}$$

$$\int_{\Sigma} b_{00} \beta \, ds = \int_{\Omega_1} a_{00} w \, d\tau \tag{1.10}$$

La funzione

$$\Gamma(z) - \int_{\Omega_1} w(\zeta) \sum_{|\alpha| \le 1} a_\alpha(\zeta) D_\zeta^\alpha \log|z - \zeta| \, d\tau_\zeta$$

è armonica nel complementare di $\bar{\Omega}_1$, $\mathscr{C}\bar{\Omega}_1$, è nulla sua Σ_1 per la (1.9) e converge a zero all'infinito per la (1.10). Allora deve essere:

$$\Gamma(z) = \int_{\Omega_1} w(\zeta) \sum_{|\alpha| \le 1} a_\alpha(\zeta) D_\zeta^\alpha \log|z - \zeta| \, d\tau_\zeta \qquad z \in \mathscr{C}\Omega_1 \tag{1.11}$$

Poniamo:

$$W(z) \begin{cases} = w(z) & z \in \Omega_1 \\ = 0 & z \in \Omega_2 - \Omega_1 \end{cases}$$

$W \in L^q(\Omega_2)$ e, da (1.8) e (1.11), segue:

$$\frac{1}{2\pi}\Gamma(z) = W(z) + \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_2} W(\zeta)\sum_{|\alpha|\leq 1} a_\alpha(\zeta)\, D_\zeta^\alpha \log|z-\zeta|\, d\tau_\zeta \tag{1.12}$$

$$z \in \Omega_2$$

$\Gamma(z)$ è una funzione armonica sul $\mathscr{C}\,\overline{\Omega}$ e quindi:

$$0 = \int_{\Omega_2-\Omega} \Delta_2\varphi(z)\Big(W(z) + \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_2} W(\zeta)\sum_{|\alpha|\leq 1} a_\alpha(\zeta)\, D_\zeta^\alpha \log|z-\zeta|\, d\tau_\zeta\Big)\, d\tau_z =$$

$$= \int_{\Omega_2-\Omega} W\, L\varphi\, d\tau \qquad \forall\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega_2 - \overline{\Omega}).$$

Per la proprietà del prolungamento unico: $W = 0$ in $\Omega_2 - \overline{\Omega}$.
Da (1.10), (1.11), (1.12) si deduce:

$$\frac{1}{2\pi}\Gamma(z) = w(z) + \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega} w(\zeta)\sum_{|\alpha|\leq 1} a_\alpha(\zeta)\, D_\zeta^\alpha \log|z-\zeta|\, d\tau_\zeta \qquad z \in \Omega$$

$$\Gamma(z) = \int_{\Omega} w(\zeta)\sum_{|\alpha|\leq 1} a_\alpha(\zeta)\, D_\zeta^\alpha \log|z-\zeta|\, d\tau_\zeta \qquad z \in \mathscr{C}\,\overline{\Omega} \tag{1.13}$$

$$\int_{\Sigma} b_{00}\,\beta\, ds = \int_{\Omega} a_{00}\, w\, d\tau$$

La (1.13) implica che:

$$S^*\beta = \int_{\Omega} w(\zeta)\sum_{|\alpha|\leq 1} a_\alpha(\zeta)\, D_\zeta^\alpha \log|z-\zeta|\, d\tau_\zeta$$

per q.o. $z \in \Sigma$. Le ultime relazioni scritte equivalgono a:

$\mathscr{T}^*(-w, \beta) = 0$, con $w \in L^q(\Omega)$. Allora, se $(0, g)$ è ortogonale all'A $(\mathscr{T}^*)$, si deve avere:

$$\int_{\Sigma} \beta g\, ds = 0.$$

2. UN TEOREMA DEL TIPO RUNGE

In tutto questo § supporremo che L sia l'operatore considerato nel § 1. Poniamo:

$$\mathscr{B}(\Sigma) = \left\{ \left(u , \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \in L^p(\Sigma) \times L^p(\Sigma) \mid u \in \mathscr{A}^p ; Lu = 0 \text{ in } \Omega \right\} .$$

Sia J l'operatore seguente:

$$J : L^p(\Omega) \times L^p(\Sigma) \times \mathbf{C} \to L^p(\Omega) \times L^p(\Sigma) \times L^p(\Sigma)$$

$$(\psi, \varphi , c) \to \left(\mathrm{Lu} , u , \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)$$

essendo la u data da:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \psi(\zeta) \log | z - \zeta | \, d\tau_\zeta + \int_{\Sigma} \varphi(\zeta) \log | z - \zeta | \, ds_\zeta + c .$$

J è un operatore riducibile; infatti, posto:

$$J' : L^p(\Omega) \times L^p(\Sigma) \times L^p(\Sigma) \to L^p(\Omega) \times L^p(\Sigma) \times \mathbf{C}$$

$$(w , f , g) \to (w , f + \frac{1}{\pi} g , 0)$$

si ha che J'.J è un operatore di Fredholm.

Ne viene che (f , g) appartiene a $\mathscr{B}(\Sigma)$ se, e solo se, $(0 , f , g)$ è ortogonale all'A (J*) (si osservi che, essendo dim A (J') $= \infty$, si ha: dim A (J*) $= \infty$).

2. *Il sistema* $\left\{ \left(f , \frac{\partial}{\partial \nu} f \right) \middle| f \in \mathscr{S} \right\}$ *è completo in* $\mathscr{B}(\Sigma)$.

Basta far vedere che, se $(\beta_1 , \beta_2) \in L^q(\Sigma) \times L^q(\Sigma)$ è tale che:

$$\int_{\Sigma} (\beta_1 f + \beta_2 \frac{\partial f}{\partial \nu}) \, ds = 0 \qquad \forall f \in \mathscr{S} , \tag{2.1}$$

allora:

$$\int_{\Sigma} \left(\beta_1 u + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds = 0 \qquad \forall \left(u , \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \in \mathscr{B}(\Sigma) . \tag{2.2}$$

Ragionando come nella dimostrazione del teorema 1, da (2.1) si trae:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_1} \psi\, \Gamma\, d\tau + \int_{\Sigma_1} \varphi\, \Gamma ds + c \int_{\Sigma} \beta_1\, ds = 0$$

per ogni $(\psi, \varphi, c) \in C^\lambda(\overline{\Omega}_1) \times C^\lambda(\Sigma_1) \times \mathbf{C}$ che verifichi (1.5) ed essendo, questa volta:

$$\Gamma(z) = \int_{\Sigma} \beta_1(\zeta) \log|z-\zeta|\, ds_\zeta + \int_{\Sigma} \beta_2(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log|z-\zeta|\, ds_\zeta .$$

Ripetendo la detta dimostrazione, si trova che esiste una $w \in L^q(\Omega)$ tale che:

$$\frac{1}{2\pi}\Gamma(z) = w(z) + \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega} w(\zeta) \sum_{|\alpha|\leq 1} a_\alpha(\zeta)\, D^\alpha_\zeta \log|z-\zeta|\, d\tau_\zeta \qquad z \in \Omega$$

$$\Gamma(z) = \int_{\Omega} w(\zeta) \sum_{|\alpha|\leq 1} a_\alpha(\zeta)\, D^\alpha_\zeta \log|z-\zeta|\, d\tau_\zeta \qquad z \in \mathscr{C}\,\overline{\Omega} \tag{2.3}$$

$$\int_{\Sigma} \beta_1\, ds = \int_{\Omega} a_{00}\, w\, d\tau .$$

Dalla (2.3) segue:

$$\int_{\Sigma} \beta_1(\zeta)\log|z-\zeta|\, ds_\zeta + \pi\beta_2(z) + \int_{\Sigma} \beta_2(\zeta)\frac{\partial}{\partial\nu_\zeta}\log|z-\zeta|\, ds_\zeta =$$

$$= \int_{\Omega} w(\zeta) \sum_{|\alpha|\leq 1} a_\alpha(\zeta)\, D^\alpha_\zeta \log|z-\zeta|\, d\tau_\zeta$$

(per q.o. $z \in \Sigma$) e quindi: $J^*(-w, \beta_1, \beta_2) = 0$. Per ogni $(0, g_1, g_2)$ ortogonale all'$A(J^*)$, si ha, dunque:

$$\int_{\Sigma} (\beta_1 g_1 + \beta_2 g_2)\, ds = 0$$

ossia le (2.2).

Sussiste il seguente teorema di unicità:

3. *Sia* $u \in \mathscr{A}^p$ *soluzione del seguente problema:* $Lu = 0$ *in* Ω, $u = 0$ *su* Σ, $\dfrac{\partial}{\partial\nu} u = 0$ *su* Σ. *Allora è:* $u = 0$ *in* Ω.

Poniamo:

$$\tilde{u}(z)\begin{cases} = u(z) & z \in \Omega \\ = 0 & z \in \Omega_1 - \Omega . \end{cases}$$

Si verifica che, con le ipotesi fatte, $\tilde{u}$ appartiene alla classe $\mathscr{A}^p$ relativa ad Ω_1 ed è: $L\tilde{u} = 0$ in Ω_1. Per la proprietà del prolungamento unico, si ha: $u = 0$ in Ω.

Essendo $\mathscr{R}$ (J) chiuso, usando il teorema 3 e il teorema del grafico chiuso, si ha la seguente maggiorazione:

$$(2.4) \qquad ||| u |||_p \leq C \left(\| L u \|_{L^p(\Omega)} + \| u \|_{L^p(\Sigma)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{L^p(\Sigma)} \right)$$

per ogni $u \in \mathscr{A}^p$.

Siamo ora in grado di dimostrare la seguente proprietà di approssima zione del tipo Runge:

4. *Sia u una funzione di classe $C^2(\Omega)$, soluzione dell'equazione*: $Lu = 0$ *in Ω. Per ogni compatto $K \subset \Omega$ e per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una $f \in \mathscr{S}$, tale che*:

$$\max_{z \in K} | u(z) - f(z) | < \varepsilon .$$

Ovviamente basterà dimostrare il teorema nell'ipotesi che K, oltre ad essere contenuto in Ω, sia la chiusura di un campo, $\overset{\circ}{K}$, semplicemente connesso, la cui frontiera è una curva semplice di Jordan di classe $C^{1+\lambda}$. Se $u \in C^2(\Omega)$, si ha: $u \in \mathscr{U}(\overset{\circ}{K})$. Fissiamo un $p > 2$. Per il Teorema 2, esiste una $f \in \mathscr{S}$, tale che:

$$(2.5) \qquad \| u - f \|_{L^p(\partial K)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial f}{\partial \nu} \right\|_{L^p(\partial K)} < \varepsilon .$$

Dalla maggiorazione (2.4) si ottiene, in particolare, che:

$$(2.6) \qquad \| u - f \|_{H^{1,p}(\overset{\circ}{K})} \leq C \left(\| u - f \|_{L^p(\partial K)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial f}{\partial \nu} \right\|_{L^p(\partial K)} \right) .$$

Dai teoremi di immersione di Sobolev, si trae che esiste una costante H, tale che:

$$(2.7) \qquad \| u - f \|_{L^\infty(K)} \leq H \| u - f \|_{H^{1,p}(\overset{\circ}{K})} .$$

Da (2.5), (2.6), (2.7) si ottiene la tesi.

È interessante osservare anche il seguente teorema:

5. *Sia u una funzione, definita in Ω, di classe $\mathcal{A}^p$, soluzione dell'equazione:* $L\,u = 0$ *in* Ω. *Per ogni* $\varepsilon > 0$, *esiste una* $f \in \mathcal{S}$, *tale che:* $|||\, u - f \,|||_p < \varepsilon$.

La dimostrazione segue subito dal Teorema 2 e dalla maggiorazione (2.4).

3. Alcuni casi particolari

Consideriamo gli operatori (1.1) e supponiamo che gli a_α siano costanti complesse.

Osserviamo che, se esistono soluzioni polinomiali di $L\,u = 0$ deve essere $a_{00} = 0$. Infatti, sia $p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$, con p_j polinomio omogeneo di grado j; allora $Lp = a_{00}\,p_n + P_{n-1}$, essendo P_{n-1} un polinomio di grado $n - 1$. Se $a_{00} \neq 0$ ed $Lp = 0$, segue $p_n = 0$ e, per induzione, $p = 0$. È facile anche verificare che, se $a_{00} = 0$, esistono infinite soluzioni polinomiali dell'equazione $L\,u = 0$.

Un polinomio esponenziale è una funzione del tipo.

$$v(z) = p(x\,,y)\,e^{i[x\,\zeta_1 + y\,\zeta_2]} \tag{3.1}$$

dove $p(x\,,y)$ è un polinomio e $\zeta_1\,,\zeta_2$ sono costanti complesse. v, data dalla (3.1) è soluzione di $Lu = 0$ se, e solo se, p è soluzione della seguente equazione a coefficienti costanti:

$$\begin{gathered}\Delta_2 p + (a_{10} + i\,\zeta_1)\,\frac{\partial}{\partial x}\,p + (a_{01} + i\,\zeta_2)\,\frac{\partial}{\partial y}\,p + \\ + L(i\,\zeta_1\,,i\,\zeta_2)\,p = 0\end{gathered} \tag{3.2}$$

dove $L(\xi\,,\eta) = \xi^2 + \eta^2 + \sum_{|\alpha| \leq 1} a_\alpha\,\xi^{\alpha_1}\,\eta^{\alpha_2}$.

Allora se $\zeta_1\,,\zeta_2 \in \mathbf{C}$ sono tali che $L(i\,\zeta_1\,,i\zeta_2) = 0$, per quanto osservato prima, esistono infinite soluzioni polinomiali dell'equazione (3.2) e quindi esistono sempre infiniti polinomi esponenziali (3.1) soluzioni dell'equazione $Lu = 0$.

6. *Siano* L, B *dati da* (1.1) *con gli* a_α *costanti* ($|\,\alpha\,| \leq 1$). *Sia* V *la classe delle combinazioni lineari finite di polinomi esponenziali soluzioni dell'equazione* $L\,u = 0$. *Il sistema* $\{B\,v \mid v \in V\}$ *è completo nello spazio delle funzioni* $g \in L^p(\Sigma)$ *tali che valgano le* (1.2).

Prendiamo come Ω_1 un disco che contenga al suo interno $\overline{\Omega}$ e poniamo $\Omega_2 = \mathbf{C}$. Per il Teorema 1, data una $g \in L^p(\Sigma)$ che verifichi le (1.2), per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una $f \in \mathcal{S}$ tale che

$$\|\, g - B f \,\|_{L^p(\Sigma)} < \varepsilon \tag{3.3}$$

Per teoremi ben noti: $\mathscr{S} \subset C^{\infty}(\Omega_1)$. Inoltre, per un risultato dovuto a Malgrange, V è denso nello spazio delle funzioni $C^{\infty}(\Omega_1)$ che siano soluzioni dell'equazione $L\,u = 0$, munito della topologia della convergenza uniforme su tutti i compatti contenuti in Ω delle funzioni e di tutte le loro derivate (6).

Allora esiste una $v \in V$ tale che

$$\| Bf - B\,v \|_{L^p(\Sigma)} < \varepsilon . \tag{3.4}$$

Da (3.3), (3.4) segue la tesi.

Supponiamo ora che sia $a_{00} = 0$. Come abbiamo già osservato esistono, in questo caso, infinite soluzioni polinomiali dell'equazione $L\,u = 0$.

7. *Sia* $a_{00} = 0$. *Indichiamo con* $\mathscr{P}$ *la classe delle soluzioni polinomiali dell'equazione* $Lu = 0$. *Se* $a_{10}^2 + a_{01}^2 \neq 0$ *oppure* $a_{10} = a_{01} = 0$, *allora il sistema* $\{B\,p \mid p \in \mathscr{P}\}$ *è completo nello spazio delle funzioni* $g \in L^p(\Sigma)$ *tali che valgano le* (1.2).

Siano Ω_1 e Ω_2 come in 6. È elementare verificare che, se $a_{10}^2 + a_{01}^2 \neq 0$ oppure $a_{10} = a_{01} = 0$, tutti i fattori irriducibili di $L(\xi, \eta)$ si annullano per $\xi = \eta = 0$. Malgrange ha dimostrato che, verificandosi ciò, $\mathscr{P}$ è denso nello spazio delle funzioni $C^{\infty}(\Omega_1)$ che sono soluzioni dell'equazione $L\,u = 0$, munito della topologia della convergenza uniforme su tutti i compatti contenuti in Ω delle funzioni e di tutte le loro derivate (7). Basta ripetere, quindi, la dimostrazione di 6 sostituendo $\mathscr{P}$ a V.

Osserviamo che se $a_{10}^2 + a_{01}^2 = 0$ con a_{10} e a_{01} diversi da zero, esistono infinite soluzioni polinomiali, ma, in accordo con i risultati di Malgrange, non valgono i teoremi di completezza. Se, ad esempio:

$$L = \Delta_2 + a_{10}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad (a_{10} \in \mathbf{C})$$

è facile verificare che le uniche soluzioni polinomiali sono $\{z^k \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$. Se valessero i teoremi di completezza, si avrebbe l'assurdo che ogni soluzione dell'equazione $L\,u = 0$ è una funzione olomorfa.

Vogliamo ora considerare il caso in cui gli a_α siano funzioni analitiche delle variabili reali x, y (8). Supponiamo che gli $a_\alpha \in C^{\omega}(\Omega_2)$ e che Ω_1 sia un dominio fondamentale per l'equazione $Lu = 0$. I.N. Vekua ha dimostrato che, se u è soluzione dell'equazione $Lu = 0$ in Ω_1, si ha:

$$u(x, y) = \alpha_0\, G(z_0, \bar z_0, z, \bar z) + \int_{z_0}^{z} \phi(t)\, G(t, \bar z_0, z, \bar z)\, dt + \int_{\bar z_0}^{\bar z} \phi^*(\tau)\, G(z_0, \tau, z, \bar z)\, d\tau \tag{3.5}$$

(6) Cfr. [8].
(7) Cfr. [8].
(8) Per le definizioni e i risultati richiamati, cfr. [9].

dove $G(z, \zeta, t, \tau)$ è la funzione di Riemann dell'equazione $Lu = 0$, z_0 è un punto fissato di Ω_1, α_0 è una costante e ϕ, ϕ^* sono funzioni olomorfe rispettivamente in Ω_1 e $\Omega_1^* = \{\bar{z} \mid z \in \Omega_1\}$. Al variare di α_0, ϕ, ϕ^* la (3.5) rappresenta tutte le soluzioni dell'equazione $Lu = 0$ in Ω_1. Consideriamo il sistema seguente:

$$u_0(x, y) = G(z_0, \bar{z}_0, z, \bar{z})$$

$$u_{2k-1}(x, y) = \int_{z_0}^{z} G(t, \bar{z}_0, z, \bar{z})(t - z_0)^{k-1}\, dt$$

$$u_{2k}(x, y) = \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} G(z_0, \tau, z, \bar{z})(\tau - \bar{z}_0)^{k-1}\, d\tau$$

$k = 1, 2, \ldots$

8. *Nelle ipotesi suddette il sistema* $\{Bu_h \mid h = 0, 1, 2, \ldots\}$ *è completo nello spazio delle funzioni* $g \in L^p(\Sigma)$ *tali che valgano le* (1.2).

Sia $u \in \mathcal{S}$; siano α_0, ϕ, ϕ^* tali che valga (3.5). Siano inoltre:

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(z) \quad ; \quad \phi^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^*(z)$$

dove ϕ_n, ϕ_n^* sono polinomi e le somme convergono uniformemente all'interno di Ω_1. Poniamo:

$$w_n(z) = \alpha_0 G(z_0, \bar{z}_0, z, \bar{z}) + \sum_{j=0}^{n} \int_{z_0}^{z} G(t, \bar{z}_0, z, \bar{z})\, \phi_j(t) +$$

(3.6)

$$+ \sum_{j=0}^{n} \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} G(z_0, \tau, z, \bar{z})\, \phi_j^*(\tau)\, d\tau .$$

Ogni w_n è combinazione lineare finita di u_h. Inoltre è facile dimostrare, utilizzando (3.5), (3.6) che w_n, $\dfrac{\partial}{\partial z} w_n$, $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} w_n$ convergono uniformemente all'interno di Ω_1 a u, $\dfrac{\partial}{\partial z} u$, $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} u$ rispettivamente.

Poiché $\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial z} + \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$, $\dfrac{\partial}{\partial y} = i\left(\dfrac{\partial}{\partial z} - \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$, si ha che $D^\alpha w_n$ converge, uniformemente all'interno di Ω_1, a $D^\alpha u$ ($|\alpha| \leq 1$). Da ciò, con ragionamento analogo a quello fatto in 6 e 7, si ottiene la tesi.

Osserviamo, infine, che nei casi particolari quì considerati, sussistono anche i seguenti risultati:

9. *Sia* L *l'operatore considerato nel Teorema* 6 (7,8)*; si ha:*

a) (*proprietà di approssimazione del tipo Runge*). *Sia* u *una funzione di classe* $C^2(\Omega)$, *soluzione dell'equazione* $L u = 0$ *in* Ω. *Per ogni compatto* $K \subset \Omega$ *e per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste, una* $f \in V$ ($f \in \mathscr{P}$, f *combinazione lineare finita di* $\{u_h\}$) *tale che:* $\max_{z \in K} |u(z) - f(z)| < \varepsilon$.

b) *Il sistema* $\left\{\left(v, \frac{\partial v}{\partial \nu}\right) \middle| v \in V\right\} \left(\left\{\left(p, \frac{\partial p}{\partial \nu}\right) \middle| p \in \mathscr{P}\right\}, \left\{\left(u_h, \frac{\partial u_h}{\partial \nu}\right) \middle| h = 0, 1, 2, \ldots\right\}\right)$ *è completo in* $\mathscr{B}(\Sigma)$.

c) $V(\mathscr{P}, \{u_h \mid h = 0, 1, 2, \ldots\})$ *è completo nello spazio:* $\{u \in \mathscr{A}^p \mid L u = 0\}$ *nella norma* $|||\cdot|||_p$.

Le relative dimostrazioni si ottengono in maniera analoga a quelle dei precedenti teoremi di questo paragrafo, tenendo presente i risultati del § 2.

BIBLIOGRAFIA

[1] BERS L., JOHN F. e SCHECHTER M. (1964) – *Partial Differential Equations.* Intersci Publ. J. Wiley, New York, 1964.

[2] CIALDEA A. – *Un teorema di completezza per i polinomi biarmonici in un campo con contorno angoloso.* « Rend. Matem. », in corso di pubblicazione.

[3] CIALDEA A. (1986) – *L'equazione* $\Delta_2 u + a_{10}(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + a_{01}(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + a_{00}(x, y) u = F(x, y)$. *Teorema di esistenza per un generale problema al contorno,* « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei ».

[4] CIALDEA A. (1986) – *L'equazione* $\Delta_2 u + a_{10}(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + a_{01}(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + a_{00}(x, y) u = F(x, y)$. *Calcolo dell'indice dei problemi al contorno e soluzioni deboli,* « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei ».

[5] CIALDEA A. (1986) – *L'equazione* $\Delta_2 u + a_{10}(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + a_{01}(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + a_{00}(x, y) u = F(x, y)$. *Formule di maggiorazione relative ai problemi al contorno,* « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei ».

[6] FICHERA G. (1979) – *The problem of the completeness of systems of particular solutions of partial differential equations* – Numerical Math., ISNM 49, Birkhauser Verlag Basel.

[7] HÖRMANDER L. (1983) – *Uniqueness theorem for second order elliptic differential equations,* « Comm. in Part Diff. Eq. », *8*, 21-64.

[8] MALGRANGE B. (1956) – *Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution,* « Ann. Inst. Fourier », *6*, 271-355.

[9] VEKUA I.N. (1967) – *New methods for solving elliptic equations,* Amsterdam North-Holland.