Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Massimo Clavelli

Principi di libera costruzione, relativi alla teoria quadro dei fondamenti della matematica di De Giorgi-Forti

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **81** (1987), n.2, p. 103–110.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1987_8_81_2_103_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1987.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Aprile-Giugno 1987

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Atti Acc. Lincei Rend. fis.
(8), LXXXI (1987), pp. 103-110

Logica matematica. — *Principi di libera costruzione, relativi alla teoria quadro dei fondamenti della matematica di De Giorgi-Forti.* Nota di MASSIMO CLAVELLI, presentata (*) dal Socio E. DE GIORGI.

ABSTRACT. — *Free construction principles, in the frame-theory of fundaments of Mathematics of De Giorgi-Forti.* I introduce some schemes of axioms of free construction in a theory that presents pairs, n-tuples and operations as primitive objects. I present some examples.

KEY WORDS: Structure; Isomorphism; Free construction.

RIASSUNTO. — Si introducono alcuni schemi di assiomi di libera costruzione in una teoria che presenta coppie, n-uple e operazioni come oggetti primitivi. Si danno alcuni esempi.

Recentemente vari autori hanno studiato principi di libera costruzione insiemistica, mostrando che tali principi, manifestamente incompatibili con l'assioma di fondazione, sono compatibili con gli altri assiomi delle più note teorie degli insiemi (per esempio Goedel-Bernays, Zermelo-Fraenkel, Fraenkel-Mostowski), cfr. [1], [2], [5], [8] e [9].

Tra i motivi di interesse dei principi di libera costruzione, rileviamo da una parte la loro compatibilità con molti assiomi di autoriferimento incompatibili con l'assioma di fondazione, dall'altra vi è la possibilità, assicurata da tali principi, di associare ai modelli interni non-standard di varie teorie, modelli isomorfi standard e transitivi.

(*) Nella seduta del 29 novembre 1986.

Successivamente è stata proposta in [7] una teoria dei fondamenti della matematica che, pur seguendo nelle grandi linee la presentazione di Goedel-Bernays, se ne distacca perché ammette l'esistenza di molti elementi che non sono insiemi o classi, ma possono essere altri oggetti fondamentali della matematica, coppie, numeri naturali, n-ple, operazioni.

Per l'approfondimento di queste nuove teorie appare opportuna una formulazione molto più generale dei principi di libera costruzione.

Scopo di questa nota è precisamente la presentazione di schemi di assiomi di libera costruzione, in cui rientrano sia i principi di libera costruzione insiemistica studiati in [1], [2], [5], [8] e [9], sia i principi di libera costruzione per n-uple, operazioni, ecc. studiati in [3].

Ringrazio E. De Giorgi, M. Forti, V.M. Tortorelli per le utili conversazioni sull'argomento.

§ 1. Strutture generali

In questo paragrafo e nei seguenti si fa riferimento alle notazioni e definizioni introdotte in [7].

In particolare si ricorda quanto segue: $\emptyset$ è la 0-upla; $[x]$ è la 1-upla di x; se x è una n-upla $(x_1, \ldots, x_n)$ e y è una m-upla $(y_1, \ldots, y_m)$, $x \dot{-} y$ è una $(n + m)$-upla $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ tale che, detta p_i la proiezione i-esima, $p_i(x) = p_i(x \dot{-} y)$ per $i = 1, \ldots, n$ e $p_i(y) = p_{(i+n)}(x \dot{-} y)$ per $i = 1, \ldots, m$ (se x è una n-upla $\emptyset \dot{-} x = x \dot{-} \emptyset = x$); $A \underline{\times} B = \{x \dot{-} y | x \in A \,\&\, y \in B\}$.

1.1. *Definizione.*

Una *struttura* è una operazione o un grafico funzionale definita su una classe di funzioni (così come sono introdotte in [6] quali oggetti operativi estensionali aventi per grafico un insieme e di cui le n-ple sono un caso particolare: le funzioni aventi dominio $\{1, \ldots, n\}$).

Se f è una operazione la struttura si dirà *operativa*, se f è un grafico funzionale la struttura si dirà *grafica*.

L'*ambiente* di una struttura f, indicato con il simbolo $amb(f)$, è l'unione delle immagini delle funzioni su cui f è definita.

Una struttura si dirà *binaria* se ha per valori solo 0 e 1.

1.2. *Definizione.*

Un grafico funzionale iniettivo h si dice un *isomorfismo* tra f e g, se ristretto all'ambiente di f, è una bigezione tra gli ambienti di f e di g e

$$f(\sigma) = z \Longleftrightarrow g(h \circ \sigma) = z$$

dove $h \circ \sigma$ è l'unica funzione determinata da:

$$h(\sigma(x)) = y \Longleftrightarrow h \circ \sigma(x) = y$$

1.3. *Definizione.*

Se f e g sono strutture, f si dice *g-standard* se $\operatorname{dom} g \supseteq \operatorname{dom} f$ e

$$\forall x \in \operatorname{dom} f\,(f(x) = g(x)) .$$

1.4. *Uno schema di assiomi di universalità debole.*

Sia τ una classe di strutture e φ una struttura, l'assioma di τ-φ-universalità debole afferma: « Ogni $f \in \tau$ è isomorfa a una struttura φ-standard ».

1.5. *Esempi di struttura.*

Alcuni esempi significativi di struttura sono i seguenti:

1.5.1. *La struttura degli insiemi.*

Sia φ_{in} il grafico funzionale tale che:

$$\varphi_{in} : \mathrm{Ins} \times \mathrm{V} \twoheadrightarrow \{0\,,1\} \quad ; \quad \varphi_{in}(x\,,y) = 1 \Longleftrightarrow y \in x\,.$$

1.5.2. *La struttura delle coppie.*

Sia φ_{cp} il grafico funzionale tale che:

$$\varphi_{cp} : (\mathrm{V}^2)^1 \underline{\times}\, \mathrm{V}^2 \twoheadrightarrow \{0\,,1\} \quad ; \quad \varphi_{cp}(x\,,y\,,z) = 1 \Longleftrightarrow x = (y\,,z)$$

1.5.3. *La struttura dei numeri naturali con il successore.*

Sia f_{N} una operazione tale che:

$$f_{\mathrm{N}} : \mathrm{N}^2 \twoheadrightarrow \{0\,,1\} \quad ; \quad f_{\mathrm{N}}(n\,,m) = 1 \Leftrightarrow n = m+1\,.$$

1.5.4. *La struttura delle n-ple.*

Sia φ_{urpl} il grafico funzionale tale che:

$$\varphi_{urpl} : \bigcup_{n=0}^{\infty} \left(\bigcup_{m=0}^{\infty} \mathrm{V}^m\right)^1 \underline{\times}\, \mathrm{V}^n \twoheadrightarrow \{0\,,1\} \quad ; \quad \varphi_{urpl}([x] \dot{-} y) = 1 \Leftrightarrow x = y$$

1.5.5. *La struttura delle operazioni.*

Sia φ_{op} il grafico funzionale tale che:

$$\varphi_{op} : \mathrm{Urop}^1 \underline{\times}\, \mathrm{V}^2 \twoheadrightarrow \{0\,,1\} \quad ; \quad \varphi_{op}(x\,,y\,,z) = 1 \Leftrightarrow x(y) = z\,.$$

1.5.6. *La struttura delle operazioni n-arie.*

Una operazione f si dice *n-aria*, se il dominio di f è contenuto in V^n con $n > 0$. La classe delle operazioni n-arie si indicherà con Urop_n.

Sia φ_{ar} il grafico funzionale tale che:

$$\varphi_{ar} : \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathrm{Urop}_m \right)^1 \underline{\times}\, V^{n+1} \to \{0 , 1\} \quad ; \; \varphi_{ar} ([x] \dot{-} y \dot{-} [z]) = 1 \Leftrightarrow x (y) = z \, .$$

§ 2. Alcuni schemi di assiomi di libera costruzione per strutture tipiche

Si osserva che gli esempi di strutture dati nel precedente paragrafo hanno delle caratteristiche in comune, rientrando tutte nella seguente definizione:

2.1. *Definizione.*

Una struttura binaria f si dirà *tipica* di *tipo* $n + 1$, se il dominio di f è $B^1 \underline{\times} A^n$ con $A \supseteq B$ classi, $n \in \mathbf{N}$.

Una struttura binaria f si dirà *tipica* di *tipo* $(m + 1 , k + 1)$ dove $m \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, $m < k$, se il dominio di f è $\bigcup_{n=m}^{k} B^1 \underline{\times} A^n$, $A \supseteq B$ classi.

Si osserva che in entrambi i casi A è l'ambiente di f, B verrà detta la *classe degli oggetti* di f e denotata con $ogg (f)$.

Si osserva altresì che se h è un isomorfismo tra le strutture tipiche f e g si ha:

$$f (x_0 , \ldots , x_n) = y \Leftrightarrow g (h (x_0) , \ldots , h (x_n)) = y \, .$$

2.2. *Definizione.*

Siano f e g strutture tipiche, f si dirà *g-transitiva*, se:

$$(x \in \mathrm{amb}\,(f) \cap \mathrm{ogg}\,(g) \Rightarrow x \in \mathrm{ogg}\,(f))\ \&\ ((g\,(x_0 , x_1 , \ldots , x_n) = \\ = 1\ \&\ x_0 \in \mathrm{amb}\,(f)) \Rightarrow x_1 , \ldots , x_n \in \mathrm{amb}\,(f)) \, .$$

(Per comprendere perché si è usata la parola « transitiva » si osservi che in particolare l'ambiente di f è g-transitivo nel senso che segue: una classe A si dice *g-transitiva* se $(g\,(x_0 , x_1 , \ldots , x_n) = 1\ \&\ x_0 \in A) \Rightarrow x_1 , \ldots , x_n \in A$. Si osservi che quando A è una classe contenuta in $\mathrm{Ins} \cup \mathrm{Ur}$, la φ_{in}-transitività di A è l'usuale transitività delle classi).

Per le strutture tipiche si possono dare degli altri schemi di assiomi di libera costruzione, grazie all'introduzione del concetto di struttura g-transitiva.

In quanto segue τ è un'opportuna classe di strutture tipiche e φ è un'opportuna struttura tipica, ad esempio una di quelle di 1.5.

2.3. *Assioma di τ-φ-universalità*:

Ogni $f \in \tau$ è isomorfa a una struttura φ-standard e φ-transitiva.

2.4. *Assioma di τ-φ-universalità superatomica :*

Sia data una $f \in \tau$, tale che amb $(f) \cap$ ogg $(\varphi) = \varnothing$, e sia C una classe contenuta in amb (f) — ogg (f); allora esiste un isomorfismo h tra f e una struttura φ-standard e φ-transitiva, tale che h ristretto a C sia l'identità.

2.5. *Assioma di τ-φ-superuniversalità :*

Sia data una $f \in \tau$ e sia g una struttura f-standard, f-transitiva, φ-standard e φ-transitiva; allora esiste un isomorfismo h tra f e una struttura φ-standard e φ-transitiva, tale che h ristretto a amb (g) sia l'identità.

§ 3. ALCUNI ESEMPI DI ASSIOMI DI LIBERA COSTRUZIONE

Teoremi di consistenza relativa di assiomi di libera costruzione sono stati dimostrati in [3]. Qui ci limitiamo a indicare molto sinteticamente tali assiomi. Per abbreviare l'enunciato dei diversi assiomi, conviene premettere alcune definizioni.

3.1. *Definizioni.*

Una struttura si dice *locale* se il suo ambiente è un insieme.
Una struttura tipica f si dice *estensionale* (*debolmente*) se:

$$(\forall t\,, n \in \mathbf{N}\,, z_1\,, \ldots\,, z_n\,(f(x\,, z_1\,, \ldots\,, z_n) = t \Longleftrightarrow f(y\,, z_1\,, \ldots\,, z_n) = \\ = t)\;\&\; x\,, y \in \mathrm{ogg}\,(f)) \Rightarrow x = y\,.$$

Una struttura tipica f si dice *di oggetti piccoli* se:

$$\forall x\,(\{y \mid f([x] \dotplus y) = 1\} \in \mathrm{Ins})\,.$$

Una struttura tipica f si dice *funzionale* se:

$$f([x] \dotplus y \dotplus [u]) = f([x] \dotplus z \dotplus [u]) = 1 \Rightarrow y = z\,.$$

Una struttura tipica f si dice *semplice* se:

$$\forall x \in \mathrm{ogg}\,(f)\; \exists!\, y\,(f([x] \dotplus y) = 1)\,.$$

Una struttura tipica f si dice *pura* se amb $(f) =$ ogg (f).

Una struttura tipica f si dice *ben ariata* se:

$$f([x] \dot{-} y) = f([x] \dot{-} z) = 1 \Rightarrow \exists n \in \mathbf{N}\,(y\,,z \in \mathrm{V}^n)\,.$$

Enunciamo adesso gli assiomi studiati in [3].

3.2. *Assiomi di libera costruzione per insiemi.*

Per ottenere degli assiomi di libera costruzione per insiemi, si può prendere come φ la struttura tipica φ_{in} e come τ la classe τ_{in} delle strutture operative tipiche di tipo 2, estensionali e per oggetti piccoli.

3.3. *Assiomi di libera costruzione per coppie e n–uple.*

Per ottenere degli assiomi di libera costruzione per coppie, si può prendere come φ la struttura tipica φ_{cp} e come τ la classe τ_{cp} delle strutture operative tipiche di tipo 3, estensionali e semplici.

Per ottenere degli assiomi di libera costruzione per n-uple, si può prendere come φ la struttura tipica φ_{urpl} e come τ la classe τ_{urpl} delle strutture operative tipiche di tipo $(1\,,\infty)$, estensionali e semplici.

Si osserva che gli assiomi di libera costruzione per coppie implicano in particolare l'esistenza di oggetti del tipo $x = (x\,,x)$ e simili o di catene discendenti di coppie; analogo discorso può farsi per le n-uple.

Si verifica immediatamente che gli assiomi di libera costruzione per n-uple implicano in particolare i corrispondenti assiomi di libera costruzione per coppie, se le strutture di τ_{urpl} sono tutte locali.

3.4. *Assiomi di libera costruzione per operazioni e operazioni arie.*

Per ottenere degli assiomi di libera costruzione per operazioni, si può prendere come φ la struttura tipica φ_{op} e come τ la classe τ_{op} delle strutture operative tipiche di tipo 3 e funzionali.

Per ottenere degli assiomi di libera costruzione per operazioni arie, si può prendere come φ la struttura tipica φ_{ar} e come τ la classe τ_{ar} delle strutture operative tipiche di tipo $(3\,,\infty)$, funzionali e ben ariate.

Gli assiomi di libera costruzione per operazioni implicano in particolare l'esistenza di operazioni che si autoapplicano.

Gli assiomi di libera costruzione per operazioni arie, implicano in particolare l'esistenza, per esempio, di operazioni x, tali che $x(x\,,x) = x$, esistenza che non può essere desunta dagli assiomi di libera costruzione per operazioni.

3.5. *Altri assiomi più deboli di libera costruzione.*

Si possono ottenere degli altri assiomi di libera costruzione in generale più deboli, restringendo la classe τ alle strutture, che siano per oggetti piccoli o locali pure e/o estensionali.

§ 4. ALCUNI SCHEMI DI ASSIOMI COMPLESSIVI DI LIBERA COSTRUZIONE

Dopo aver studiato assiomi di libera costruzione relativi ad una singola struttura, conviene considerare assiomi di libera costruzione complessivi, relativi ad una n-upla di strutture.

Siano τ una classe di n-ple di strutture e le φ_i strutture, si può enunciare un primo schema di assiomi complessivi di libera costruzione, generalizzando l'assioma di universalità debole del § 1.

4.0. *Assioma di τ-φ_1-...-φ_n-universalità debole.*

Sia $(f_1, \ldots, f_n) \in \tau$; allora esiste un grafico funzionale iniettivo h, tale che, per $i = 1, \ldots, n$, h è un isomorfismo tra f_i e una struttura φ_i-standard.

Se poi le τ_i sono classi di strutture tipiche e le φ_i sono strutture tipiche, si possono generalizzare gli assiomi del § 2 nel modo seguente.

4.1. *Assioma di τ_1-...-τ_n-φ_1-...-φ_n-universalità.*

Siano $f_i \in \tau_i$ $i = 1, \ldots, n$, tali che $\text{ogg}(f_i) \cap \text{ogg}(f_j) = \varnothing$ per $i \neq j$; allora esiste un grafico funzionale iniettivo h, tale che, per $i = 1, \ldots, n$, h è un isomorfismo tra f_i e una struttura φ_i-standard e φ_i-transitiva.

4.2. *Assioma di τ_1-...-τ_n-φ_1-...-φ_n-universalità superatomica.*

Siano $f_i \in \tau_i$ $i = 1, \ldots, n$, tali che $\text{amb}(f_i) \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} \text{ogg}(\varphi_k)\right) = \varnothing$, $\text{ogg}(f_i) \cap \text{ogg}(f_j) = \varnothing$ per $i \neq j$ e sia C una classe contenuta in

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} \text{amb}(f_i)\right) - \left(\bigcup_{i=1}^{n} \text{ogg}(f_i)\right);$$

allora esiste un grafico funzionale iniettivo h, tale che, per $i = 1, \ldots, n$, h è un isomorfismo tra f_i e una struttura φ_i-standard e φ_i-transitiva e h ristretto a C è l'identità.

4.3. *Assioma di τ_1-...-τ_n-φ_1-...-φ_n-superuniversalità.*

Siano $f_i \in \tau_i$ $i = 1, \ldots, n$, tali che $\text{ogg}(f_i) \cap \text{ogg}(f_j) = \varnothing$ per $i \neq j$ e per $i = 1, \ldots, n$ sia g_i una struttura f_i-standard, f_i-transitiva, φ_i-standard e φ_i-transitiva e $\text{ogg}(g_i) = \text{ogg}(f_i) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} \text{amb}(g_j)\right) = \text{ogg}(\varphi_i) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} \text{amb}(g_j)\right)$; allora esiste un grafico funzionale iniettivo h, tale che, per $i = 1, \ldots, n$, h è un isomorfismo tra f_i e una struttura φ_i-standard e φ_i-transitiva e h ristretta ad $\text{amb}(g_i)$ è l'identità, per $i = 1, \ldots, n$.

4.4. *Osservazioni.*

Gli assiomi presentati nel paragrafo 2 sono casi particolari per $n = 1$ degli assiomi presentati in questo paragrafo.

L'assioma 4.3 implica l'assioma 4.1 e, nei casi più naturali, l'assioma 4.2. Se le τ_i sono chiuse (nel senso che se $f \in \tau_i$ e h è un grafico funzionale iniettivo con dominio contenente l'ambiente di f, esiste una $g \in \tau_i$ tale che h è un isomorfismo tra f e g), si ha che l'assioma 4.2 implica l'assioma 4.1, se $| V | = | V - \bigcup_{i=1}^{n} \varphi_i |$.

4.5. *Esempi.*

Si danno alcuni esempi di assiomi complessivi di libera costruzione che risultano relativamente consistenti (per la relativa consistenza vedere [3] e [4]):

i) Gli *assiomi complessivi di libera costruzione per operazioni ed operazioni arie*, che si ottengono prendendo $n = 2$, $\tau_1 = \tau_{op}$, $\tau_2 = \tau_{ar}$, $\varphi_1 = \varphi_{op}$ e $\varphi_2 = \varphi_{ar}$.

ii) Gli *assiomi complessivi per insiemi, uruple e operazioni* che si ottengono prendendo $n = 3$, $\tau_1 = \tau_{in}$, $\tau_2 = \tau_{urpl}$, $\tau_3 = \tau_{op}$, $\varphi_1 = \varphi_{in}$, $\varphi_2 = \varphi_{urpl}$ e $\varphi_3 = \varphi_{op}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOFFA M. (1969) – *Sur la theorie des ensemble sans axiome de fondement*, « Bull. Soc. Math. Belg. », *21*, 16-56.

[2] BOFFA M. (1972) – *Forcing et négation de l'axiome de fondement*, « Mem. Acad. Sc. Belg. », *40* (7).

[3] CLAVELLI M. (1986) – *I principi di libera costruzione per coppie, uruple, operazioni e funzioni nella teoria quadro dei fondamenti della matematica di De Giorgi-Forti*. « Dip. di Mat. », Pisa, quad. n. 162.

[4] CLAVELLI M. – *Consistenza relativa dell'assioma complessivo di superuniversalità per insiemi, uruple e operazioni* (in preparazione).

[5] CLAVELLI M. (1986) – *Universalità, superuniversalità, pseudo-modelli, relazioni di pseudo-universo e tecniche elementari*, Sc. Nor. Sup., Pisa (in attesa di ristampa sugli « Atti dell'Accademia dei Lincei », Rend. Sci. Fis. Mat. Nat.).

[6] DE GIORGI E., FORTI M., TORTORELLI V.M. e CLAVELLI M. – *Un'estensione della teoria quadro : relazioni, qualità, funzioni e variabili* (in preparazione).

[7] DE GIORGI E. e FORTI M. – *Una teoria quadro per i fondamenti della matematica*, « Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Sci. Fis. Mat. Nat. ».

[8] FORTI M. e HONSELL F. (1983) – *Set theory with free construction principles*, « Ann. Sc. Nor. Sup. di Pisa, Clas. Sci. », Ser. VI, *10*, 493-522.

[9] FORTI M. e HONSELL F. – *Axiom of choise and free construction principles*, « Bull. Soc. Math. Belg. », Ser. B., *36*, 69-79.