
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

LUIGI CARLOMUSTO, AUGUSTO PIANESE, MICHELE
CAPUTO

Analisi tridimensionale dello sforzo di taglio massimo per carichi sulla superficie di una sfera

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 81 (1987), n.1, p. 61–71.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1987_8_81_1_61_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Fisica dell'interno della Terra. — Analisi tridimensionale dello sforzo di taglio massimo per carichi sulla superficie di una sfera. Nota di LUIGI CARLOMUSTO (*), AUGUSTO PIANESE (*) e MICHELE CAPUTO (**), presentata (***) dal Socio M. CAPUTO.

ABSTRACT. — *Maximum shear stress in a tridimensional earth model.* We analyse the maximum shear stress (MSS) in an earth model formed with two layers and a core subject to body forces and surface tractions with threedimensional nature. We find that when the surface traction and their isostatic body forces act on a narrow band in latitude and are described by peaks at regular distances, the MSS has a maximum in the superficial layer. By reducing the spacing between the peaks the maximum of the MSS moves toward the surface of the sphere. The geophysical implication is that, the seismicity, under narrow mountain ranges, if caused by the topographic load, should be close to the surface of the brittle part of crust as is observed in many instances. We simulate a model of the Apennines and find that the maximum of the MSS is at a depth of about 9 Km which coincides with the depth of the maximum concentration of earthquakes in that region.

KEY WORDS: Shearstress; Seismicity; Earthmodel.

RIASSUNTO. — Il presente lavoro si inquadra nella problematica teorica relativa alla determinazione del rischio sismico.

In esso si affronta per la prima volta lo studio in tre dimensioni del tensore degli sforzi e del massimo sforzo di taglio (MST), assumendo un modello stratificato della Terra che prevede la presenza e di carichi superficiali e di forze di massa.

I carichi considerati in questa nota simulano quelli causati da una catena montuosa formata da picchi di uguale altezza distribuiti ad uguale distanza ad una prefissata latitudine ed isostaticamente compensati.

Risolvendo in maniera esatta le equazioni dell'elastostatica, per tale modello, si ottiene che la sismicità tende ad essere più intensa e più superficiale quando la catena montuosa è stretta ed i picchi sono ravvicinati, che è il caso di catene montuose di formazione recente. Per picchi a distanza di 100 Km ad esempio il massimo del MST è a 10 Km di profondità. Si verifica quindi che nell'Appennino la profondità dei terremoti è concentrata a circa 9 Km di profondità.

INTRODUZIONE

Nel presente lavoro sarà affrontato per la prima volta lo studio in tre dimensioni del tensore degli sforzi ed in particolare dello sforzo di taglio massimo

(*) Dipartimento di Matematica e Fisica, Università di Camerino (Italy).

(**) Department of Geophysics, Texas A & M University, College Station, Tx 77843-3114 (U.S.A.).

(***) Nella seduta del 20 giugno 1986.

in una sfera elastica. L'andamento di tale sforzo di taglio massimo (MST) è infatti studiato in funzione di Θ e Φ (coordinate sferiche) e della profondità, in presenza e del carico superficiale (montagne) e delle forze di massa.

L'aspetto più interessante sarà l'analisi di come varia l'andamento di MST al variare delle dimensioni delle montagne assunte come carico; in particolare si partirà da altopiani aventi dimensioni molto estese per arrivare a carichi assimilabili a montagne strette come gli Appennini ed ancora più strette.

L'importanza di tale studio è documentata dal fatto che sono numerosissimi i fenomeni che accadono sulla superficie della terra e nel suo interno per l'interpretazione dei quali occorre una stima accurata del tensore degli sforzi.

Il primo e fondamentale esempio di tali problemi è la stima del rischio sismico sulla terra e negli oceani; a questo si possono aggiungere problemi quali l'uso di metodi deterministici per la previsione dei terremoti o lo studio di modelli elastici della terra considerata formata da vari strati interagenti fra di loro.

Data quindi la grande importanza della conoscenza del tensore degli sforzi si è tentata da varie parti sia la misura diretta di tale tensore, sia la sua determinazione indiretta tramite modelli per quelle profondità per le quali non è ipotizzabile una misurazione diretta. Misure dirette del tensore degli sforzi sono state effettuate nella parte più superficiale della crosta terrestre (McGarr e Gay, 1978). Pochissime misurazioni invece sono state effettuate al di sotto di 2 Km, ed in genere tali misurazioni sono state effettuate per scopi di ricerca applicativa piuttosto che di ricerca scientifica, il che le rende di limitato interesse per la soluzione della maggior parte dei problemi scientifici concernenti l'interno terrestre.

Per quanto riguarda i modelli adottati citiamo per tutti quello di Jeffreys (1976) che considera la crosta terrestre come un sottile guscio racchiudente un fluido che non può sopportare sforzi di taglio; in questo caso lo sforzo di taglio massimo può essere al più 10 volte il carico applicato.

Altri modelli di maggior rilievo sono quelli di Artyushkov (1973, 1974), McKenzie (1967), Lambeck e Nakiboglu (1980), O'Connell e Hager (1983). In tale contesto si inserisce il nostro modello elastico descritto in seguito.

1. MODELLO ELASTICO E CALCOLO DELLO SFORZO DI TAGLIO MASSIMO

Nella nostra analisi la terra viene assimilata ad una sfera elastica di parametri elastici λ e μ , stratificata in tre strati: un nucleo centrale di parametri elastici $\lambda_1 = 6 \cdot 10^{12}$ e $\mu_1 = 6 \cdot 10^{12}$ e raggio $R_1 = 6.271 \cdot 10^8$, uno strato intermedio di raggi R_1 e $R_2 = 6.321 \cdot 10^8$ e parametri $\lambda_2 = 3.75 \cdot 10^{12}$ e $\mu_2 = 3.5675 \cdot 10^{12}$ ed uno strato superficiale di raggi R_2 e $R_3 = 6.371 \cdot 10^8$, con R_3 raggio terrestre, e parametri $\lambda_3 = 1.5 \cdot 10^{12}$ e $\mu_3 = 1.135 \cdot 10^{12}$. Per un modello siffatto, in assenza di forze di massa, gli spostamenti sono stati ottenuti da Caputo (1961),

usando un metodo introdotto da Picone (1936), Fichera (1949) ed Aquaro (1949), come soluzione delle equazioni:

$$(1) \quad (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{S} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{S} = 0 \quad \text{su } T - FT$$

$$\lambda \operatorname{div} \mathbf{S} \bar{\nu} + 2\mu \frac{d\mathbf{S}}{d\nu} + \mu \bar{\nu} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{S} + f_r = 0 \quad \text{su } FT$$

dove T è il generico strato, f_r è il carico superficiale, supposto diretto radialmente ed \mathbf{S} è il vettore spostamento.

Tali soluzioni hanno forma di serie uniformemente convergenti:

$$(2) \quad \begin{aligned} {}_i S_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2n} {}_i U_{nk} Y_{nk} \\ {}_i S_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2n} \left[{}_i Y_{nk}(R) \frac{\partial Y_{nk}}{\partial \Theta} + {}_i W_{nk}(R) \frac{\partial Y_{nk}}{\sin \Theta \partial \Phi} \right] \\ {}_i S_3 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2n} \left[{}_i V_{nk}(R) \frac{\partial Y_{nk}}{\sin \Theta \partial \Phi} - {}_i W_{nk}(R) \frac{\partial Y_{nk}}{\partial \Theta} \right] \end{aligned}$$

dove le $Y_{nk}(\Theta, \Phi)$ sono le armoniche sferiche; $U(R)$, $V(R)$, $W(R)$ funzioni note (Caputo *a*) di R e dei parametri elastici; R , Θ , Φ sono le coordinate sferiche riferite al centro della sfera che definisce il modello della terra; i indica lo i -esimo strato del modello, ${}_i S_1$, ${}_i S_2$, ${}_i S_3$, sono le componenti dello spostamento nelle direzioni R , Θ , Φ e nello strato i -esimo.

Nel caso in cui nel generico strato intermedio agiscano anche le forze di massa, nella prima delle (1) compare ora per tali forze un termine F .

Quindi, per lo strato su cui agiscono le forze di massa, le soluzioni si ottengono aggiungendo alle soluzioni in assenza di forze di massa le soluzioni particolari date da:

$$(3) \quad \begin{aligned} S_1 &= \left[-\frac{D_{00} R^2}{4(\lambda + 2\mu)} - \sum_{j=0}^2 \frac{R(\lambda + \mu)}{4\mu(\lambda + 2\mu)} D_{1j} Y_{1j} + \right. \\ &+ \left. \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{D_{nk}}{(n+2)(n-1)\mu} Y_{nk} \right] \rho g \\ S_2 &= \left[-\sum_{j=0}^2 \frac{3R(\lambda + \mu)}{8\mu(\lambda + 2\mu)} D_{1j} \frac{\partial Y_{1j}}{\partial \Theta} + \right. \\ &+ \left. \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{2D_{nk}}{\mu(n^2-1)(n+2)n} \frac{\partial Y_{nk}}{\partial \Theta} \right] \rho g \\ S_3 &= \left[-\sum_{j=0}^2 \frac{3R(\lambda + \mu)}{8\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{D_{1j}}{\sin \Theta} \frac{\partial Y_{1j}}{\partial \Phi} + \right. \\ &+ \left. \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{2D_{nk}}{\mu n(n^2-1)(n+2)\sin \Theta} \frac{\partial Y_{nk}}{\partial \Phi} \right] \rho g. \end{aligned}$$

Per calcolare i valori delle quantità $D_{nk} g \varphi$, che compaiono nelle precedenti, si è tenuto conto dell'uguaglianza tra la spinta di massa e il carico superficiale, ottenendo pertanto, per tale caso:

$$(4) \quad \rho g D_{nk} = \frac{R_m^2}{h} \int_{\Omega} f_r y_{nk} d\Omega$$

dove $d\Omega = \sin \Theta d\Theta d\Phi$, R_m è il raggio medio dello strato ed h è lo spessore di tale strato ($R_2 - R_1$).

Come si vede nella (4), ed in tutte le formule in cui compare il carico esterno f_r , tale carico sarà espresso in termini di Y_{nk} ed integrato in $d\Omega$ su tutta la superficie sferica.

Si è pertanto sfruttata tale circostanza per trovare una soluzione esatta del problema. Tale soluzione è stata trovata assumendo come carico esterno proprio un'armonica, cioè $f_r = Y_{\bar{n}\bar{k}}$, in tal modo tutti gli integrali del tipo $\int_{\Omega} f_r Y_{nk} d\Omega$

risultano nulli tranne quelli in cui $n = \bar{n}$ e $k = \bar{k}$; per cui le serie che compaiono nelle (2) e (3) hanno anch'esse tutti i termini nulli tranne quelli in cui $n = \bar{n}$ e $k = \bar{k}$, e tali termini costituiscono pertanto una soluzione esatta del problema posto.

È stato pertanto risolto con tale carico, $f_r = Y_{\bar{n}\bar{k}}$, il problema generale: assumendo F , nel secondo strato, tale da equilibrare il carico ed evitare accelerazioni: si è calcolato cioè per ogni punto (R, Θ, Φ) sia il valore degli spostamenti che la matrice del tensore degli sforzi; tale matrice è stata diagonalizzata ottenendo lo sforzo massimo (MST) come semidifferenza tra il valore massimo ed il valore minimo della diagonale della matrice diagonalizzata.

Tali calcoli sono stati poi automatizzati in modo da permettere di giungere a valori alti di n e k .

2. DISCUSSIONE DEI RISULTATI

Un primo problema che è stato affrontato ed automatizzato sul calcolatore è stato quello del calcolo delle armoniche sferiche.

Si è riusciti, con particolari accorgimenti, a calcolare tali armoniche fino a valori di n e k pari a 650, 1300 rispettivamente.

Dall'analisi di tali armoniche si è notato che per $n = k$ esse hanno sempre un andamento particolare, e cioè al variare di Θ (fisso Φ) presentano un unico massimo centrale la cui ampiezza va man mano restringendosi al crescere di $n = k$; al variare di Φ (fisso Θ) si ha invece sempre un andamento sinusoidale, la cui frequenza, pari a $k/(2 * \pi)$, aumenta chiaramente all'aumentare di $k = n$.

Si è assunto pertanto come carico esterno proprio tali armoniche particolari ($n = k$), avendo l'accortezza di normalizzarle tutte in modo che l'altezza massima di ogni armonica fosse pari ad 1. Gli andamenti di tali armoniche sono riportati nelle figg. 1 e 2.

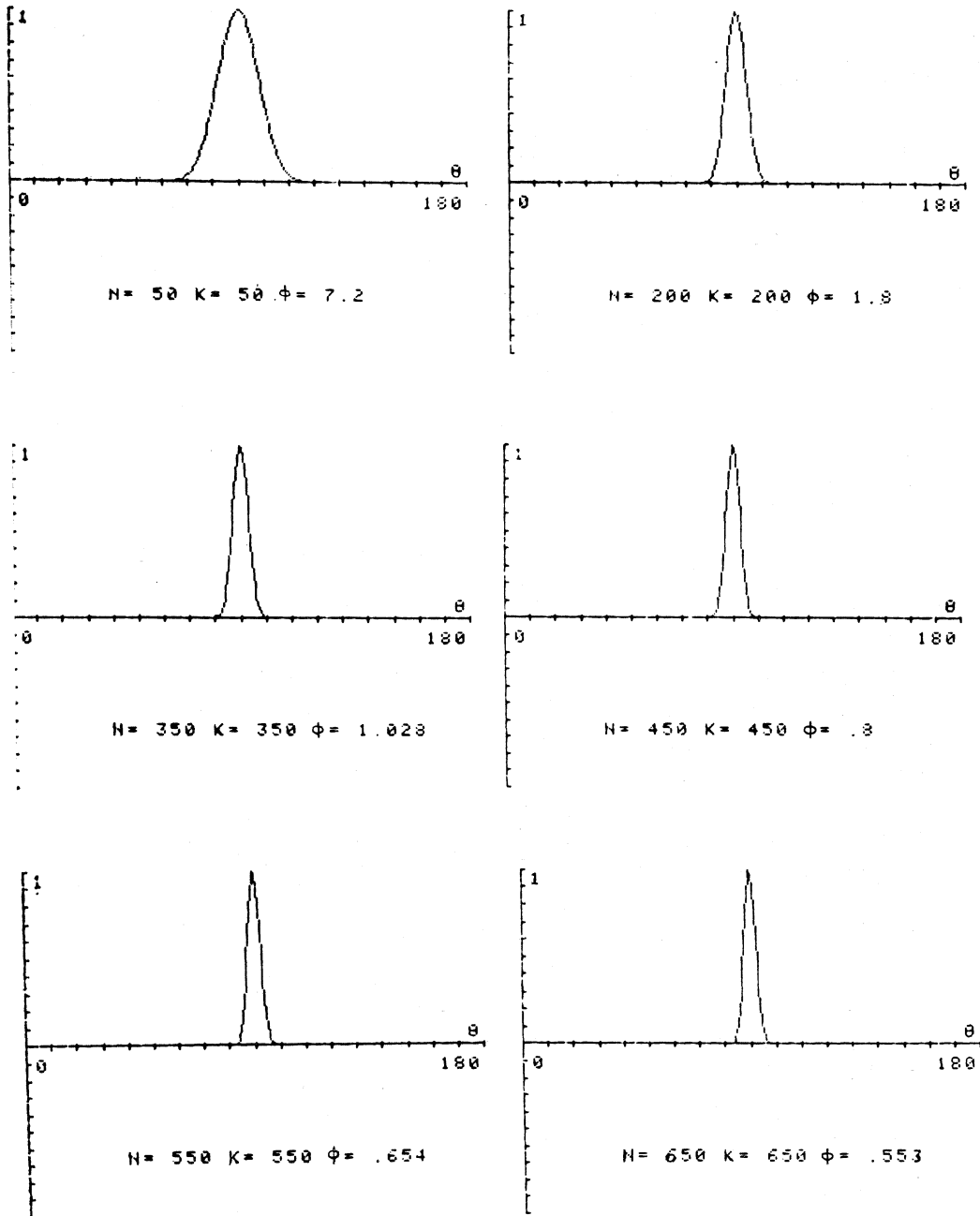


Fig. 1. - Andamento delle armoniche Y_{kk} al variare di θ con Φ costante.

Nella fig. 1 si riporta l'andamento delle armoniche al variare di θ con Φ costante; mentre nella fig. 2 varia Φ e θ resta costante.

Tali andamenti simulano pertanto le nostre montagne.

Come si vede dalle figure, salendo nei valori di $n = k$ si hanno configura-

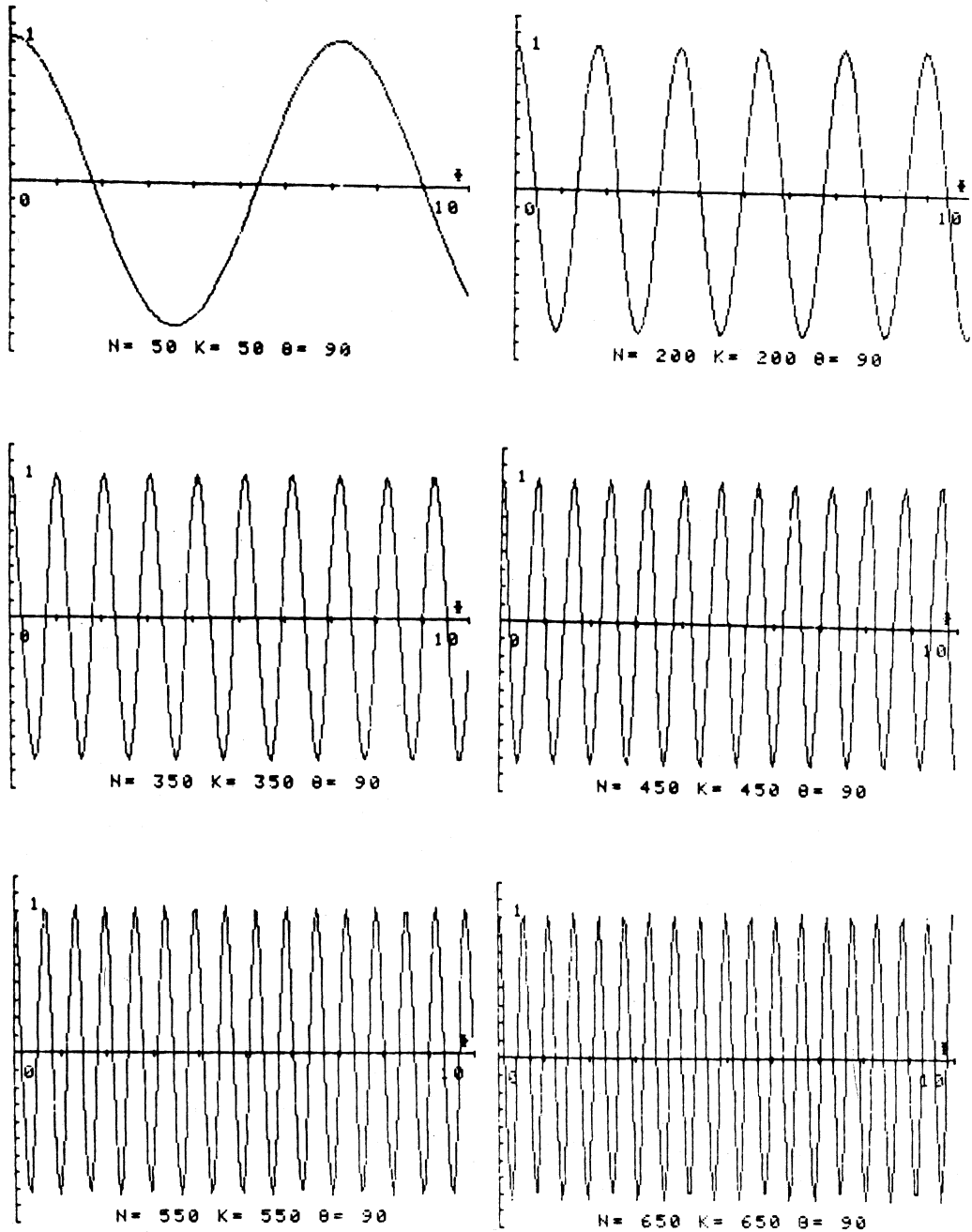


Fig. 2. - Andamento delle armoniche Y_{kk} al variare di Φ con θ costante.

zioni che possono assimilarsi a situazioni realmente esistenti nelle montagne della Terra.

Per esempio per valori di $n = k = 550$ si ha una catena montuosa lunga circa 14° su Θ , che varia sinusoidalmente su Φ con una distanza da picco a picco di circa due terzi di grado (pari a circa 80 Km).

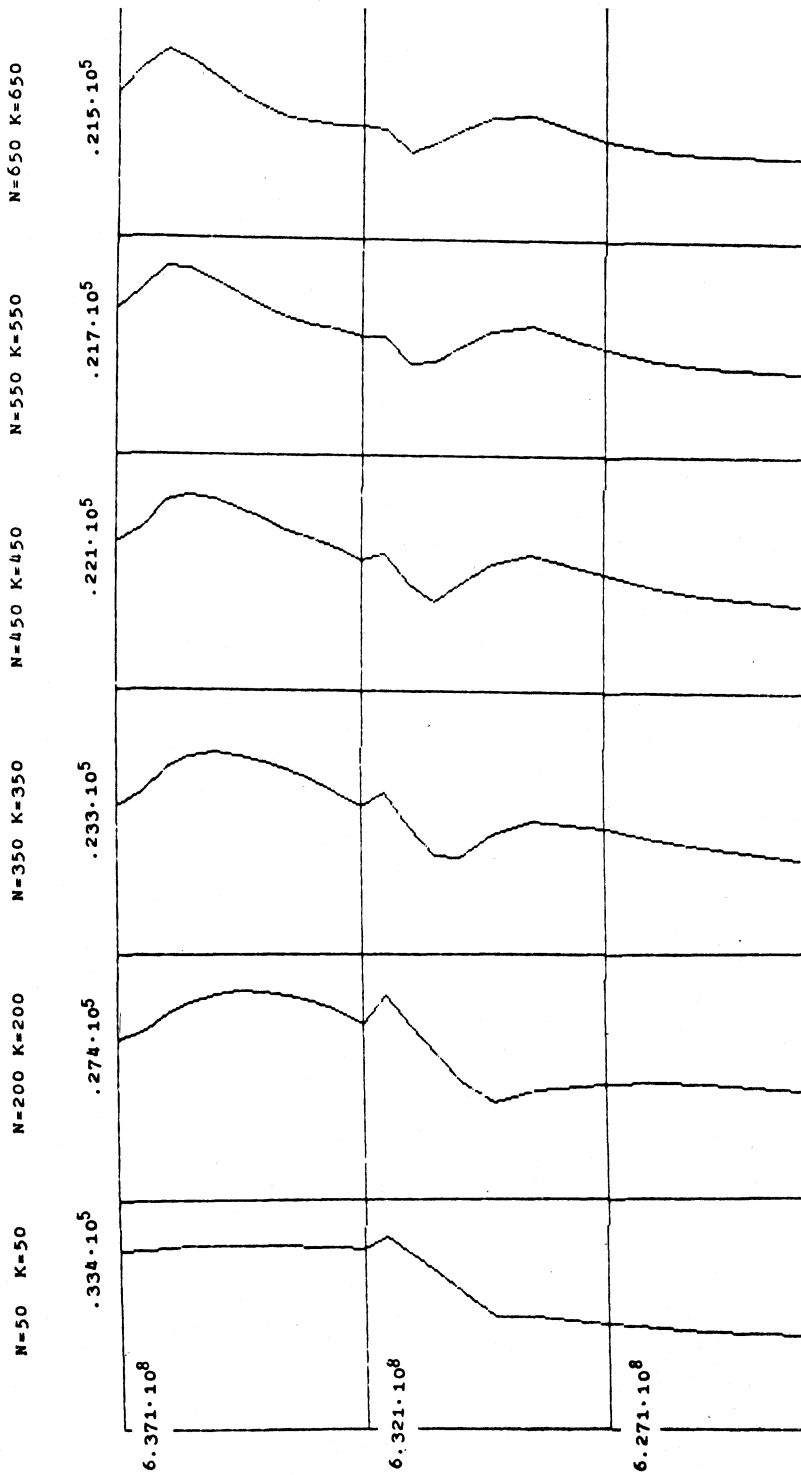


Fig. 3. - Andamento di MST con la profondità per $\theta = \pi/2$ $\Phi =$ valore di picco.

Si fa notare che, anche se al variare di Φ tale armonica oscilla sinusoidalmente in tutto l'intervallo di Φ ($0,2 * \pi$), in realtà gli effetti che si sentono in profondità possono ritenersi, fin quasi a tutto il secondo strato, dovuti a non più di un picco, come si vedrà meglio nell'analisi dell'andamento degli sforzi al variare di Φ .

Tale catena montuosa trova quindi riscontro reale ad esempio in alcuni tratti delle Ande e delle Montagne Rocciose del continente Americano.

Successivamente si è automatizzato il calcolo degli sforzi di taglio massimo (MST) con un programma che dà automaticamente il valore di MST per ogni coppia di n e k e per qualsiasi valore di R , Θ e Φ . Con tale programma si è verificato dapprima che lo sforzo di taglio massimo, fisso Φ , al variare di Θ segue sempre l'andamento del carico superficiale e questo accade con intensità diversa a qualsiasi profondità.

Successivamente la stessa verifica si è fatta fissando Θ e facendo variare Φ . Anche in questo caso lo sforzo di taglio massimo segue l'andamento del carico superficiale, fino a circa la separazione tra il nucleo e lo strato intermedio; al di sotto di tale profondità si ha invece indifferenza al dettaglio del carico esterno e quindi non si risente più l'azione dei picchi isolati.

Per quanto concerne invece il modo di variare di MST al variare della profondità si sono ottenuti, sempre da calcolatore, dei grafici che danno direttamente il valore di MST al variare della profondità.

Tali grafici sono relativi a $\Theta = \pi/2$ e $\Phi =$ valore di massimo, comunque gli andamenti restano uguali anche per valori diversi di Φ . Essi sono riportati nella fig. 3.

In essi si nota come inizialmente, per $n = k = 50$, si ha solo un massimo poco accentuato alla separazione tra lo strato superficiale e quello centrale. Successivamente all'aumentare di $n = k$ tale massimo scompare, mentre si delinea sempre più chiaramente nel primo strato un massimo che, per valori di n e k pari a 200, si trova a circa 30 Km di profondità e poi al restringersi della montagna si sposta verso l'alto per arrivare, con $n = k = 650$, a 10 Km di profondità.

Per valori di $n = k = 350$ inizia a comparire anche un secondo massimo di altezza minore nello strato centrale che anch'esso all'aumentare di $n = k$ aumenta « relativamente » e si sposta verso l'alto.

È stato studiato successivamente anche il modo di variare di MST in profondità analizzando il comportamento della variazione percentuale di MST in profondità rispetto ad MST in superficie, $(MST_{max} - MST_{sup}) / MST_{sup}$, al variare delle dimensioni del carico.

Da tale analisi si è rilevato che per un arbitrario valore di Φ la variazione percentuale di MST resta sensibilmente costante al variare di Θ , mentre varia al variare di $n = k$. Si è pertanto fatto un grafico in cui si riporta l'aumento percentuale di MST sotto un massimo in funzione di k . Da tale grafico, riportato in fig. 4, si vede quindi come varia l'aumento percentuale di MST al restringersi delle dimensioni della montagna.

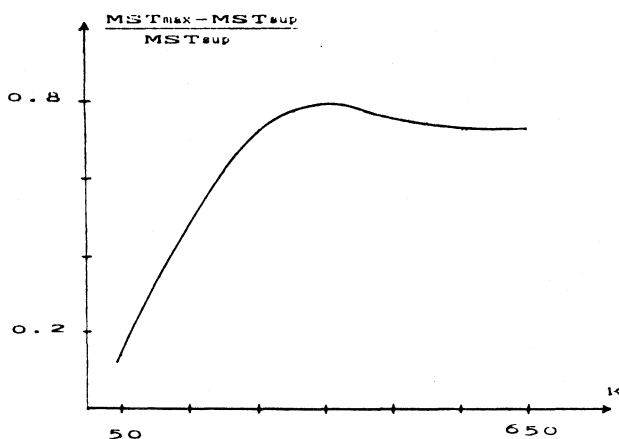


Fig. 4. - Aumento percentuale di « MST » max rispetto a « MST » sup in funzione di k per $\Theta = \pi/2$, $\Phi =$ valore di picco.

In particolare si ha che l'aumento percentuale cresce decisamente all'aumentare di k fino a valori di $n = k = 350$ per poi stabilizzarsi su valori leggermente minori di tale valore massimo. E cioè, in termini di dimensioni dei carichi, montagne tipo gli Appennini, di larghezza di circa un grado, hanno un aumento percentuale massimo di MST, montagne più strette conservano circa tale aumento massimo, mentre per montagne più larghe l'aumento percentuale massimo di MST è più piccolo.

CONCLUSIONI

In questo lavoro si è messo a punto, in tre dimensioni, un metodo che, sfruttando alcune proprietà delle funzioni sferiche, ha permesso di ottenere le soluzioni delle equazioni della statica dell'elastosfera in presenza di carico esterno e di forze di massa. Tali soluzioni sono esatte nel caso del carico prescelto. Da tali soluzioni si è calcolato l'andamento del tensore degli sforzi e dello sforzo di taglio massimo MST al variare dei vari parametri. Il carico adottato è sostanzialmente formato da un insieme di picchi la cui ampiezza varia, al variare dei parametri che lo descrivono sia su Θ che su Φ .

Una volta verificato che il massimo valore di MST è sotto il carico massimo e che il valore di MST in profondità segue sempre l'andamento del carico, due ci sembrano essere i risultati pratici di maggior rilievo.

Il primo è l'esistenza nello strato superficiale di un massimo per MST, la cui profondità, al restringersi delle montagne, si sposta sempre più verso la superficie. Cioè quanto più le montagne sono strette tanto più è prossimo alla superficie il punto in cui si ha il valore massimo per MST.

Il secondo è il fatto che al diminuire delle dimensioni delle montagne aumenta percentualmente il valore di MST massimo rispetto a MST in superficie con un andamento caratteristico riportato in fig. 4. Entrambi questi risultati hanno

come conseguenza che la sismicità tende ad essere più intensa e più superficiale quando la catena montuosa è stretta ed i picchi sono ravvicinati, che è il caso di catene montuose di formazione recente.

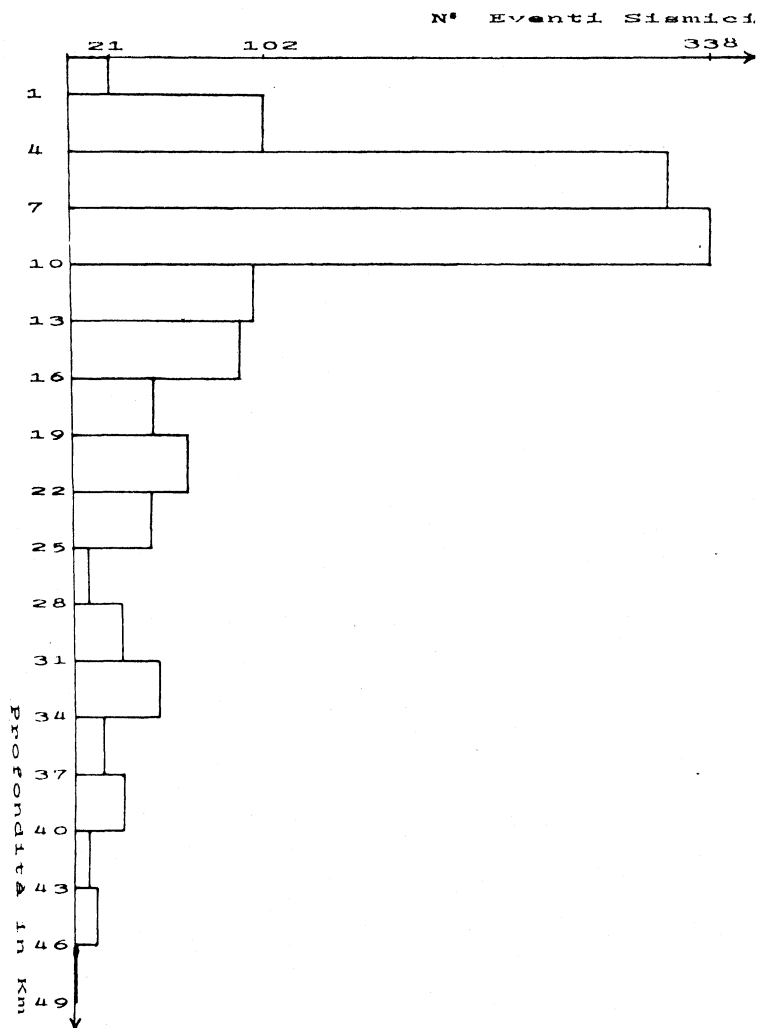


Fig. 5. - Numero eventi sismici per le profondità indicate.

Per verificare sperimentalmente tale fatto si è presa in considerazione la distribuzione delle profondità dei terremoti in Italia dal catalogo ENEL dei terremoti italiani dal 1000 al 1975 (Caputo c)).

Con tale distribuzione si è costruito un istogramma, riportato in fig. 5, in cui è appunto riportato, ogni 3 Km di profondità, il numero dei terremoti italiani dal 1000 al 1975. Ebbene da tale istogramma emerge chiaramente un picco intorno a 9 Km, picco che è in perfetto accordo con la teoria se si tiene conto che la lunghezza d'onda fondamentale della sezione trasversa degli Appennini è dell'ordine di 100 Km.

Dagli andamenti riportati si osserva anche, a partire da taluni valori di $n = k$, un massimo relativo nella metà del secondo strato, massimo che tende a spostarsi anch'esso verso la superficie ed a crescere di intensità, al diminuire delle dimensioni orizzontali della montagna. Tuttavia per montagne tipo gli Appennini l'intensità relativa di tale massimo è ancora molto bassa ed infatti nei dati sperimentali considerati trova scarsamente riscontro.

RIFERIMENTI

- AQUARO G. (1949) – *Sul calcolo delle deformazioni di uno strato sferico elastico*. « Acc. Naz. dei Lincei - Classe Scienze Fis. Mat. e Nat. », Serie VIII, 7 (6), 289-297.
- ARTYUSHKOV E.V. (1974) – a) *The stresses in the lithosphere caused by crustal thickness inhomogeneities*. « J. Geophys. Research », 78, 7675-7708; b) *Can the Earth's crust be in a state of isostasy?* « J. Geophys. Research », 79, 741-752.
- CAPUTO M. (1984) – a) *Spectral rheology in a sphere*. « International Symposium on Space Techniques for Geodynamic », Sopron, Hungary, J. Somogi, C. Reiberg Eds.
(1980) – b) *Topography and its isostatic compensation as a cause of seismicity; a revision*. « Tectonophysics », 111. Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam.
(1981) – c) *Studio critico del catalogo ENEL dei terremoti italiani dall'anno 1000 al 1975*. « Rassegna Lavori Pubblici », 2 (Febbraio 1981).
- FICHERA G. (1949) – *Sul calcolo delle deformazioni, dotate di simmetria assiale, di uno strato sferico elastico*. « Acc. Naz. dei Lincei, Classe Scienze Fis. Mat. e Nat. », Serie VIII, 6 (5), 582-589.
- JEFFREYS H. (1976) – *The Earth*. Cambridge University Press, Cambridge.
- LAMBECK K. e NAKIBOGLU S.M. (1980) – *Seamount loading and stress in the oceanic lithosphere*. « J. Geophys. Research », 85 (b 11), 6603-6618.
- MCGARR A. e GAY N.C. (1978) – *State of stress in the Earth's crust*. « Annu. Rev. Earth Planet. Sci. », 6, 405-436.
- MCKENZIE D.P. (1967) – *Some remarks on heat flow and gravity anomalies*. « J. Geophys. Research », 72, 6261-6273.
- O'CONNELL R.J. e HAGER H. (1983) – *Estimates of driving forces and stresses for lithospheric plates*. « EOS, Trans. Am. Geophys. Union », 64, 843.
- PICONE M. (1948) – *Appunti di Analisi Superiore*. « Rondinella Napoli », II Ed.