Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Bruno Firmani

Su un problema singolare di Goursat per l'equazione $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **81** (1987), n.1, p. 1–6.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1987_8_81_1_1_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1987.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Gennaio - Marzo 1987

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Atti Acc. Lincei Rend. fis.
(8), LXXXI (1987), pp. 1–6

Analisi matematica. — *Su un problema singolare di Goursat per l'equazione* $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$. Nota di BRUNO FIRMANI, presentata (*) dal Socio G. FICHERA.

ABSTRACT. — *On n singular Goursat problem for the equation* $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$. A semilinear 2nd order hyperbolic equation in two independent variables is considered and the Goursat problem is investigated in the singular case, i.e. when the two given arcs Γ_1 and Γ_2 have the same tangent in the point 0 where they meet. Conditions on the data are given for existence and uniqueness of the solution. These conditions depend on the order of the contact that Γ_1 and Γ_2 have in 0.

KEY WORDS: Singular Goursat problem; Hyperbolic equations; Boundary value problems.

RIASSUNTO. — Considerata un'equazione iperbolica del secondo ordine in due variabili indipendenti, si studia il problema di Goursat nel caso singolare relativo a due archi assegnati Γ_1 e Γ_2 con la stessa tangente nel punto 0 di intersezione. Vengono fornite condizioni di esistenza e di unicità per la soluzione. Queste condizioni dipendono dall'ordine del contatto che Γ_1 e Γ_2 hanno in 0.

(*) Nella seduta del 29 novembre 1986.

In questo lavoro viene studiato un problema singolare di Goursat per l'equazione $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$ che si presenta quando le curve portanti i dati hanno la stessa retta tangente nel punto di intersezione. Sotto le ipotesi che la $f(x, y, u, p, q)$ sia (reale) e continua nel complesso delle sue cinque variabili (reali) e lipschitziana rispetto ad u, p e q si dimostra un teorema di esistenza ed unicità «in piccolo» della soluzione. Nelle stesse ipotesi per la funzione f e per i dati, applicando un metodo «di prolungamento» già noto nella letteratura, si può affermare che la soluzione del problema singolare esiste anche in grande ed è unica.

Siano $\Gamma_1 : y = \alpha(x)$ e $\Gamma_2 : x = \beta(y)$ due curve del piano x, y soddisfacenti le seguenti condizioni:

I) $\alpha(x) \in C^1[0, s']$; $\beta(y) \in C^1[0, s'']$,

II) $\alpha'(x) \geq 0$, $x \in [0, s']$; $\beta'(y) \geq 0$, $y \in [0, s'']$,

III) $\alpha(0) = 0$, $\alpha(s') \leq s''$; $\beta(0) = 0$, $\beta(s'') \leq s'$

con s' ed s'' numeri reali positivi.

Posto $\tau(x) = \beta[\alpha(x)]$, con $x \in [0, s']$, risulti:

$$\tau(x) < x \quad , \quad x \in (0, s'], \tag{1}$$

da cui segue che il punto $(0, 0)$ è il solo punto comune alle due curve Γ_1 e Γ_2.

Si supponga inoltre che la funzione $\tau(x)$ verifichi la seguente ipotesi:

IV) *Risulti* $\tau'(0) = 1$ *ed esista un numero positivo* l *tale che*

$$\min \lim_{x \to 0} |1 - \tau'(x)| x^{-l} > 0 .$$

Sia $\mathscr{R}$ il rettangolo $[0, s'] \times [0, s'']$. La funzione $f(x, y, u, p, q)$ sia continua per $(x, y) \in \mathscr{R}$ e $u, p, q \in (-\infty, +\infty)$ ed uniformemente lipschitziana rispetto alle variabili u, p, q. Esista cioè una costante $L \geq 0$ tale che

$$\begin{aligned}(2)\qquad |f(x, y, u, p, q) - f(x, y, v, p', q')| \leq L(|u - v| + |p - p'| + \\ + |q - q'|) \qquad (x, y) \in \mathscr{R} .\end{aligned}$$

Siano $\varphi_1(x) \in C^1[0, s']$ e $\varphi_2(y) \in C^1[0, s'']$ due funzioni soddisfacenti la seguente ipotesi:

V) $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ *ed esista un numero* $r > 0$ *tale che*

$$\frac{d}{dx}\{\varphi_1(x) - \varphi_2[\alpha(x)]\} = 0(x^{l+r}) .$$

Siano (σ', σ'') un punto interno al rettangolo $\mathscr{R}$, le cui coordinate soddisfino le condizioni

$$\alpha(\sigma') \leq \sigma'' \quad , \quad \beta(\sigma'') \leq \sigma' , \tag{3}$$

che verrà opportunamente fissato nel seguito ed $\mathscr{R}_0$ il rettangolo $[0, \sigma'] \times \times [0, \sigma'']$.

Si denoti con $V(\mathscr{R}_0)$ l'insieme delle funzioni reali, definite in $\mathscr{R}_0$ ed ivi continue con le derivate prime e con la derivata seconda mista. Si indichi con $C^0(\mathscr{R}_0)$ (con $C^1(\mathscr{R}_0)$) lo spazio di Banach delle funzioni continue (delle funzioni continue con le derivate prime) in $\mathscr{R}_0$ dotato della seguente norma:

$$\| v \|_0 = \max_{\mathscr{R}_0} | v(x, y) | \quad (\| v \|_1 = \max_{\mathscr{R}_0} \{ | v(x, y) | + | v_x(x, y) | + \\ + | v_y(x, y) | \}) .$$

Si consideri nello spazio $V(\mathscr{R}_0)$ il seguente problema di Goursat:

$$u(x, y) = f(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) \qquad (x, y) \in \mathscr{R}_0 \tag{4}$$

$$\begin{aligned} u(x, \alpha(x)) &= \varphi_1(x) \qquad x \in [0, \sigma'] , \\ u(\beta(y), y) &= \varphi_2(y) \qquad y \in [0, \sigma''] . \end{aligned} \tag{5}$$

Indicata con $v(x, y)$ una funzione di $C^0(\mathscr{R}_0)$, si ponga

$$\psi[v, x] = \int_x^{\tau(x)} d\xi \int_0^{\alpha(x)} v(\xi, \eta) \, d\eta \tag{6}$$

e

$$F v(x, y) = \int_0^x d\xi \int_0^y v(\xi, \eta) \, d\eta . \tag{7}$$

La funzione $\psi[v, x]$ appartiene alla classe $C^1[0, \sigma']$ e risulta $\psi[v, 0] = 0$. La serie

$$\Psi[v, x] = \sum_0^\infty {}_h \, \psi[v, \tau^h(x)] \tag{8}$$

appartiene anch'essa alla classe $C^1[0, \sigma']$, come è mostrato in [3] (Teor. XI). Si consideri quindi l'operatore $T_0 v$ così definito:

$$T_0 v(x, y) = F v(x, y) - F v(\beta(y), y) + \Psi[v, x] - \Psi[v, \beta(y)] , \tag{9}$$

il quale associa ad ogni funzione di $C^0(\mathscr{R}_0)$ una funzione della classe $V(\mathscr{R}_0)$.

Posto inoltre

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2[\alpha(x)] . \tag{10}$$

si dimostra (cfr. [3], Lemma 1) che la serie

$$\Phi(x) = \sum_0^\infty {}_h\, \varphi[\tau^h(x)] \tag{11}$$

converge ad una funzione di $C^1[0, \sigma']$. Inoltre la funzione

$$\varphi_0(x, y) = \varphi_2(y) + \Phi(x) - \Phi[\beta(y)] \tag{12}$$

appartiene alla classe $V(\mathscr{R}_0)$. È stato dimostrato (cfr. [2], teor. 9) che ogni soluzione u del problema (4) (5) è anche soluzione della seguente equazione

$$u(x, y) = \varphi_0(x, y) + T_0\, f(x, y, u, u_x, u_y) . \tag{13}$$

Viceversa ogni soluzione della (13) appartenente alla classe $C^1(\mathscr{R}_0)$ è soluzione del problema (4) (5) nella classe $V(\mathscr{R}_0)$.

Per risolvere il problema posto sarà sufficiente dimostrare che la trasformazione

$$\mathscr{R}_0\, v(x, y) = \varphi_0(x, y) + T_0\, f(x, y, v, v_x, v_y) \tag{14}$$

è una contrazione nello spazio $C^1(\mathscr{R}_0)$.

Si osservi preliminarmente che esiste una costante $N_0 \geq 0$ (cfr. [3], Lemma 2) tale che, per ogni indice k risulta:

$$\frac{d\tau^k(x)}{dx} \leq N_0 \qquad x \in [0, s'] .$$

Sussistono i seguenti lemmi.

Lemma 1. *Sia v una funzione di $C^0(\mathscr{R}_0)$. Posto*

$$c_0 = 1 + N_0(1 + \max_{[0,s']} \alpha'(x))$$

risulta

$$| \Psi[v, x] | \leq x \cdot \alpha(x) \cdot \| v \|_0 \tag{15}$$

$$| \Psi'[v, x] | \leq c_0(x + \alpha(x)) \| v \|_0 . \tag{16}$$

Per le (8) e (6) si ha:

$$| \Psi[v, x] | \leq \sum_0^\infty {}_h\, | \psi[v, \tau^h(x) | \leq$$

$$\leq \| v \|_0 \sum_0^\infty {}_h\, \alpha[\tau^h(x)] \cdot [\tau^h(x) - \tau^{h+1}(x)] \leq \| v \|_0 \cdot \alpha(x) \cdot x .$$

Per provare la (16) si sfrutta la convergenza uniforme della serie derivata della (8) (cfr. [3], teor. XI) ed il sussistere delle seguenti maggiorazioni:

$$| \Psi' [v, x] | \leq \sum_{0}^{\infty}{}_h \left| \frac{d}{dx} \psi [v, \tau^h (x)] \right| \leq$$

$$\leq \alpha (x) \| v \|_0 + \| v \|_0 \sum_{0}^{\infty}{}_h \left\{ \frac{d\tau^{h+1}(x)}{dx} [\alpha \{\tau^h (x)\} - \alpha \{\tau^{h+1} (x)\}] + \right.$$

$$\left. + \frac{d\alpha [\tau^h (x)]}{dx} [\tau^h (x) - \tau^{h+1}(x)] \right\} \leq \| v \|_0 [\alpha (x) (1 + N_0) + \max_{[0,x]} \alpha' (t) N_0 \cdot x] .$$

LEMMA 2. *Posto* $c_1 = 2 + (c_0 + 1) \max\limits_{[0,s'']} \beta' (t)$ *per ogni funzione* $v \in C^0 (\mathscr{R}_0)$ *sussistono le seguenti maggiorazioni:*

$$| T_0 v (x, y) | \leq 4 \sigma' \sigma'' \| v \|_0 ,$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} T_0 v (x, y) \right| \leq [\sigma'' (1 + c_0) + \sigma' c_0] \| v \|_0 ,$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} T_0 v (x, y) \right| \leq c_1 (\sigma' + \sigma'') \| v \|_0 .$$

Dalle (9) e (7) e dal Lemma 1 segue:

$$| T_0 v (x, y) | \leq | F v (x, y) | + | F (\beta (y), y) | + | \Psi [v, x] | +$$

$$+ | \Psi [v, \beta (y)] | \leq \| v \|_0 \{x y + y \cdot \beta (y) + x \cdot \alpha (x) + \beta (y) \cdot \alpha [\beta (y)]\} .$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} T_0 v (x, y) \right| \leq \left| \frac{\partial}{\partial x} F v (x, y) \right| + \left| \frac{d}{dx} \Psi [v, x] \right| \leq$$

$$\leq \| v \|_0 [y + c_0 (\alpha (x) + x)] .$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} T_0 v (x, y) \right| \leq \| v \|_0 \{x + \beta' (y) \cdot y + \beta (y) + \beta' (y) \cdot c_0 [\beta (y) +$$

$$+ \alpha \cdot \beta (y)]\} .$$

La tesi è subito conseguita.

Si può ora dimostrare un teorema di esistenza ed unicità in piccolo del problema singolare di Goursat. Sussiste infatti il seguente enunciato.

TEOREMA. *È possibile determinare* σ' *e* σ'' *verificanti le* (3) *e tali che il problema* (4) (5) *ammette una ed una sola soluzione in* $\mathscr{R}_0$.

Siano v e w funzioni di $C^1(\mathscr{R}_0)$, per il Lemma 2 e per la (2) si ha:

$$|\mathscr{R}_0 v(x,y) - \mathscr{R}_0 w(x,y)| = |T_0[f(x,y,v,v_x,v_y) - f(x,y,w,w_x,w_y)| \leq$$
$$\leq 4\sigma'\sigma'' \|f(x,y,v_x,v_y) - f(x,y,w,w_x,w_y)\|_0 \leq$$
$$\leq 4\sigma'\sigma'' L \|v - w\|_1 .$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\mathscr{R}_0 v(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\mathscr{R}_0 w(x,y)\right| =$$
$$= \left|\frac{\partial}{\partial x} T_0[f(x,y,v,v_x,v_y) - f(x,y,w,w_x,w_y)]\right| \leq$$
$$\leq (\sigma''(1 + c_0) + \sigma' c_0) L \|v - w\|_1 .$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}\mathscr{R}_0 v(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\mathscr{R}_0 w(x,y)\right| \leq c_1(\sigma' + \sigma'') L \|v - w\|_1 .$$

Pertanto assunti σ' e σ'' tali che

$$L[4\sigma'\sigma'' + \sigma'(c_0 + c_1) + \sigma''(1 + c_0 + c_1)] < 1$$

la trasformazione $\mathscr{R}_0$ è una contrazione. Dalla completezza dello spazio $C^1(\mathscr{R}_0)$ segue l'esistenza e l'unicità di un punto unito per la trasformazione $\mathscr{R}_0$, cioè l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema (4) (5).

Osservazione. La soluzione del problema (4) (5), la cui esistenza ed unicità è stata provata « in piccolo » nel precedente teorema, può essere opportunamente prolungata in tutto $\mathscr{R}$. Infatti, nelle ipotesi formulate in questa Nota, si può applicare, anche per il problema singolare di Goursat, il metodo di prolungamento indicato in [4], relativamente ad un problema non singolare, e successivamente esposto in [1].

Bibliografia

[1] M. Cinquini Cibrario e S. Cinquini (1964) – *Equazioni alle derivate parziali di tipo iperbolico*, « Monografia C.N.R. », *12*, Roma.

[2] B. Firmani (1982) – *Sui casi singolari del problema di Goursat*, « Rend. Mat. », (VII) *2*, 237-256.

[3] B. Firmani (1983) – *Su un problema di Dirichlet per un'equazione del secondo ordine di tipo iperbolico*, « Ann. Mat. », (IV) *135*, 133-150.

[4] G. Stampacchia (1949-1950) – *Il problema di Goursat per un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine di tipo iperbolico*, « Giornale di Battaglini », (IV) *79*, 66-85.