Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Epifanio G. Virga

Quando è possibile formare bolle in un fluido, e quando no

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **80** (1986), n.7-12, p. 545–550.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1986_8_80_7-12_545_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1986.

Meccanica. — *Quando è possibile formare bolle in un fluido, e quando no.* Nota di EPIFANIO G. VIRGA, presentata (*) dal Corrisp. T. MANACORDA.

SUMMARY. — Bubbles are formed in a fluid by inflating a liquid film with a gas in which the pressure $\hat{\pi}(\nu)$ is a strictly decreasing function of the specific volume, unbounded as $\nu \to 0^+$. We show that, if $\hat{\pi}(\nu)$ grows as fast or faster than $\nu^{-2/3}$ as $\nu \to 0^+$, then there is at least one stable equilibrium configuration of any such bubble, no ma ter how much gas has been used to inflate it. On the other hand, if $\hat{\pi}(\nu)$ grows as slowly or slower than $\nu^{-1/3}$ as $\nu \to 0^+$, then any such bubble has no equilibrium configuration, when the amount of gas within it is too small.

Consideriamo una bolla formatasi in un fluido alla pressione π_e, per insufflazione di una pellicola liquida con la quantità μ di un gas, la cui pressione $\hat{\pi}$ e l'energia specifica σ sono funzioni dipendenti dal solo volume specifico $\nu = 1/\rho$, con le proprietà

$$\hat{\pi}(\nu) = -\sigma'(\nu) \quad , \quad \sigma''(\nu) > 0 \, , \tag{1}$$

$$\lim_{\nu \to 0^+} \hat{\pi}(\nu) = +\infty \quad , \quad \lim_{\nu \to +\infty} \hat{\pi}(\nu) = 0 \, . \tag{2}$$

Trattiamo la pellicola liquida come un fluido incomprimibile che occupa una regione tridimensionale $\mathscr{B}$, il cui volume è una costante assegnata β. Indichiamo con $\mathscr{B}_i$ la regione che accoglie il gas insufflato all'interno della bolla; $\mathscr{B}_e : = \mathscr{B}_i \cup \mathscr{B}_e$ è la regione dello spazio occupata dall'intera bolla; inoltre denotiamo con τ_i e τ_e le tensioni superficiali (costanti) delle interfacce $\partial\mathscr{B}_i$ e $\partial\mathscr{B}_e$, rispettivamente.

Questo modello descrive anche le familiari bolle di sapone come caso particolare.

Per ogni insieme di Borel $\mathscr{S}$ di $\mathbf{R}^3$ indicheremo con $\mathrm{vol}(\mathscr{S})$ la misura di Lebesgue di $\mathscr{S}$ e con $\mathrm{area}(\partial\mathscr{S})$ la misura di Hausdorff della sua frontiera.

In assenza di forze di massa, le configurazioni di equilibrio della bolla sono individuate dalle regioni $\mathscr{B}_i$ e $\mathscr{B}_e \supset \mathscr{B}_i$, e dalla funzione $\rho : \mathscr{B}_i \to \mathbf{R}^+$ che ren-

(*) Nella seduta del 29 novembre 1986.

dono stazionario il funzionale dell'energia

$$(3) \qquad \mathscr{E}(\mathscr{B}_i, \mathscr{B}_e ; \rho) := \int_{\mathscr{B}_i} \rho\sigma(1/\rho) + \tau_i \operatorname{area}(\partial\mathscr{B}_i) + \tau_e \operatorname{area}(\partial\mathscr{B}_e) + \pi_e \operatorname{vol}(\mathscr{B}_e)\,,$$

soggetto ai vincoli

$$(4) \qquad \int_{\mathscr{B}_i} \rho = \mu \quad ; \quad \operatorname{vol}(\mathscr{B}) = \beta\,, \ \text{con}\ \mathscr{B} = \mathscr{B}_e - \mathscr{B}_i\,.$$

Per trovare le equazioni di Eulero-Lagrange associate a (3), introduciamo il funzionale $\mathscr{E}^*$, soggetto unicamente a $(4)_1$:

$$(5) \qquad \mathscr{E}^*(\mathscr{B}_i, \mathscr{B}_e ; \rho) := \mathscr{E}(\mathscr{B}_i, \mathscr{B}_e ; \rho) + \pi_0(\beta - \operatorname{vol}(\mathscr{B}))\,,$$

dove il moltiplicatore di Lagrange π_0 rappresenta la pressione incognita all'interno della pellicola liquida. Se $\mathscr{B}_i$ e $\mathscr{B}_e$ sono *domini regolari* di $\mathbf{R}^3$, cioè insiemi aperti, limitati e semplicemente connessi con frontiera di classe C^2, e se ρ è di classe C^1 e verifica $(4)_1$, le condizioni di stazionarietà del funzionale (5) si scrivono

$$(6) \qquad \nabla\rho = 0 \quad , \quad \hat{\pi} - \pi_0 = 2\,\varkappa_i\,\tau_i \quad , \quad \pi_0 - \pi_e = 2\,\varkappa_e\,\tau_e\,,$$

dove $\varkappa_i$ e $\varkappa_e$ sono, rispettivamente, le curvature medie di $\partial\mathscr{B}_i$ e $\partial\mathscr{B}_e$. La $(6)_1$ è la forma adatta a questo caso della classica equazione di equilibrio di Eulero, mentre $(6)_{2,3}$ esprimono la condizione di Laplace per la discontinuità della pressione all'interfaccia tra due fluidi (*v. per es.* [1], p. 456). Si noti che la pressione del gas nella bolla risulta maggiore della pressione esterna.

Le equazioni (6) seguono facilmente dal calcolo della variazione prima del funzionale (5) che, in una situazione simile, è stato illustrato nel n. 2 di [2].

Poiché per $(6)_1$ ρ è costante, le $(6)_{2,3}$ implicano che anche $\varkappa_i$ e $\varkappa_e$ sono costanti, e per un teorema di Alexandrov [3] ne segue che $\mathscr{B}_i$ e $\mathscr{B}_e$ sono entrambe sfere di raggi α_i e α_e, rispettivamente. Per la $(4)_2$, α_i e α_e soddisfano a

$$(7) \qquad \beta = \frac{4\,\pi}{3}(\alpha_e^3 - \alpha_i^3)\,;$$

e, per $(6)_{2,3}$, a

$$(8) \qquad \hat{\pi}(1/\rho_0) - \pi_0 = \frac{2\,\tau_i}{\alpha_i} \quad , \quad \pi_0 - \pi_e = \frac{2\,\tau_e}{\alpha_e} \quad ,$$

dove

$$(9) \qquad \rho_0 \quad \frac{3\,\mu}{4\,\pi\,\alpha_i^3}\,.$$

Si osservi che quando β tende a zero, le interfacce tra i diversi fluidi tendono a identificarsi ad una sola, cui compete la tensione superficiale $\bar{\tau} = \tau_i + \tau_e$.

Le equazioni (7), (8) e (9), quando compatibili, consentono di determinare α_i, α_e, ρ_0 e π_0. Ad ogni soluzione di (7)-(9) corrispondono infinite configurazioni di equilibrio della bolla: la sfera $\mathscr{B}_e$ può, infatti, trovarsi ovunque nello spazio, e la sfera $\mathscr{B}_i$ non è necessariamente concentrica a $\mathscr{B}_e$.

Una configurazione di equilibrio della bolla è *stabile* se realizza un minimo di $\mathscr{E}$. Già in [2] (*v.* n. 3), per un funzionale di forma analoga a (3), si è rivelato utile alla ricerca dei minimi ambientare $\mathscr{B}_i$ e $\mathscr{B}_e$ nella classe degli insiemi di *perimetro finito*.

Per un insieme di Borel $\mathscr{C} \subset \mathbf{R}^3$, il perimetro è l'estremo superiore

$$\text{pm}(\mathscr{C}) := \sup \left\{ \int_{\mathscr{C}} \text{div}\, g \right\} \tag{10}$$

nella classe di tutte le funzioni $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ di classe C^1 a supporto compatto, che verificano $|g(x)| \leq 1$, per ogni $x \in \mathbf{R}^3$ (*v. per es.* [4], p. 5). Ogni insieme di perimetro finito $\mathscr{C}$ con frontiera di classe C^2 è tale che $\text{pm}(\mathscr{C}) = \text{area}(\partial\mathscr{C})$. Inoltre, la classe degli insiemi di perimetro finito è uno spazio metrico, se dotato della distanza

$$\text{dist}(\mathscr{C}, \mathscr{C}') = \text{vol}(\mathscr{C} \cup \mathscr{C}' - \mathscr{C} \cap \mathscr{C}'). \tag{11}$$

Due insiemi si dicono *equivalenti* se sono a distanza nulla; è semplice provare che insiemi equivalenti hanno uguale perimetro.

A queste elementari proprietà degli insiemi di perimetro finito si aggiunge la disuguaglianza isoperimetrica [5]:

$$\text{pm}(\mathscr{C}) \geq (4\pi)^{1/3}(3\,\text{vol}(\mathscr{C}))^{2/3}, \tag{12}$$

dove l'uguaglianza vale solo se $\mathscr{C}$ è (o è equivalente a) una sfera.

Se $\mathscr{B}_i$ e $\mathscr{B}_e$ sono insiemi di perimetro finito, il funzionale dell'energia $\mathscr{E}$ assume la forma

$$\mathscr{E}(\mathscr{B}_i, \mathscr{B}_e; \rho) = \int_{\mathscr{B}_i} \rho\sigma(1/\rho) + \tau_i\,\text{pm}(\mathscr{B}_i) + \tau_e\,\text{pm}(\mathscr{B}_e) + \pi_e\,\text{vol}(\mathscr{B}_e). \tag{13}$$

Per ogni funzione ρ che rende finita l'energia, la disuguaglianza di Jensen (*v. per es.* [6], p. 150) e $(4)_1$ implicano

$$\mathscr{E}(\mathscr{B}_i, \mathscr{B}_e; \rho) \geq \mu\sigma(\text{vol}(\mathscr{B}_i)/\mu) + \tau_i\,\text{pm}(\mathscr{B}_i) + \tau_e\,\text{pm}(\mathscr{B}_e) + \pi_e\,\text{vol}(\mathscr{B}_e) =: \mathscr{E}_*(\mathscr{B}_i, \mathscr{B}_e),$$

dove l'uguaglianza è verificata solo se $\rho \equiv \mu/\mathrm{vol}(\mathscr{B}_i)$. $\mathscr{E}_*$ è il minimo assoluto di $\mathscr{E}$ rispetto a ρ. Applicando a $\mathscr{E}_*$ la disuguaglianza isoperimetrica (12), per $(4)_2$ si ha che

$$\mathscr{E}_*(\mathscr{B}_i, \mathscr{B}_e) \geq \mu\sigma(4\pi\alpha^3/3\mu) + 4\pi\left[\tau_i\alpha^2 + \tau_e\left(\alpha^3 + \frac{3\beta}{4\pi}\right)^{2/3}\right] + \tag{14}$$

$$+\frac{4\pi}{3}\pi_e\alpha^3 =: \varphi(\alpha),$$

con l'uguaglianza solo quando $\mathscr{B}_i$ e $\mathscr{B}_e$ sono entrambe sfere di raggi α e $(\alpha^3 + 3\beta/4\pi)^{1/3}$, rispettivamente. Chiamiamo la funzione φ *inviluppo inferiore* di $\mathscr{E}_*$.

Con argomenti analoghi a quelli del n. 3 di [2] si prova che

(i) *ogni estremo dell'inviluppo inferiore di $\mathscr{E}_*$ è un estremo di $\mathscr{E}$ nella classe dei domini regolari;*

(ii) *tutti e soli i minimi locali di φ sono minimi locali di $\mathscr{E}_*$ nella topologia indotta dalla distanza* (11).

Queste proprietà mostrano che le configurazioni di equilibrio della bolla e la loro stabilità si deducono dall'esame degli estremi di φ. Da $(14)_2$, per $(1)_1$, si ha

$$\varphi'(\alpha) = 4\pi\alpha\left[-\alpha\hat{\pi}(4\pi\alpha^3/3\mu) + 2\tau_i + 2\tau_e\alpha\left(\alpha^3 + \frac{3\beta}{4\pi}\right)^{-1/3} + \pi_e\alpha\right]; \tag{15}$$

per $(2)_2$, poiché $\pi_e > 0$, risulta

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \varphi'(\alpha) = +\infty. \tag{16}$$

D'altra parte,

$$\lim_{\alpha\to0^+} \varphi'(\alpha) = -(4\pi)^{1/3}(3\mu)^{2/3} \lim_{\nu\to0^+} \nu^{2/3}\hat{\pi}(\nu), \tag{17}$$

ed in generale si può solo concludere che se il limite al primo membro di (17) esiste, è non positivo.

Se

$$\lim_{\nu\to0^+} \nu^{2/3}\hat{\pi}(\nu) > 0, \tag{18}$$

(16) e (17) implicano che esiste almeno un α_i tale che $\varphi'(\alpha_i) = 0$ e $\varphi''(\alpha_i) > 0$. Cioè, esiste almeno una configurazione di equilibrio stabile della bolla in cui $\mathscr{B}_i$ è una sfera di raggio α_i, $\mathscr{B}_e \supset \mathscr{B}_i$ è una sfera il cui raggio è dato da (7), il gas in $\mathscr{B}_i$ ha densità costante pari a (9).

Per un gas perfetto a temperatura costante o termicamente isolato la (18) è verificata. Infatti, nei due casi si ha, rispettivamente,

$$\hat{\pi}(\nu) = \frac{\chi_1}{\nu} \quad \text{e} \quad \hat{\pi}(\nu) = \frac{\chi_2}{\nu^{\xi}} ,$$

con χ_1 e χ_2 costanti positive e $\xi > 1$. Pertanto, nel modello qui adottato, l'insufflazione isoterma o adiabatica di una generica quantità di gas perfetto in una pellicola liquida genera sempre almeno una bolla in equilibrio stabile.

Di converso, se

$$\lim_{\nu \to 0^+} \nu^{2/3} \hat{\pi}(\nu) = 0 , \tag{19}$$

ricerchiamo un'ulteriore condizione che assicuri l'assenza di configurazioni di equilibrio per la bolla. A ciò si perviene richiedendo che $\varphi'(\alpha)$ non abbia altri zeri, eccetto $\alpha = 0$. Da (15) segue facilmente che $\varphi'(\alpha) > 0$, se

$$\hat{\pi}(4\pi\alpha^3/3\mu) - \pi_e < 2\tau_i \alpha^{-1} + 2\tau_e \left(\alpha^3 + \frac{3\beta}{4\pi}\right)^{-1/3} . \tag{20}$$

Per le proprietà (1) e (2) della funzione $\hat{\pi}$, la (20) è vera per ogni $\alpha \geq \alpha_0 : = (3\mu\nu_0/4\pi)^{1/3}$, con ν_0 la radice di $\hat{\pi}(\nu) = \pi_e$; sicché è vera per ogni $\alpha > 0$, se

$$\hat{\pi}(\nu) - \pi_e < 2\left(\frac{4\pi}{3\mu}\right)^{1/3} \left[\tau_i \nu^{-1/3} + \tau_e \left(\nu + \frac{\beta}{\mu}\right)^{-1/3}\right] , \tag{21}$$

per ogni $0 < \nu < \nu_0$.

La (21) è verificata, se vale la disuguaglianza più restrittiva

$$\nu^{1/3}(\hat{\pi}(\nu) - \pi_e) < 2\tau_i \left(\frac{4\pi}{3\mu}\right)^{1/3}, \qquad 0 < \nu < \nu_0 , \tag{22}$$

che però non dipende dal volume β.

La (22) è essenzialmente una condizione asintotica come (18), perché se

$$\lim_{\nu \to 0^+} \nu^{1/3} \hat{\pi}(\nu) < +\infty , \tag{23}$$

allora esiste $\sigma_0 > 0$ tale che

$$\nu^{1/3}(\hat{\pi}(\nu) - \pi_e) \leq \sigma_0 , \quad \text{per ogni } 0 < \nu < \nu_0 ,$$

e vale la (22), se μ soddisfa a

$$\mu < \frac{4\pi}{3}\left(\frac{2\tau_i}{\sigma_0}\right)^3 . \tag{24}$$

È infine immediato riconoscere che (23) e (19) sono compatibili.

Quando la (23) è verificata e la massa di gas insufflata è minore del valore critico dato da (24), non esiste alcuna bolla in equilibrio, né stabile né instabile.

Bibliografia

[1] H. Lamb (1945) – *Hydrodynamics*, Dover, New York.

[2] E.G. Virga (1986) – *Metastable equilibrium of fluids with surface tension*, di prossima pubblicazione su « Quart. Appl. Math. ».

[3] A.D. Alexandrov (1958) – *Uniqueness theorems for surfaces in the large* - V, « Vestnik Leningrad Univ. », *13*, 5-8. Traduzione inglese, « Amer. Math. Soc. Transl. », *21* (1962), 412-416.

[4] E. Giusti (1984) – *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, Birkhäuser, Boston.

[5] E. De Giorgi (1958) – *Sulla proprietà isoperimetrica dell'ipersfera nella classe degli insiemi aventi frontiera orientata di misura finita*, « Mem. Accad. Naz. Lincei, Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. », *5*, 33-44.

[6] G.H. Hardy, J.L. Littlewood and G. Polya (1952) – *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge.