Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Ennio De Giorgi, Marco Forti, Vincenzo M. Tortorelli

Sul problema dell'autoriferimento

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **80** (1986), n.6, p. 363–372.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1986_8_80_6_363_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1986.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 20 giugno 1986

Presiede il Socio Anziano VINCENZO CAGLIOTI

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Logica matematica. — *Sul problema dell'autoriferimento* (*). Nota di ENNIO DE GIORGI, MARCO FORTI e VINCENZO M. TORTORELLI, presentata (**) dal Corrisp. E. DE GIORGI.

SUMMARY. — We formulate, within the frame-theory Q for the foundations of Mathematics outlined in [2], a list L of axioms which state that almost all " interesting " collections and almost all " interesting " operations are elements of the universe. The resulting theory Q + L would thus have the important foundational feature of being completely self-contained.

Unfortunately, the whole list L is inconsistent, and we are led to formulate the following problem, which we call the problem of self-reference:

" *Find out maximal subsystems of* L *relatively consistent with the frame-theory* Q ".

No complete answer being available up to now, we leave the question to the attention of all interested mathematicians (for partial answers, see [3]).

§ 1. INTRODUZIONE

In una recente Nota, [2], abbiamo esposto una teoria assiomatica, che chiameremo teoria-quadro o teoria Q, in cui è possibile inquadrare i concetti fondamentali di *numero naturale, coppia, n-pla, operazione, insieme.*

Tra le definizioni principali della teoria Q vi sono quelle di *elemento* e di *classe*; dagli assiomi si deduce l'esistenza di molte classi notevoli, per esempio

(*) Ricerca parzialmente finanziata da 40% e 60% M.P.I.

(**) Nella seduta del 10 maggio 1986.

la *classe universale* V cui appartengono tutti gli elementi, e che quindi include tutte le classi, la classe *Ins* di tutti gli *insiemi*, la classe *Clel* di tutte le classi che sono anche *elementi* (e queste tre classi possono essere fra loro distinte), nonché tutte le classi definibili nella teoria di Von Neumann-Bernays-Gödel (vedi [2]). Altre classi definibili nella teoria Q sono la classe *Ur* degli elementi che *non* sono *classi*, detti con Zermelo *urelementi*, la classe *Urop* degli urelementi che sono *operazioni*, etc.

Gli assiomi della teoria Q sono stati scelti in modo da permettere alle classi V, *Ins*, *Ur*, *Clel*, *Urop* e a molte altre classi notevoli di essere o meno classi *elementari*, cioè di appartenere a *Clel* oppure no. Analogamente le operazioni che ad ogni coppia d'insiemi associano la loro unione, intersezione e differenza possono appartenere o no ad *Urop*, così come quella che ad ogni coppia (f, g) di operazioni urelementari, cioè appartenenti ad *Urop*, associa l'operazione composta $f \circ g$, e come molte altre «grandi» operazioni.

È quindi possibile aggiungere alla teoria Q altri assiomi, che chiameremo *assiomi di autoriferimento*, che postulano l'appartenenza a *Clel* di alcune classi notevoli e l'appartenenza ad *Urop* di alcune operazioni notevoli. Si possono anche aggiungere assiomi che assicurano la stabilità di *Clel* e di *Urop* rispetto a certe operazioni fondamentali: per esempio sarebbe comodo supporre *Clel* stabile per unione ed intersezione finite, per differenza e prodotto cartesiano, mentre per *Urop* sarebbe auspicabile la stabilità per composizione, trasposizione, etc.

Naturalmente occorre tener presente che, già dagli assiomi della teoria-quadro, si può dedurre che alcune classi sono *proprie*, come la classe $R = \{x \in Clel \mid x \notin x\}$, associata all'antinomia di Russell; analogamente è facile vedere che, nella teoria Q, alcuni grafici funzionali *non* possono essere i grafici di operazioni *urelementari*, ad esempio $G = \{(f, f) \in Urop^2 \mid (f, f) \notin \operatorname{graf} f\}$, o $H = \{(f, f) \in Urop^2 \mid f \notin \operatorname{dom} f\}$: si noti invece che i postulati della teoria-quadro *non* escludono che G e/o H appartengano a *Clel*.

Tuttavia dopo aver compilato una lista di assiomi di autoriferimento che, presi singolarmente, risultano tutti accettabili (la lista L del § 2), si constata che da essa si possono facilmente estrarre sistemi di assiomi incompatibili con la teoria Q.

D'altra parte, esistono anche sistemi abbastanza ampli estratti dalla lista L che sono relativamente consistenti con gli assiomi della teoria Q (vedi [3]). È quindi possibile formulare il seguente *problema di autoriferimento* (relativo alla teoria Q ed alla lista L):

– *determinare i più ampli sistemi di assiomi, compatibili con la teoria* Q, *che si possono estrarre dalla lista* L.

I risultati di [3] risolvono solo parzialmente questo problema, ma possono già dare un'idea del tipo di difficoltà che occorre affrontare per ottenerne soluzioni soddisfacenti; inoltre sono ivi presentati alcuni casi particolarmente interessanti ed ancora aperti del problema di autoriferimento Q-L.

Notiamo che una soddisfacente soluzione di tali problemi gioverebbe ad una migliore comprensione di molti oggetti della matematica, quali le funzioni ricorsive, il λ-calcolo, etc. In particolare ogni risposta negativa potrebbe gettare nuova luce sulle classiche antinomie delle teorie fondazionali (o fors'anche proporne alcune di tipo nuovo), mentre eventuali risposte positive consentirebbero di formulare teorie dei fondamenti della matematica che abbiano il massimo grado di autonomia e richiedano il minimo ricorso a strutture linguistiche esterne.

Tenendo anche conto che analoghi problemi di autoriferimento potrebbero naturalmente porsi per teorie e/o liste diverse dalle nostre, ci pare che questa nota indichi una via ragionevole per fare dell'autoriferimento un ordinario capitolo della matematica, ricco di problemi facili e difficili, variamente collegati fra di loro, anziché un capitolo straordinario fatto di poche difficili congetture, apparentemente isolate anche se ispirate da una comune aspirazione filosofica alla costruzione di teorie aventi riflessività ed autonomia massime.

Come già in [2], non possiamo assolutamente citare tutti i lavori che hanno avuto influenza sulla nostra impostazione del problema dell'autoriferimento. Dobbiamo invece segnalare il notevole contributo alla chiarificazione dell'argomento fornito da tutti i partecipanti al seminario De Giorgi su Logica e Fondamenti della Matematica presso la Scuola Normale Superiore di Pisa; nominiamo in particolare, per l'importanza e la continuità del loro contributo, M. Boffa, M. Clavelli, F. Honsell, G. Longo e M. Sciuto.

§ 2. LA LISTA L DEGLI ASSIOMI DI AUTORIFERIMENTO

Come preannunciato, la trattazione di questa nota si svolge all'interno della teoria-quadro Q presentata in [2]: assumeremo quindi gli assiomi Q 1-Q 15 ivi enunciati, supporremo note le definizioni ivi contenute e ci atterremo alle notazioni ivi esplicitate.

In questo paragrafo ci limiteremo ad elencare, con pochi commenti, una serie di assiomi, che chiameremo lista L degli assiomi di autoriferimento. Essi saranno posti in forma unificata introducendo una nuova costante τ e qualificandola come una operazione urelementare, il cui dominio è V e i cui valori sono ancora operazioni urelementari di dominio V. In corrispondenza di alcune coppie d'interi (i, j), l'assioma L$i \cdot j$ postulerà che l'elemento $\tau_{ij} = (\tau\, i)\, j$, cioè il risultato dell'operazione $\tau\, i$ applicata a j, è a sua volta una delle classi od operazioni notevoli descritte nelle sezioni 2.0-2.5

La lista L è compilata in modo da garantire che quasi tutte le operazioni « interessanti » che coinvolgono gli elementi di V appartengano ad *Urop*, e quasi tutte le classi « interessanti » appartengano a *Clel*, cosicché la teoria Q + L risulterebbe del tutto autosufficiente nel senso accennato nell'introduzione.

È facile vedere che l'intera lista L non è consistente con la teoria Q: essa implica, ad esempio, che *Clel* è stabile per intersezione, complemento e proiezione e che i grafici dell'appartenenza e dell'uguaglianza appartengono a *Clel*, ricostruendo così immediatamente il paradosso di Russell. Questa constatazione è il punto di partenza della ricerca di liste parziali consistenti, la cui proposta è il fine principale di questa nota.

Elenchiamo dunque gli assiomi della lista L suddividendoli in gruppi omogenei, cui premettiamo il seguente assioma generale sull'operazione τ:

(LQ) $\tau \in Urop$, dom $\tau = V$ e, per ogni $x \in V$, $\tau x \in Urop$ e dom $\tau x = V$.

2.0. *Classi notevoli.*

Gli assiomi di questa sezione garantiscono l'elementarità delle classi V, *Clel*, *Ins*, *Urop* e del grafico E dell'appartenenza di un elemento ad una classe elementare. Le classi τ_{oi} $(4 \leq i \leq 9)$ sono riservate alle nozioni primitive di *relazione*, *qualità*, *affermazione*, *variabile*, *categoria* e *universo*, che verranno introdotte in [4]. L'elementarità di molte altre classi seguirà dagli assiomi delle sezioni successive.

(L 0.0) $\tau_{00} = V$.

(L 0.1) $\tau_{01} = Clel$.

(L 0.2) $\tau_{02} = Ins$.

(L 0.3) $\tau_{03} = Urop$.

(L 0.10) $\tau_{0\,10} = E = \{(x\,,y) \mid x \in y\}$.

2.1. *Operazioni sulle classi elementari.*

Gli assiomi di questa sezione postulano l'esistenza di operazioni urelementari corrispondenti alle più importanti operazioni sulle classi: τ_{11} dà l'unione, τ_{12} l'intersezione, τ_{13} il complemento, τ_{14} il prodotto cartesiano e la potenza, τ_{15} il prodotto concatenato, τ_{16} le parti e i grafici funzionali, τ_{17} la chiusura transitiva, τ_{18} la cardinalità (definita « alla Frege-Russell », come la classe delle classi equipotenti alla classe data).

(L 1.1)
$$\tau_{11}\, x = \begin{cases} \bigcup\limits_{1}^{n} x_i & \text{se } x = (x_1\,, \ldots\,, x_n) \in Clel^n \\ \bigcup x & \text{se } x \in \mathscr{P}(Clel) \\ \bigcup\limits_{t \in y \cap \mathrm{dom} z} z(t) & \text{se } x = (y\,, z) \in Clel \times Urop \text{ e img } z \subseteq Clel \end{cases}$$

(L 1.2) $$\tau_{12}\, x = \begin{cases} \bigcap_1^n x_i & \text{se } x = (x_1, \ldots, x_n) \in Clel^n \\ \bigcap x & \text{se } x \in \mathcal{P}(Clel) \\ \bigcap_{t \in y \cap \operatorname{dom} z} z(t) & \text{se } x = (y, z) \in Clel \times Urop \text{ e } \operatorname{img} z \subseteq Clel \end{cases}$$

(L 1.3) $\tau_{13}\, x = V - x$ se $x \in Clel$ e $\tau_{13}(x, y) = x - y$ se $(x, y) \in Clel^2$.

(L 1.4) $(\tau_{14}\, n)\, x = x^n$ se $n \in \mathbf{N}$, $x \in Clel$ e $\tau_{14}(x, y) = x \times y$ se $(x, y) \in Clel^2$.

(L 1.5) $\tau_{15}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \underset{\smile}{\times} \ldots \underset{\smile}{\times} x_n$ se $x_i \in \mathcal{P}(Urpl)$ per $1 \leq i \leq n$.

(L 1.6) $\tau_{16}\, x = \mathcal{P}(x)$ se $x \in Clel$ e $\tau_{16}\, z = x^y$ se $z = (x, y) \in Clel^2$, ove $x^y = \{g \in Gfun \mid \operatorname{Dom} g = y, \operatorname{Img} g \subseteq x\}$.

(L 1.7) $y_{17}\, x = \mathrm{TC}(x)$ se $x \in Clel$.

(L 1.8) $y_{18}\, x = \operatorname{card} x = \{y \in Clel \mid y \simeq x\}$ se $x \in Clel$.

2.2. *Operazioni universali e operazioni su numeri naturali ed n-uple.*

Gli assiomi di questa sezione forniscono, oltre all'identità, al singolo, alle costanti e ad una scelta canonica delle operazioni sui numeri naturali, anche operazioni urelementari corrispondenti alle proiezioni e concatenazioni di n-uple. Combinate fra loro mediante la composizione ed il prodotto fibrato, che saranno postulati nella prossima sezione, tali operazioni permettono di effettuare mediante operazioni urelementari tutte le principali manipolazioni di n-uple, in particolare le tradizionali operazioni di Gödel.

τ_{20} è l'identità, τ_{21} il singolo, τ_{22} il combinatore K di Curry (che fornisce le operazioni costanti); τ_{23}, τ_{24} e τ_{25} danno il successore, la somma e il prodotto di numeri naturali; τ_{26} dà la lunghezza delle uruple, τ_{27} le proiezioni, τ_{28} la concatenazione, τ_{29} aggiunge un elemento ad un'urupla (e quindi consente di formare per successive aggiunte le 1-ple, le coppie, ecc.).

(L 2.0) $\tau_{20} = id \in Urop$, ove graf $id = Gid$.

(L 2.1) $\tau_{21} = sing \in Urop$, ove $sing\, x = \{x\}$ per ogni $x \in V$.

(L 2.2) $\tau_{22}\, x = K_x \in Urop$ per ogni $x \in V$, ove graf $K_x = V \times \{x\}$.

(L 2.3) $\tau_{23}\, n = n + 1$ se $n \in \mathbf{N}$.

(L 2.4) $\tau_{24}\, x = \sum_1^n x_i$ se $x \in \mathbf{N}^n$.

(L 2.5) $\tau_{25}\, x = \prod_{1}^{n} x_i$ se $x \in \mathbf{N}^n$.

(L 2.6) $\tau_{26}\, x = \ln g\, x = n$ se e solo se $x \in V^n$.

(L 2.7) $(\tau_{27}\, h) = x_h$ se $x \in \mathrm{Urpl}$ e $h \leq \ln g\, x$, $(\tau_{27}\,(n\,,\,h))\, x = x_h$ se $x \in \mathrm{V}^n$ e $h \leq n$.

(L 2.8) $\tau_{28}\, x = x_1 \smile x_2 \smile \ldots \smile x_n$ se $x = (x_1\,,\ldots,\,x_n) \in Urpl^n$.

(L 2.9) $(\tau_{29}\, x)\, y = x \smile [y]$ se $x \in Urpl$, per ogni $y \in V$; in particolare si ha $(\tau_{29}\, \varnothing)\, x = [x]$ per ogni $x \in \mathrm{V}$, ove $\varnothing$ è la 0-pla.

2.3. *Operazioni su operazioni.*

Con gli assiomi di questa sezione aumenta notevolmente la forza dell'intero sistema, in quanto molte altre operazioni possono essere generate mediante le τ_{3k} sottoelencate.

Si noti che gli assiomi L 3.k caratterizzano solo i grafici delle operazioni $\tau_{3k}\, x$ per determinati argomenti x; poiché nella teoria Q possono esistere differenti operazioni con lo stesso grafico, da tali assiomi si ottiene non solo l'esistenza, ma anche una scelta canonica delle operazioni postulate (ad esempio $\tau_{31}\,(f\,,g)$ è la composizione di f con g, identificata univocamente fra tutte le operazioni il cui grafico è la composizione di graf f con graf g). Gli assiomi L 3.3 e L 3.5, invece, determinano i grafici di $\tau_{33} f$ e $\tau_{36} f$ solo a meno di coppie $(x\,,g)$, ove g è un'operazione di grafico vuoto.

τ_{31} è la composizione, τ_{32} il prodotto fibrato, τ_{35} la trasposizione, τ_{34} e τ_{35} danno l'aggregazione e la separazione di variabili, τ_{36} è l'inversione a destra, τ_{37} la selezione (fra operazioni equivalenti).

(L 3.1) $\tau_{31}\,(f, g) = f \circ g \in Urop$, ove $\mathrm{graf}\,(f \circ g) = \mathrm{graf}\, f \circ \mathrm{graf}\, g$, se $(f, g) \in Urop^2$

(L 3.2) $\tau_{32}\, x = \langle x_1\,,\ldots,\,x_n\rangle \in Urop$, ove $\mathrm{graf}\ \langle x_1\,,\ldots,\,x_n\rangle = \langle \mathrm{graf}\, x_1\,,\ldots,\, \mathrm{graf}\, x_n\rangle$, se $x = (x_1\,,\ldots,\,x_n) \in Urop^n$.

(L 3.3) $\tau_{33} f = {}^t f \in Urop$ se $f \in Urop$, ove $({}^t f\, x)\, y \simeq (f\, y)\, x$.

(L 3.4) $\tau_{34} f = \mathrm{aggr}\, f \in Urop$ se $f \in Urop$, ove $(\mathrm{aggr}\, f)\,(x\,,y) \simeq (f\, x)\, y$.

(L 3.5) $\tau_{35} f = \mathrm{sep}\, f \in Urop$ se $f \in Urop$, ove $((\mathrm{sep}\, f)\, x)\, y \simeq f\,(x\,,y)$.

(L 3.6) $\tau_{36} f = f^{\mathrm{ind}} \in Urop$ se $f \in Urop$, ove $f\,(f^{\mathrm{ind}}\, x) = x$ per $x \in \mathrm{dom}\, f^{\mathrm{ind}} = \mathrm{img}\, f$.

(L 3.7) $\tau_{37} f = \mathrm{sel}\, f \in Urop$ se $f \in Urop$, ove $f \simeq \mathrm{sel}\, f$ e $\mathrm{sel}\, f = \mathrm{sel}\, g$ se $f \simeq g$.

N.B. Si è usata la notazione $(f\,x)\,y \cong (g\,x)\,y$ intendendo che ambo i membri sono simultaneamente definiti o non definiti ed uguali quando definiti.

Quando f è iniettiva, si scriverà f^{-1} in luogo di f^{ind}.

2.4. *Operazioni di collegamento.*

Le operazioni di questa sezione permettono di collegare « grandi » operazioni urelementari con « grandi » classi elementari, e sono pertanto le più « pericolose » per la consistenza del sistema (vedi [3]).

τ_{41} dà il grafico, τ_{42} il « cografico » (cioè un'operazione di dato grafico), τ_{43} il « cappuccio » (quindi fornisce le immagini, come in [2, Def. 2 e 5]), τ_{44} la restrizione.

(L 4.1) $\tau_{41}\, x = \operatorname{graf} x$ se $x \in \mathit{Urop} \cup \mathit{Urpl}$.

(L 4.2) $\tau_{42}\, x = \operatorname{cogr} x \in \mathit{Urop}$ se $x \in \mathit{Gfun}$, ove $\operatorname{graf} \operatorname{cogr} x = x$.

(L 4.3) $\tau_{43}\, x = \hat{x} \in \mathit{Urop}$ se $x \in \mathit{Clel} \cup \mathit{Urop}$, ove $\hat{x}\, \mathrm{C} = \hat{x}\,(\mathrm{C})$ per ogni $\mathrm{C} \in \mathit{Clel}$.

(L 4.4) $\tau_{44}\, x = \operatorname{rest}_x \in \mathit{Urop}$ se $x \in \mathit{Clel}$, ove $\operatorname{rest}_x y = y_{|x}$ per ogni $y \in \mathit{Urop}$.

2.5. *L'operazione di applicazione generalizzata.*

Concludiamo la lista con assiomi che permettono di definire su V una struttura moltiplicativa che estende l'applicazione di un'operazione ad un elemento del suo dominio, in modo che V divenga un modello « naturale » del λ-calcolo.

τ_{50} è l'applicazione generalizzata, τ_{51} è sep τ_{50}, τ_{52} corrisponde al combinatore S di Curry; τ_{53} e τ_{54} individuano, all'interno dell'azione universale di τ_{51} e τ_{50}, rispettivamente le $f \in \mathit{Urop}$ e le coppie (f, x) con $f \in \mathit{Urop}$ e $x \in \operatorname{dom} f$.

(L 5.0) $\operatorname{dom} \tau_{50} = V$ e $\tau_{50}\,(f, x) = fx$ se $f \in \mathit{Urop}$ e $x \in \operatorname{dom} f$.

(L 5.1) $\tau_{51}\, x \in \mathit{Urop}$ e $(\tau_{51}\, x)\, y = \tau_{50}\,(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathrm{V}$.

(L 5.2) $\tau_{52}\, x \in \mathit{Urop}$ e $\tau_{50}\,((\tau_{52}\, x)\, y, z) = \tau_{50}\,(\tau_{50}\,(x, z), \tau_{50}\,(y, z))$ per ogni $x, y, z \in V$.

(L 5.3) $\tau_{53} f = \tau_{51} f$ se e solo se $f \in \mathit{Urop}$.

(L 5.4) $\tau_{54}\, z = \tau_{50}\, z$ se e solo se $z = (f, x)$ con $f \in \mathit{Urop}$ e $x \in \operatorname{dom} f$.

Si osservi che, assumendo soltanto gli assiomi L 2.2 ed L 3.7 oltre ad L 5.0-2, la completezza combinatoria del λ-calcolo garantisce che alla classe delle operazioni universalmente definite appartengono tutte le operazioni che possono essere « descritte » in termini dell'applicazione τ_{50}, in particolare le corrispondenti restrizioni di tutte le operazioni τ_{3k}.

§ 3. Osservazioni conclusive

Concludiamo questa nota con qualche importante osservazione.

(i) Come già più volte sottolineato, l'intera lista L non è consistente con la teoria quadro Q, in quanto permette di dedurre l'elementarità della classe $R = \{x \mid x \notin x\}$.

Si noti che il problema non si risolve escludendo la classe E da *Clel* o la stabilità di *Clel* per complemento, e neppure eliminando entrambi gli assiomi: vi sono infatti molti altri modi di dedurre la contraddizione $R \in Clel$; ad esempio,

$$R = \mathrm{dom}\,(id_{|\{\emptyset\}} \text{ o } dom \text{ o } \langle g\,, g \text{ o } sing\rangle)$$

ove *dom* è un'operazione che dà il dominio, ottenibile come $dom = \tau_{43}\,(\tau_{27}\,(2,1))$, e $g = {}^t\mathrm{rest}\,(id) = (\tau_{33}\,\tau_{44})\,\tau_{20}$ associa $id_{|x}$ ad ogni $x \in Clel$, o anche, disponendo di un'operazione di intersezione binaria $int \in Urop$ (come la τ_{12}),

$$R = \mathrm{dom}\,(id_{|\{\emptyset\}} \text{ o } int \text{ o } \langle id\,, sing\rangle)$$

ove basta che il dominio di ogni operazione urelementare sia una classe elementare.

D'altra parte, la consistenza relativa di vari sottosistemi estratti dalla lista L è dimostrata (mediante l'« attivazione » di urelementi atomici) in [3], cui rimandiamo per la presentazione delle più ampie liste consistenti da noi identificate; rileviamo nel contempo che, essendo la scelta di eliminare o introdurre assiomi legata alle nozioni che si intendono privilegiare nel contesto fondazionale considerato, una visione più completa del problema dell'autoriferimento sarà possibile dopo l'introduzione nella teoria quadro di altri concetti fondamentali, quali relazioni, qualità, categorie, variabili, etc. (vedi [1], [4]). Auspichiamo infatti che matematici e logici, esperti in diversi settori, contribuiscano alla determinazione delle « più desiderabili » proprietà autoreferenziali e alla conseguente formulazione di assiomi adeguati.

(ii) È evidente che gli assiomi L $i\,.\,j$ non sono indipendenti fra loro. Infatti, in non pochi casi, abbiamo postulato direttamente l'esistenza di classi e operazioni che avrebbero potuto essere ottenute mediante un'opportuna combinazione di altri assiomi.

In effetti, essendo l'intera lista L incosistente, ci è parso opportuno garantire la possibilità di escludere qualche assioma senza indebolire eccessivamente il sistema rimanente: ad esempio, mantenendo l'unione e l'intersezione come assiomi separati si riducono le conseguenze di un'eventuale eliminazione dell'assioma del complemento.

Notiamo, in particolare, che le operazioni τ_{51} e τ_{52} si possono ottenere con opportune combinazioni degli assiomi L 2 . i, L 3 . j; poiché, però, non è ancora disponibile alcun modello di tutti questi assiomi, abbiamo incluso L 5.1-2 nella lista per ottenere una struttura di λ-modello su V assumendo soltanto i meno problematici assiomi L 2.2 ed L 3.7.

(iii) Ognuno degli assiomi L $i \, . \, j$ (per $i > 0$) è posto nella forma $\tau_{ij}\, x = y$ se $x \in C$, ove C è un'opportuna classe. Pertanto eventuali valori di τ_{ij} al di fuori di C non sono determinati dall'assioma corrispondente, lasciando così aperta la possibilità di specificare ulteriori valori di τ_{ij} ogniqualvolta ciò sembri opportuno.

Di fatto ci varremo di tale possibilità nelle future estensioni della teoria quadro con nuove nozioni primitive (quali relazioni, qualità, categorie, variabili, vedi [4]): ad esempio, assumeremo che la stessa τ_{ij} fornisca il grafico, o rispettivamente la selezione, anche per relazioni e qualità, oltreché per operazioni.

Poiché l'identificazione di un dato dominio D è utile in molti casi, ci riserviamo di ottenere tale risultato assumendo che due o più delle operazioni τ_{ij} coincidano esattamente sul dominio D con la τ_{ij} considerata: ad esempio, volendo identificare più precisamente la composizione di operazioni urelementari, si può continuare ad ammettere che τ_{31} sia definita anche fuori da $Urop^2$, ma che $x \in Urop^2$ se e solo se $\tau_{31}\, x = \tau_{311}\, x = \tau_{321}\, x$.

In particolare, poiché τ_{50} dà una nozione « indifferenziata » di applicazione, che non individua né le operazioni urelementari né i loro domini, abbiamo a tal fine introdotto gli assiomi L 5.3-4.

(iv) La maggior parte degli assiomi L $i \, . \, j$ (per $i > 0$) afferma due cose: primo, che la classe $Clel \cup Urop$ è stabile rispetto a certe operazioni fondamentali; secondo, che gli elementi $\tau_{ij} \in Urop$ eseguono tali operazioni ogniqualvolta è possibile.

Vi sono pertanto due vie naturali di indebolire ogni tale assioma L $i \, . \, j$, che esemplifichiamo per semplicità nel caso dell'assioma della potenza L 1.4: da una parte, senza introdurre l'operazione τ_{14}, si può postulare l'assioma di stabilità

(S 1.4) $z^n \in Clel$ per ogni $z \in Clel$ e ogni $n \in \mathbf{N}$,

dall'altra si può imporre a τ_{14} l'assioma ristretto

(T 1.4) $\tau_{14}(n\, ,\, z) = z^n$ ogniqualvolta $z^n \in Clel$ (e $(n\, ,\, z) \in \mathbf{N} \times Clel$),

senza precisare se $(n\, ,\, z) \in \operatorname{dom} \tau_{14}$ quando $z^n \notin Clel$.

Una forma di « identificazione del dominio » si può comunque ottenere assumendo

(D 1.4) $(n\, ,\, z) \in \operatorname{dom} \tau_{14}$ se e solo se $z^n \in Clel$, per ogni $(n\, ,\, z) \in \mathbf{N} \times Clel$.

Infine può essere formulata, come manifestazione estrema del « principio di maneggevolezza degli insiemi », una versione locale dell'intera lista L, ottenuta sostituendo in ciascun assioma *Ins* e *Uroploc* $= \{f \in$ *Urop* $\mid$ graf $f \in$ *Ins*$\}$ al posto di *Clel* e *Urop*, rispettivamente: la consistenza relativa della lista L^{loc} così ottenuta è dimostrata in [3].

Bibliografia

[1] E. De Giorgi e M. Forti (1984) – *Premessa a nuove teorie assiomatiche dei fondamenti della matematica.* « Dipart. di Matematica, Pisa Quad. », *45*, 2-31.

[2] E. De Giorgi e M. Forti (1985) – *Una teoria quadro per i fondamenti della matematica.* « Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Sci. Mat. Fis. Nat. » (in corso di pubblicazione).

[3] M. Forti, F. Honsell e V.M. Tortorelli – *Modelli della teoria quadro con autoriferimento* (in preparazione).

[4] E. De Giorgi, M. Forti e V.M. Tortorelli – *Un'estensione della teoria quadro: relazioni, qualità, affermazioni, variabili, categorie, universi* (in preparazione).

[5] K. Goedel (1940) – *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis.* « Ann. Math. Stud. », *3*, Princeton.