Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Renata Grimaldi

Non-esistenza di cusps nella geometria asintotica delle foglie

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **80** (1986), n.5, p. 292–297.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1986_8_80_5_292_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Geometria differenziale. — *Non-esistenza di cusps nella geometria asintotica delle foglie* (*). Nota di RENATA GRIMALDI (**), presentata (***) dal Corrisp. E. VESENTINI.

Questa Nota è dedicata
al Prof. André Lichnerowicz

RÉSUMÉ. — On montre qu'il n'existe pas des cusps pour la géométrie asymptotique des feuilles d'un feuilletage différentiable d'une variété différentiable compacte V.

INTRODUZIONE

È noto che due metriche riemanniane g e g' su una varietà differenziabile V si dicono *quasi-isometriche* se esistono un diffeomorfismo $f : V \to V$ e due costanti positive λ e μ tali che:

$$\lambda \| v \|_g \leq \| f_* (v) \|_{g'} \leq \mu \| v \|_g \qquad \forall v \in TV .$$

È altresì noto (v. [1], [2]) che, se V è compatta, tutte le metriche riemanniane su V sono quasi-isometriche e, se $\mathcal{F}$ è una foliazione differenziabile di V, su ogni foglia F (anche non compatta) esse inducono una unica classe di equivalenza di metriche complete quasi-isometriche, che si chiama « *geometria asintotica* » della foglia.

Nel presente lavoro, proseguendo lo studio di tale geometria asintotica, si considera, su una varietà riemanniana $(\overline{V}, \overline{g})$ bidimensionale, un « cusp quasi-isometrico » (nozione della quale si dà la definizione), e si dimostra che un tale « cusp » è un concetto invariante per quasi-isometrie.

Poi si considera una varietà differenziabile compatta V, di dimensione $m > 2$, e una foliazione differenziabile $\mathcal{F}$ di V, di dimensione due, e si dimostra che non può esistere una foglia F che ha un « cusp quasi-isometrico », ovverosia che la geometria asintotica di ogni foglia F di $\mathcal{F}$ non contiene una metrica per la quale F abbia un « cusp ».

Per semplicità ci si limita a considerare foglie di dimensione due, visto che il classico « cusp iperbolico », in dimensione due, è molto facile da immaginare;

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R. e col contributo del M.P.I.

(**) Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Via Archirafi 34, Università di Palermo.

(***) Nella seduta del 10 maggio 1986.

in effetti però tutto il nostro ragionamento vale per foglie di dimensione $n \geq 2$ di una varietà compatta di dimensione $m > n$.

L'idea per questo lavoro è nata da una conversazione col prof. Marcel Berger. L'autore ringrazia anche il prof. V. Poénaru per le utili discussioni sull'argomento.

1. Sia $(\overline{\mathrm{V}}, \overline{g})$ una varietà riemanniana bidimensionale.

DEFINIZIONE. *Chiameremo* « cusp quasi-isometrico » *di* $(\overline{\mathrm{V}}, \overline{g})$ *una famiglia differenziabile* $\{\gamma_t(u)\}$, con $t \in [0, +\infty)$, $u \in [0, 1] = \mathrm{I}$, *di curve differenziabili chiuse omotope e tali che:*

1) $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{L}(\gamma_t) = 0$, *dove* $\mathrm{L}(\gamma_t)$ *indica la lunghezza, relativa alla metrica* $\overline{g}$, *della curva* γ_t;

2) *è vera una delle seguenti condizioni:*

2*a*) *per ogni* $t \in [0, +\infty)$, *la curva* γ_t *non è omotopa a costante;*

2*b*) *per ogni* $t \in [0, +\infty)$, *la curva* γ_t *è omotopa a costante. In tale caso se* $\mathrm{H}_t : \mathrm{I} \times \mathrm{I} \to \overline{\mathrm{V}}$ *è l'omotopia,* $\exists\, c \in \mathbf{R}^+$ *tale che*:

$$\operatorname{diam} \mathrm{H}_t \geq c > 0 \qquad \forall t \in [0, +\infty), \tag{1}$$

dove $\operatorname{diam} \mathrm{H}_t =: \sup \mathrm{d}(\mathrm{H}_t(x), \mathrm{H}_t(y))$ *per* $x, y \in \mathrm{I} \times \mathrm{I}$, *essendo* d *la distanza in* $\overline{\mathrm{V}}$ *relativa alla metrica* $\overline{g}$. *Il numero* $c > 0$ non *dipende dalla scelta della omotopia.*

OSSERVAZIONE A. Le ipotesi 1) e 2) implicano che:

$$\lim_{t \to +\infty} \gamma_t(u) = \infty, \tag{2}$$

nel senso che le curve γ_t fuoriescono da ogni compatto di $\overline{\mathrm{V}}$. Infatti, se la formula (2) è falsa, esiste un compatto $\mathrm{K} \subset \overline{\mathrm{V}}$ tale che, per ogni numero naturale n, esistono $t_n > n$ ed $u_n \in \mathrm{I}$ tali che $\gamma_{t_n}(u_n) \in \mathrm{K}$; chiaramente, la successione $t_n \to +\infty$. Poiché $\lim\limits_{t_n \to \infty} \mathrm{L}(\gamma_{t_n}) = 0$, è possibile trovare un compatto più grande $\mathrm{K}_1 \supset \mathrm{K}$ tale che $\gamma_{t_n}(u) \in \mathrm{K}_1$, per ogni $u \in \mathrm{I}$. Infatti basta prendere $\varepsilon = \sup\limits_n \mathrm{L}(\gamma_{t_n})$ e considerare $\mathrm{K}_1 =: \{x \in \overline{\mathrm{V}} \mid \mathrm{d}(\mathrm{K}, x) \leq \varepsilon\}$.

Ora, fissato $u \in \mathrm{I}$, si ha che la successione $\{\gamma_{t_n}(\overline{u})\}$ di punti di K_1 ammette una sottosuccessione $\{\gamma_{t_{n_i}}(\overline{u})\}$ convergente ad un punto $q \in \mathrm{K}_1$. Da ciò, poiché $\mathrm{L}(\gamma_{t_{n_i}}) \to 0$, e poiché, come si osserva facilmente, $\mathrm{d}(\gamma_{t_{n_i}}(u), q) \leq \mathrm{d}(\gamma_{t_{n_i}}(\overline{u}), q) + \mathrm{L}(\gamma_{t_{n_i}})$, per ogni $u \in \mathrm{I}$, si ha:

$$\{\gamma_{t_{n_i}}(u)\} \to q \qquad \forall u \in \mathrm{I}, \tag{3}$$

e la convergenza è *uniforme* rispetto ad u.

La formula (3) ci assicura che è certamente contraddetta la condizione 2 *a*), ed inoltre che è possibile trovare per le curve $\gamma_{t_{n_i}}$ delle omotopie $H_{t_{n_i}}$ di diametro arbitrariamente piccolo (il che contraddice anche la condizione 2 *b*)), sviluppando il seguente argomento di convessità. Quando la curva γ_{t_n} è abbastanza vicina al punto q, prendendo una «sfera geodetica» ([3]) di centro q e raggio $\varepsilon = 2\,L(\gamma_{t_n})$, ogni punto $\gamma_{t_n}(u)$ può essere congiunto al punto q con una unica geodetica minimale di lunghezza $\leq \varepsilon$. Allora, indicando con S^1 il bordo del disco unitario chiuso $D^2 \subset \mathbf{R}^2$, consideriamo l'applicazione $H' : D^2 \to \overline{V}$ che manda S^1 in $\overline{V}$ mediante γ_{t_n}, il centro o di D^2 nel punto q, e ogni raggio $[0\,, p(u)] \subset D^2$, dove $p(u) \in S^1$, $u \in I$ e $p : I \to S^1$ è una parametrizzazione di S^1 tale che $p(0) = p(1)$, (il quale raggio ha lunghezza 1), nell'unico arco geodetico minimale che congiunge q al punto $\gamma_{t_n}(u)$, e ciò in una maniera «*lineare*»:

$$\frac{d(q\,, H'(\theta))}{d(q\,, \gamma_{t_n}(u))} = \|\theta\| \qquad \forall\theta \in [0\,, p(u)]\,,$$

dove d è la distanza, in $\overline{V}$, relativa alla metrica $\overline{g}$, e $\|\cdot\|$ è la norma euclidea. L'applicazione H' è allora una omotopia, definita su D^2, tra la curva chiusa γ_{t_n} e la costante q, di diametro arbitrariamente piccolo; ma, come è noto, (v. [4]) ad H' corrisponde una omotopia H definita su $I \times I$, e con lo stesso diametro.

Ciò completa la dimostrazione.

OSSERVAZIONE B. La nozione di «cusp quasi-isometrico» si ispira alla nozione classica di «cusp» in geometria iperbolica (v., per esempio, [5]), di cui è la generalizzazione. In dimensione 2, un cusp iperbolico è dato dal quoziente $\mathbf{H}^2/\Gamma$, dove $\mathbf{H}^2$ è il piano di Lobačevskij e Γ è una sua isometria di tipo parabolico, cioè con un solo punto fisso all'infinito. Ogni cusp iperbolico è un cusp quasi-isometrico.

OSSERVAZIONE C. Un cusp quasi-isometrico definisce un «bout» nel senso di Freudenthal-Hopf (v., per esempio, [6]).

Le seguenti figure illustrano i differenti tipi di «cusps»:

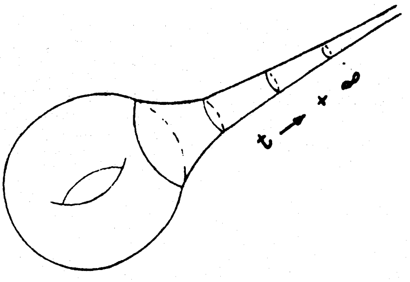

Fig. 1. - Toro con cusp di tipo 2 *a*).

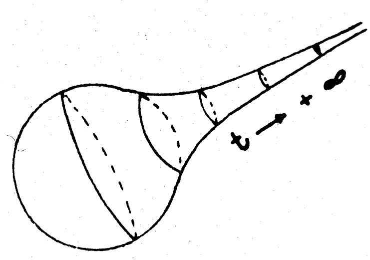

Fig. 2. - Sfera con cusp di tipo 2 *b*).

PROPOSIZIONE 1. *Se* $\{\gamma_t(u)\}$ *è un cusp quasi-isometrico per la metrica* $\bar{g}$ *di* $\bar{V}$, *lo è* anche *per ogni metrica* g' *di* $\bar{V}$ *che sia quasi-isometrica a* $\bar{g}$.

Dimostrazione. Sia g' una metrica riemanniana di $\bar{V}$, quasi-isometrica alla metrica $\bar{g}$: dunque esiste un diffeomorfismo $f : \bar{V} \to \bar{V}$ ed esistono due costanti $\lambda , \mu > 0$ tali che:

$$(4) \qquad \lambda \| v \|_{\bar{g}} \leq \| f_* (v) \|_{g'} \leq \mu \| v \|_{\bar{g}} \qquad \forall v \in T\bar{V} .$$

Sia $\{\gamma_t(u)\}$ la famiglia di curve differenziabili che costituiscono il « cusp » di $\bar{V}$ per la metrica $\bar{g}$, e consideriamo $\gamma'_t = : f \circ \gamma_t : I \to \bar{V}$; la famiglia $\{\gamma'_t(u)\}$ è allora una famiglia differenziabile di curve differenziabili chiuse di $\bar{V}$. Se $L(\gamma_t)$ e $L'(f \circ \gamma_t)$ indicano, nell'ordine, le lunghezze di γ_t e di $f \circ \gamma_t$ (relative risp. alle metriche $\bar{g}$ e g'), poiché f è una quasi-isometria, se μ verifica la (4) si ha [2] $L'(f \circ \gamma_t) \leq \mu L(\gamma_t)$, per ogni $t \in [0 , +\infty)$; dunque $\lim\limits_{t \to +\infty} L'(f \circ \gamma_t) = 0$.

Proviamo ora che vale la proprietà 2. È ovvio che se ogni curva γ_t non è omotopa a costante, anche ogni curva $f \circ \gamma_t$ non è omotopa a costante. Infine sia, per ogni t, γ_t omotopa a una costante b e sia H_t l'omotopia. Poiché f è continua, $f \circ \gamma_t$ è omotopa a $b' = f(b)$, per ogni $t \in [0 , +\infty)$; sia $H'_t = : f \circ H_t$ l'omotopia. Essendo f una quasi-isometria, se d' indica la distanza relativa alla metrica g' e se λ verifica la (4), si ha [2]: $\lambda\, d(H_t(x) , H_t(y)) \leq d'(f(H_t(x)) , f(H_t(y)))$, $\forall x , y \in I \times I$ e $\forall t \in [0 , +\infty)$; si ha dunque $\lambda \operatorname{diam} H_t \leq \operatorname{diam} H'_t$, $\forall t \in [0 , +\infty)$. Da questa disuguaglianza e dalla formula (1), ponendo $c' = \lambda c$ segue allora:

$$\operatorname{diam} H'_t \geq c' > 0 \qquad \forall t \in [0 , +\infty).$$

Il numero c' non dipende da t e neppure dalla omotopia: infatti ad ogni omotopia $\bar{H}'_t$ si può associare l'omotopia $\bar{H}_t = : f^{-1} \cdot \bar{H}'_t$. La proposizione è così completamente dimostrata.

2. Sia ora V una varietà differenziabile *compatta*, di dimensione $m > 2$, g una qualunque metrica riemanniana su V e $\mathscr{F}$ una qualunque foliazione differenziabile, di dimensione 2, di V.

Ricordiamo (v. [7]) che una foliazione di dimensione p (o di codimensione $q = m - p$) e di classe C^r di una varietà m-dimensionale V (di classe C^s, $s \geq r$) è una decomposizione di V in sottoinsiemi connessi disgiunti $\{F_a\}_{a \in A}$, chiamati *foglie*, con la seguente proprietà: ogni punto di V ha un intorno U (detto intorno « *distinto* ») e un sistema di coordinate locali di classe C^r $(x , y) : U \to R^p \times R^q$ tali che, per ogni foglia F_a, le componenti di $U \cap F_a$ (dette « *placche* », v. [8]) sono descritte dalle equazioni:

$$y^1 = \text{costante}, \; \dots , \; y^q = \text{costante}.$$

PROPOSIZIONE 2. *La geometria asintotica di ogni foglia* F *di* V *non contiene una metrica per la quale* F *abbia un cusp.*

Dimostrazione. Se (V, g) è una varietà riemanniana compatta, allora (v. [3]) esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che, per ogni ε positivo e minore di ε_0, è possibile ricoprire V con un numero finito N_ε di intorni « convessi » $W'_1, \ldots, W'_{N_\varepsilon}$, cioè tali che due punti qualsiasi $x, y \in W'_i$ $(i = 1, \ldots, N_\varepsilon)$ possono essere congiunti con una unica geodetica minimale che è tutta contenuta in W'_i e la cui lunghezza è minore di $\varepsilon/2$. Ogni W'_i è una « sfera geodetica » di centro un certo punto $p_i \in V$ e raggio $\varepsilon/4$; se indichiamo con W_i la sfera geodetica, sempre di centro p_i, ma di raggio $\varepsilon/2$, sarà ancora $V = \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} W_i$.

Sia ora $\mathscr{F}$ una foliazione differenziabile, di dimensione 2, della varietà (V, g). Supponiamo, per assurdo, che una foglia F abbia un cusp quasi-isometrico relativo alla metrica indotta g_F. Poiché V è compatta, essa può essere ricoperta da un numero finito M di intorni aperti « distinti » $U'_1, \ldots, U'_M$; indicando con U_i un altro intorno aperto « distinto » che contiene *propriamente* U'_i $(i = 1, \ldots, M)$, si ha ancora $V = \bigcup_{i=1}^{M} U_i$. Se $c > 0$ è una costante che verifica la condizione 2*b*), possiamo sempre supporre diam $U'_i < c/2$ e diam $U_i < c$. Osserviamo che, per ε abbastanza piccolo ($\varepsilon < \min_i d(\partial U'_i, \partial U_i)$ dove ∂ indica il bordo), si ha che se $W_j \cap U'_i \neq \varnothing$, allora $W_j \subset U_i$.

Consideriamo ora la famiglia $\{\gamma_t(u)\}$ delle curve che costituiscono il cusp della foglia F. Poiché $\lim_{t \to +\infty} L(\gamma_t) = 0$, $\exists\, t_0$ tale che $L(\gamma_{t_0}) < \varepsilon/2$. Sia q un punto della curva $\gamma_{t_0}(u)$; $\exists\, j$ tale che $q \in W'_j$. Sia $\bar{q}$ un qualunque altro punto della suddetta curva; poiché $L(\gamma_{t_0}) < \varepsilon/2$, sarà anche $d(\bar{q}, q) < \varepsilon/2$ e quindi $\gamma_{t_0}(u) \in W_j$ per ogni $u \in I$, cioè la curva γ_{t_0} è *tutta* contenuta in W_j e si ha $\gamma_{t_0}(u) \in F \cap W_j$ per ogni $u \in I$.

Ora, il punto q è contenuto in un intorno distinto U'_i, ed essendo $W_j \cap U'_i \neq \varnothing$, si ha $W_j \subset U_i$ e quindi la curva γ_{t_0} è *tutta* contenuta in U_i. Poiché la curva è un insieme connesso, essa è tutta contenuta in una sola placca. Ma le placche si possono prendere diffeomorfe ai dischi aperti di R^2, quindi, sono semplicemente connesse. Allora la curva chiusa γ_{t_0} non può non essere omotopa a costante, e così si esclude il caso 2 *a*). Quindi la curva γ_{t_0} è omotopa a costante, nella placca. Sia H_{t_0} l'omotopia; poiché la placca è contenuta in U_i ed essendo diam $U_i < c$, si contraddice l'ipotesi 2 *b*) secondo la quale dovrebbe essere diam $H_{t_0} > c$.

Dunque si perviene ad un assurdo.

BIBLIOGRAFIA

[1] PHILLIPS A. e SULLIVAN D. (1981) - *Geometry of leaves*. « Topology », *20*, 209-218.

[2] GRIMALDI R. (1983) – *Sulla geometria asintotica delle foglie di una foliazione*. « Rend. Circ. Mat. Palermo », Serie II, Tomo XXXII, 199-207.

[3] KOBAYASHI S. e NOMIZU K. (1963) – *Foundations of differential geometry*. Vol. I. « Interscience Publishers ».

[4] MASSEY W.S. (1977) – *Algebraic topology : an introduction*. « Graduate Texts in Mathematics », Springer-Verlag.

[5] GROMOV M. (1979-80) – *Hyperbolic manifolds according to Thurston and Jorgensen*. Séminaire Bourbaki, 32e année, n. 546.

[6] POÉNARU V. (1974) – *Groupes discrets*. Springer Lecture Notes, 421.

[7] LAWSON B. (1975) – *The quantitative theory of foliations*. Regional Conferences series in « Math. », *27*, A.M.S.

[8] DAZORD P. (1981) – *Théorie des feuilletages*. Cours de D.E.A. polygraphié Lyon.