Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Luigi Stazi

Sulla Meccanica relativistica delle particelle con struttura scalare

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **80** (1986), n.4, p. 196–204.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1986_8_80_4_196_0>

Meccanica. — *Sulla Meccanica relativistica delle particelle con struttura scalare* (*). Nota di LUIGI STAZI, presentata (**) dal Socio G. GRIOLI.

SUMMARY. — The intrinsically conservative dynamics of a particle with scalar structure are considered; it is known that in terms relative to an arbitrary Galilean frame of reference the problem is resolved by a canonical system with non-singular hamiltonian also involving the external field.

INTRODUZIONE

È ben noto che in Relatività si impongono due punti di vista distinti: quello *assoluto*, ambientato nello spazio-tempo (piatto o curvo che sia), in termini puramente geometrici, e quello *relativo*, nell'ambito di un prefissato riferimento tridimensionale (solido galileiano ovvero fluido di riferimento), in termini più propriamente fisici. Corrispondentemente, per quanto riguarda la dinamica di una particella, si hanno due classi distinte di problemi conservativi, a seconda che si adotti l'uno o l'altro punto di vista. La distinzione si pone, con la stessa legittimità, sia in Relatività ristretta che in Relatività generale; qui ci limiteremo tuttavia al solo aspetto minkowskiano del problema, nell'ambito delle particelle con struttura scalare, cercando soprattutto di sottolineare le differenze sostanziali tra la dinamica conservativa in senso classico e la dinamica intrinsecamente conservativa.

1. PROBLEMI RISTRETTI. EQUAZIONI ASSOLUTE E RELATIVE.

Dal punto di vista assoluto, la dinamica di una particella, ove questa si intenda rappresentata da un punto materiale con struttura scalare, richiede anzitutto l'introduzione del 4-*impulso* $\mathbf{P}$, che riassume, in un'unica grandezza assoluta, il contenuto energetico e cinematico della particella (1):

$$\mathbf{P} = m_0 \mathbf{V}\,; \tag{1}$$

qui m_0 denota la *massa propria* della particella, variabile lungo la sua linea oraria: $m_0 = m_0(\tau)$ (τ essendo il tempo proprio), e $\mathbf{V}$ è la 4-*velocità*, di norma costante: $\mathbf{V}\cdot\mathbf{V} = -c^2$.

(*) Ricerca finanziata dal M.P.I.
(**) Nella seduta del 12 aprile 1986.
(1) Almeno nel caso materiale; per la dinamica unificata, comprendente anche i fotoni, cfr. [1], II_2, nn. 13 e 14.

Viceversa, dalla (1) si traggono m_0 e $\mathbf{V}$ in termini del 4-impulso:

$$(1') \qquad m_0 = \frac{1}{c}\sqrt{-\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}} \quad , \quad \mathbf{V} = \frac{c\mathbf{P}}{\sqrt{-\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}}} .$$

Assegnata che sia la *4-forza* $\mathbf{K}$ agente sulla particella, cioè la sua *legge* che, nei *problemi ristretti* è tradotta in funzione del tempo proprio, del punto evento $\mathrm{E} \in \mathrm{M}_4$, e del 4-impulso: $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\tau, \mathrm{E}, \mathbf{P})$, l'equazione dinamica fondamentale è notoriamente espressa dal legame $\mathrm{d}\mathbf{P}/\mathrm{d}\tau = \mathbf{K}(\tau, \mathrm{E}, \mathbf{P})$; sì che la determinazione del «moto» (linea oraria l^+ ed m_0) è ricondotta all'integrazione del sistema differenziale del 1° ordine

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}\tau} = \mathbf{K}(\tau, \mathrm{E}, \mathbf{P}) \quad , \quad \frac{\mathrm{d}\Omega\mathrm{E}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{c\mathbf{P}}{\sqrt{-\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}}} ,$$

a partire dai *dati iniziali* E_0 e $\mathbf{P}_0 \neq \mathbf{O}$, Ω essendo un punto fisso di M_4, scelto a piacere.

Volendo, si può separare $\mathbf{P}$ nel prodotto (1), ed intendere $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\tau, \mathrm{E}, m_0, \mathbf{V})$; il sistema differenziale è allora

$$(3) \qquad \frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{1}{c^2}\mathbf{K}\cdot\mathbf{V} \quad , \quad m_0\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}\tau} = \mathbf{K} + \frac{1}{c^2}\mathbf{K}\,.\,\mathbf{V}\mathbf{V} \, , \, \frac{\mathrm{d}\Omega\mathrm{E}}{\mathrm{d}\tau} = \mathbf{V} ,$$

di nove equazioni del 1° ordine nelle nove incognite $m_0 = m_0(\tau)$, $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\tau)$, $\mathrm{E} = \mathrm{E}(\tau)$; si ha un'equazione in più rispetto al sistema (2), e i dati iniziali non sono più liberi, ma subordinati alle condizioni $m_0 \neq 0$, $\mathbf{V}\cdot\mathbf{V} = -c^2$.

La (3) suggerisce una distinzione, nell'ambito delle 4-forze, tra quelle *puramente motrici*: $\mathbf{K}\cdot\mathbf{V} = 0$, e quelle di *tipo calorifico*: $\mathbf{K} \parallel \mathbf{V}$, pur se tale distinzione non esaurisce la classe delle 4-forze. Le prime ($\mathbf{K}\cdot\mathbf{V} = 0$) hanno il solo effetto di incurvare la linea oraria, senza modificare la massa propria; viceversa le seconde ($\mathbf{K} \parallel \mathbf{V}$) modificano la massa propria, ma sono compatibili solo con una linea oraria rettilinea (del genere tempo).

Dal punto di vista relativo ad un riferimento inerziale, caratterizzato (in M_4) dal versore γ dell'asse dei tempi ($\gamma\cdot\gamma = -1$), il 4-impulso si decompone nella somma

$$(4) \qquad \mathbf{P} = \boldsymbol{p} + \frac{\mathscr{E}}{c}\gamma ,$$

ove $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ è la *quantità di moto relativa*, $m = \eta m_0$ la *massa relativa*, $\eta = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ il fattore di LORENTZ, e infine $\mathscr{E} = mc^2$ l'*energia materiale relativa*.

Anche la 4-forza $\mathbf{K}$ presenta una componente spaziale ed una temporale; si ha precisamente

$$\mathbf{K} = \eta \left(\mathbf{F} + \frac{W}{c} \gamma \right) , \tag{5}$$

essendo $\mathbf{F}$ la *forza meccanica relativa* al riferimento, e W la *potenza complessiva*, cioè quella meccanica più quella calorifera:

$$W = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{v} + q ; \tag{6}$$

la grandezza q, *potenza termica relativa*, è definita dalla relazione, in parte suggerita dalla $(3)_1$:

$$q = - \frac{1}{\eta^2} \mathbf{K} \cdot \mathbf{V} . \tag{7}$$

Ciò posto, l'equazione dinamica fondamentale $(2)_1$, tenuto conto delle (4)-(5)-(6), si spezza nelle quattro equazioni newtoniane:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} \quad , \quad \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{v} + q , \tag{8}$$

che traducono l'una il *teorema ordinario dell'impulso*, e l'altra il *teorema dell'energia*; si tratta, almeno nel caso di massa propria variabile, di quattro equazioni indipendenti.

Per quanto riguarda la dipendenza funzionale dei secondi membri, esprimendo anche il fattore di LORENTZ in termini di $\mathscr{E}$ e p: $\eta = 1 \Big/ \sqrt{1 - \frac{p^2}{m^2 c^2}} = 1 \Big/ \sqrt{1 - \frac{p^2 c^2}{\mathscr{E}^2}}$, nei problemi ristretti si può ritenere, in conformità delle (4)-(5): $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, p, \mathscr{E}, t)$, $q = q(x, p, \mathscr{E}, t)$. Il sistema (8) equivale così al sistema differenziale del 1° ordine

$$\left\{ \begin{aligned} &\dot{x}^i = \frac{c^2}{\mathscr{E}} \delta^{ik} p_k , \ \dot{p}_i = \mathrm{F}_i (x, p, \mathscr{E}, t) \\ &\dot{\mathscr{E}} = \frac{c^2}{\mathscr{E}} \mathrm{F}^i p_i + q(x, p, \mathscr{E}, t) \end{aligned} \right. \tag{9}$$

nelle sette incognite $x^i = x^i(t)$, $p_i = p_i(t)$, $\mathscr{E} = \mathscr{E}(t)$ $\qquad (i = 1, 2, 3)$.

Una utile variante al sistema (9), particolarmente indicata nel caso intrinsecamente conservativo, si ottiene assumendo come variabili indipendenti le

x^i, p_i ed m_0, in luogo di x^i, p_i ed $\mathscr{E}$. In tal caso, tenuto conto del legame $\mathscr{E} = c^2 \sqrt{m_0^2 + p^2/c^2}$, il sistema si trasforma al modo seguente:

$$
(10) \qquad \begin{cases} \dot{x}^i = \dfrac{\delta^{ik} p_k}{\sqrt{m_0^2 + p^2/c^2}} \quad , \quad \dot{p}_i = \mathrm{F}_i(x, p, m_0^2, t) \\[2ex] \left(\dfrac{1}{2} m_0^2\right)^{\cdot} = \dfrac{1}{c^2} \sqrt{m_0^2 + p^2/c^2}\, q(x, p, m_0^2, t) . \end{cases}
$$

Tale punto di vista, in quanto coinvolge grandezze assolute (m_0) e relative (x^i *e* p_i) potrebbe dirsi *semirelativo.*

2. DINAMICA CONSERVATIVA IN SENSO CLASSICO.

Nell'ipotesi che la massa propria sia invariabile lungo la linea oraria (particelle prive di struttura) la 4-forza è necessariamente di tipo motrice: $\mathbf{K} \cdot \mathbf{V} = 0$, ed implica $q = 0$ in ogni riferimento galileiano [cfr. (7)].

Le equazioni dinamiche, dal punto di vista relativo, si riducono ora alla sola $(8)_1$, in quanto la $(8)_2$, ne discende quale conseguenza; in termini equivalenti, si ha il sistema (10) ridotto:

$$
(11) \qquad \dot{x}^i = \frac{\delta^{ik} p_k}{\sqrt{m_0^2 + p^2/c^2}} \quad , \quad \dot{p}_i = \mathrm{F}_i(x, p, t) \quad , \quad m_0 = \text{cost.}
$$

Supponiamo ora che, nell'ambito del riferimento galileiano considerato, la forza meccanica $\mathbf{F}$ dipenda solo dalla posizione occupata dalla particella: $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x)$; si tratta di una *proprietà che non si conserva nel passaggio ad un altro riferimento* S', poiché, in quest'ultimo, la forza viene a dipendere anche dalla velocità del punto, oltre che dal moto di trascinamento; essa è del tipo

$$
\mathbf{F}' = \frac{1}{\sigma}\left[\alpha \mathbf{F} - \frac{1}{c^2} \mathbf{F} \cdot \left(\boldsymbol{v} - \frac{\boldsymbol{u}}{1+\alpha}\right) \boldsymbol{u}\right],
$$

essendo $\alpha = \sqrt{1 - u^2/c^2}$, $\sigma = 1 - \dfrac{1}{c^2} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ (cfr. [1], pag. 99). Ciò vale, in particolare, per le forze conservative, le quali sono caratterizzate, nell'ambito delle forze posizionali, dall'esistenza di una funzione $\mathrm{U}(x)$ regolare ed uniforme, tale che

$$
(12) \qquad \mathrm{F}_i = \frac{\partial \mathrm{U}(x)}{\partial x^i} \qquad (i = 1, 2, 3) .
$$

In tale ipotesi, il sistema (11), che ora diviene

$$
(13) \qquad \dot{x}^i = \frac{\delta^{ik} p_k}{\sqrt{m_0 + p^2/c^2}} \quad , \quad \dot{p}_i = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x^i} ,
$$

si può scrivere in forma canonica:

$$\dot{x}^i = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_i} \qquad (i = 1\,,2\,,3); \tag{14}$$

si tratta di assumere, come funzione hamiltoniana,

$$\mathrm{H} \equiv [m\,c^2]_{m=m(p)} - \mathrm{U}(x)\,, \tag{15}$$

ovvero, in termini espliciti,

$$\mathrm{H} \equiv c\,\sqrt{m_0^2\,c^2 + p^2} - \mathrm{U}(x)\,. \tag{15'}$$

Tale funzione non dipende esplicitamente dal tempo, sicché lungo le soluzioni del sistema (14) si ha $\mathrm{dH}/\mathrm{d}\,t = 0$. Si tratta, come dalla (12), del teorema dell'energia: $\mathrm{d}\mathscr{E}/\mathrm{d}t = \mathbf{F}\cdot\boldsymbol{v}$ che così si conferma conseguenza delle equazioni del moto.

La formulazione (14) ha l'analoga lagrangiana. Invero si ha

$$p_i = mv_i = \frac{m_0\,\delta_{jk}\,\dot{x}^k}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad , \quad \mathscr{H} = \frac{m_0\,c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \mathrm{U}(x)\;;$$

di qui l'espressione della lagrangiana $\mathscr{L} = p_i\,\dot{x}^i - \mathscr{H}$, cioè in definitiva

$$\mathscr{L} = -\,m_0\,c^2\sqrt{\frac{1 - \delta_{hk}\,\dot{x}^h\,\dot{x}^k}{c^2}} + \mathrm{U}(x)\,. \tag{16}$$

Le equazioni di Lagrange corrispondenti traducono, come è naturale, la legge dinamica fondamentale: $\mathrm{d}\,(m\boldsymbol{v})/\mathrm{d}t = \mathbf{F}$; laddove l'integrale primo dell'« energia generalizzata »: $\mathscr{H} \equiv \dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{x}^i}\,\dot{x}^i - \mathscr{L} = \text{cost.}$, conseguenza del fatto che $\mathscr{L}$ è indipendente dalla t esplicita, equivale all'ordinario teorema dell'energia.

Naturalmente la formulazione suddetta, in quanto subordinata alla conservatività della forza, *privilegia un particolare riferimento galileiano, e pertanto non soddisfa il principio di relatività.*

3. Dinamica intrinsecamente conservativa. Punto di vista assoluto.

Fissiamo ora l'attenzione sulle 4-forze dipendenti solo dal punto evento $\mathrm{E}:\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathrm{E})$ e, in particolare, su quelle intrinsecamente conservative. Esse sono caratterizzate dall'esistenza di una funzione scalare $\mathrm{U}_0(\mathrm{E})$, regolare ed uniforme, tale che $\mathbf{K} = \mathrm{Grad}\,\mathrm{U}_0$, ovvero, in termini di componenti cartesiane:

$$\mathrm{K}_\alpha = \frac{\partial \mathrm{U}_0(x)}{\partial x^\alpha} \qquad (\alpha = 0\,,1\,,2,3). \tag{17}$$

Il sistema fondamentale (2) diviene allora

$$\frac{dP_\alpha}{d\tau} = \frac{\partial U_0}{\partial x^\alpha} \quad , \quad \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{cP^\alpha}{\sqrt{-\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}}} \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3), \tag{18}$$

e può essere posto in forma canonica:

$$\frac{dP_\alpha}{d\tau} = -\frac{\partial H_0}{\partial x^\alpha} \quad , \quad \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{\partial H_0}{\partial P_\alpha} \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3), \tag{18'}$$

assumendo, come funzione hamiltoniana,

$$H_0 \equiv -U_0(E) - c\sqrt{-\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}} = H_0(E, \mathbf{P}) \tag{19}$$

Il sistema (18), ovvero (18′) ha carattere invariantivo rispetto alla scelta del riferimento cartesiano. Si tratta tuttavia di una formulazione che non ha riscontro lagrangiano, in quanto è

$$\det \left\| \frac{\partial^2 H_0}{\partial P_\alpha \, \partial P_\beta} \right\| = 0 , \tag{20}$$

venendo così meno la condizione di normalità. In ogni modo, essendo H_0 indipendente dalla τ esplicita: $\partial H_0/\partial\tau = 0$, il sistema (18′) ammette l'integrale primo dell'energia $H_0 = \text{cost.}$, ovvero

$$U_0(E) + c\sqrt{-\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}} = h . \tag{21}$$

Esso, come è ben noto (cfr. [2], X, § 7), riduce il rango del sistema hamiltoniano di due unità, sicché l'integrazione del sistema (18′) è ricondotta a quella di un sistema hamiltoniano di sei equazioni (in sei incognite) seguito da una quadratura. Precisamente, si tratta di risolvere l'equazione (21) rispetto ad una delle P_α, ad esempio rispetto a P_0:

$$P_0 = \tilde{H}(x^\alpha, P_i, h) , \tag{22}$$

e di assumere come *hamiltoniana ridotta* la funzione $\tilde{H}$; essa, dato il significato di P_0, non differisce da $\tilde{H} = -\mathcal{E}/c \equiv -mc$. Invero, assumendo come variabile d'integrazione x^0 anziché τ, si ha il sistema ridotto

$$\frac{dx^i}{dx^0} = -\frac{\partial\tilde{H}}{\partial P_i} \quad , \quad \frac{dP_i}{dx^0} = \frac{\partial\tilde{H}}{\partial x^i} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{23}$$

da cui $x^i = x^i(x^0)$, $P_i = P_i(x^0)$. Tali espressioni, sostituite nella (22), consentono di esprimere anche P_0 in funzione di x^0. Pertanto, eseguendo successivamente una quadratura sull'equazione originaria $dx^0/d\tau \equiv \partial H/\partial P_0$ ove il 2º membro è ormai funzione nota di x^0, si trae in definitiva il legame tra x^0 e τ.

Dato il significato di $x^0 : x^0 = ct$, appare evidente di qui che, nel caso intrinsecamente conservativo, anche la dinamica relativa ad un qualunque riferimento galileiano, è subordinata ad un sistema hamiltoniano; a differenza del caso conservativo ordinario, tale formulazione è tuttavia *invariante rispetto alla scelta del riferimento.*

4. Dinamica intrinsecamente conservativa. Punto di vista relativo

Il procedimento di riduzione del sistema canonico (18′) alla forma (23), in termini di coordinate cartesiane, trova diretto riscontro nel passaggio dalla formulazione assoluta alla formulazione relativa, nell'ambito di un riferimento galileiano.

Nel caso intrinsecamente conservativo, dalla (5) si trae anzitutto

$$F_i = \frac{1}{\eta} K_i = \frac{1}{\eta} \frac{\partial U_0}{\partial x^i}. \tag{24}$$

Al tempo stesso, la (7), atteso il legame $dt/d\tau = \eta$, fornisce la seguente espressione della potenza termica:

$$q = -\frac{1}{\eta} \frac{dU_0}{dt}. \tag{25}$$

D'altra parte, η può essere espressa in termini delle p_i e di m_0: $\eta = \sqrt{1 + p^2/m_0^2 c^2}$ [(2)], sicché il sistema (11) equivale ai legami differenziali

$$\dot{x}^i = \frac{\delta^{ik} p_k}{\sqrt{m_0^2 + p^2/c^2}}, \quad \dot{p}_i = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2/m_0^2 c^2}} \frac{\partial U_0}{\partial x^i} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{26}$$

e all'integrale primo dell'energia

$$m_0 c^2 + U_0(x, t) = \text{cost.} = h, \tag{27}$$

il quale vale ad esprimere m_0 in funzione delle x^i e di t:

$$m_0 = \frac{1}{c^2} [h - U_0(x, t)] = m_0(x, t). \tag{27'}$$

Pertanto, *nel caso intrinsecamente conservativo, la dinamica relativa ad un qualunque riferimento galileiano è regolata dal sistema differenziale* (26), *con l'in-*

(2) Si tenga conto del duplice legame: $m = \eta m_0 = \sqrt{m_0^2 + p^2/c^2}$.

tesa che m_0 non sia più costante [come nel caso (13)], *ma funzione delle x^i e t come dalla* (27').

Si tratta di una formulazione suscettibile della rappresentazione canonica

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i} , \tag{28}$$

si tratta di intendere $H = mc^2 \equiv c^2 \sqrt{m_0^2(x, t) + p^2/c^2}$, ovvero esplicitamente

$$H = \sqrt{[h - U_0(x, t)]^2 + p^2 c^2} , \tag{29}$$

essendo h la costante di cui alla (27).

Si noti esplicitamente che, nel caso attuale, *la funzione hamiltoniana* H (ovvero la massa relativa m, visto che $H \equiv mc^2$) *congloba anche il campo esterno*, attraverso il potenziale invariante U_0. Da questo punto di vista, l'equivalenza tra massa ed energia si conferma in un contesto più ampio di quello usuale.

In ogni caso, a differenza della formulazione assoluta (18'), *il sistema hamiltoniano* (28) *ha ora l'equivalente lagrangiano*. Più precisamente si ha

$$p_i = \frac{m_0(x, t)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \delta_{ik} \dot{x}^k \quad , \quad \mathscr{H} = \frac{m_0(x, t)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} c^2 , \tag{30}$$

da cui la lagrangiana

$$\mathscr{L} = - m_0(x, t) c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} . \tag{31}$$

Le equazioni di LAGRANGE corrispondenti:

$$\frac{d}{dt}\left(m\delta_{ik} \dot{x}^k\right) - \frac{1}{\eta} \frac{\partial U_0}{\partial x^i} = 0$$

traducono ovviamente la legge fondamentale della dinamica relativa

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = \mathbf{F} \qquad \left(F_i = \frac{1}{\eta} \frac{\partial U_0}{\partial x^i}\right) ; \tag{32}$$

al tempo stesso, il teorema dell'energia: $\dot{\mathscr{E}} = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{v} + q$ non differisce dall'equazione

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t} . \tag{33}$$

Invero la (33) si esplicita in

$$\frac{d}{dt}(m c^2) \equiv \frac{1}{\eta(\dot{x})} \frac{\partial m_0}{\partial t} c^2 = -\frac{1}{\eta} \frac{\partial U_0}{\partial t} ;$$

al tempo stesso, la potenza complessiva (meccanica e termica), avuto riguardo alle (24)-(25), non differisce da

$$\mathrm{W} \equiv \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{v} + q = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \mathrm{U}_0}{\partial x^h} \dot{x}^h - \frac{1}{\eta} \frac{d\mathrm{U}_0}{dt} \equiv - \frac{1}{\eta} \frac{\partial \mathrm{U}_0}{\partial t} ,$$

da cui l'asserto.

Al di là del carattere lagrangiano (corpuscolare) ovvero hamiltoniano (ondulatorio) del sistema differenziale (26)–(27′), va sottolineato che si tratta di una formulazione che soddisfa il principio di relatività, in quanto essa è formalmente invariante rispetto alla scelta del riferimento galileiano.

Riferimenti bibliografici

[1] G. Ferrarese (1985) – *Lezioni di Meccanica relativistica*. Pitagora Editrice, Bologna,
[2] T. Levi Civita e U. Amaldi (1927) – *Lezioni di Meccanica razionale*. Vol. 2°, parte 2ª. Zanichelli, Bologna.