Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Alberto Cialdea

L'equazione $\Delta_2 u + a_{10}(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + a_{01}(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + a_{00}(x,y)u = F(x,y)$. Calcolo dell'indice dei problemi al contorno e soluzioni deboli

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **80** (1986), n.4, p. 185–195.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1986_8_80_4_185_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1986.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 12 aprile 1986

Presiede il Presidente della Classe EDOARDO AMALDI

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Analisi matematica. — *L'equazione* $\Delta_2 u + a_{10}(x, y) \dfrac{\partial u}{\partial x} + a_{01}(x, y) \dfrac{\partial u}{\partial y} + a_{00}(x, y)\, u = \mathrm{F}(x, y)$. *Calcolo dell'indice dei problemi al contorno e soluzioni deboli.* Nota di ALBERTO CIALDEA, presentata (*) dal Socio G. FICHERA.

SUMMARY. — It is proved that Lopatinskii's condition is necessary and sufficient for problem (2.5) to be an index problem. A method is given for the determination of the index.

Come annunciato nell'introduzione di [1], in questa Nota considererò ancora il problema (1.1). Precisamente, dopo aver fornito un metodo per il calcolo dell'indice del problema e dopo aver introdotto soluzioni generalizzate, dimostrerò che la condizione di Lopatinskii è necessaria e sufficiente perché il problema sia ad indice.

1. CALCOLO DELL'INDICE

In un campo semplicemente connesso e limitato Ω del piano avente per frontiera $\Sigma = \partial\Omega$ una curva di Jordan semplice di classe $C^{1+\lambda}$, consideriamo il seguente problema (1):

(*) Nella seduta del 12 aprile 1986.

(1) Per le notazioni, cfr. [1].

$$(1.1) \qquad u \in \mathscr{U}(\Omega) \quad , \quad \mathrm{L}u = \mathrm{F} \ \text{in} \ \Omega \quad , \quad \mathrm{B}u = \mathrm{G} \ \text{su} \ \Sigma$$

essendo $(\mathrm{F}, \mathrm{G}) \in \mathrm{C}^\lambda(\overline{\Omega}) \times \mathrm{C}^\lambda(\Sigma)$ e:

$$(1.2) \qquad \begin{cases} \mathrm{L} = \Delta_2 + \sum\limits_{|\alpha| \leq 1} a_\alpha(z)\,\mathrm{D}^\alpha & a_\alpha \in \mathrm{C}^\lambda(\overline{\Omega}) \\ \mathrm{B} = \sum\limits_{|\beta| \leq 1} b_\beta(z)\,\mathrm{D}^\beta & b_\beta \in \mathrm{C}^\lambda(\Sigma)\,. \end{cases}$$

In § 1 e § 2 supporremo che B verifichi la ben nota condizione di Lopatinskii: come ricordato in [1], ciò equivale a supporre: $b_{10}^2(z) + b_{01}^2(z) \neq 0$, per ogni $z \in \Sigma$.

Si dice che un problema differenziale è ad indice se accade che il numero delle autosoluzioni del problema omogeneo e il numero delle condizioni di compatibilità, alle quali devono soddisfare i dati, sono finiti. In tal caso si chiama indice del problema $\chi_{\mathscr{P}}$ la differenza tra questi due numeri. Nel caso del problema (1.1), $\chi_{\mathscr{P}}$ è la differenza tra il numero delle autosoluzioni linearmente indipendenti del problema omogeneo:

$$(1.3) \qquad u \in \mathscr{U}(\Omega) \quad ; \quad \mathrm{L}u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \quad ; \quad \mathrm{B}u = 0 \quad \text{su} \ \Sigma$$

e il numero delle condizioni (I.2.5) (2).

1) *Nelle dette ipotesi, si ha*: $\chi_{\mathscr{P}} = \chi_s$, *dove* χ_s è *l'indice dell'operatore* S (3): $\chi_s = \dim \mathrm{A}(\mathrm{S}) - \dim \mathrm{A}(\mathrm{S}^*)$.

In base al Teorema 2 di [1], si ha che il numero delle condizioni di compatibilità del problema (1.1) è uguale alla dimensione di $\mathrm{A}(\mathscr{T}^*)$, dove $\mathscr{T}$ è l'operatore introdotto in detto teorema. Poniamo:

$$\mathscr{F}_0 : \mathrm{L}^p(\Sigma) \to \mathrm{L}^p(\Sigma)$$

$$\mathscr{F}_0\,\varphi = \int_\Sigma \varphi(\zeta)\,\frac{\partial}{\partial s_z}\log|z - \zeta|\,ds_\zeta$$

e sia $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}(\mathscr{F}_0)$. Si ha: $\dim \mathrm{A}_0 = 1$ (4). Fissato un $u_0 \neq 0$, $u_0 \in \mathrm{A}_0$, ed un

(2) Qui e nel seguito con (I.2.5) intendiamo la (2.5) di [1].

(3) Per la definizione di S, cfr. [1].

(4) Se $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{A}_0$, scegliamo $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ tali che $c_1 \int_\Sigma \varphi_1\,ds + c_2 \int_\Sigma \varphi_2\,ds = 0$.

Allora la funzione $k(z) = \int_\Sigma [c_1\,\varphi_1(\zeta) + c_2\,\varphi_2(\zeta)]\log|z - \zeta|\,ds_\zeta$ è continua in **C**, è convergente a zero all'infinito ed è costante su Σ; allora deve essere $k(z) = \text{cost.}$ $\forall z \in \mathbf{C}$, essendo k armonica in $\mathbf{C} - \Sigma$. Da teoremi di teoria del potenziale si trae: $c_1\,\varphi_1 + c_2\,\varphi_2 = 0$.

$\zeta \in L^q(\Sigma)$ tale che $\int_\Sigma \zeta u_0 \, ds = 1$, e posto $P v = \left(\int_\Sigma \zeta v \, ds\right) u_0$, risulta: $L^p(\Sigma) = A_0 \oplus A_1$, essendo $A_1 = A(P)$. Possiamo supporre, nella rappresentazione (I.2.1), $\varphi \in A_1$; infatti, se $\varphi \in C^\lambda(\Sigma)$ si ha:

$$\int_\Sigma \varphi(\zeta) \log |z - \zeta| \, ds_\zeta = \int_\Sigma \varphi_0(\zeta) \log |z - \zeta| \, ds_\zeta + \int_\Sigma \varphi_1(\zeta) \log |z - \zeta| \, ds_\zeta$$

$\varphi_0 \in A_0$, $\varphi_1 \in A_1$. Dal fatto che $\varphi_0 \in A_0$, segue facilmente:

$$\int_\Sigma \varphi_0(\zeta) \log |z - \zeta| \, ds_\zeta = \text{cost.} \qquad z \in \overline{\Omega}.$$

La rappresentazione (I.2.1) con $\varphi \in A_1$ è unica; infatti se

$$\frac{1}{2\pi} \int_\Omega \psi(\zeta) \log |z - \zeta| \, d\tau_\zeta + \int_\Sigma \varphi(\zeta) \log |z - \zeta| \, ds_\zeta + c = 0$$

segue $\psi = 0$, $\varphi \in A_0$, e quindi $\varphi = 0$, $c = 0$.

Indichiamo con $\tilde{\mathscr{T}}$ la restrizione di $\mathscr{T}$ a $L^p(\Omega) \times A_1 \times \mathbf{C}$. È facile dedurre che $u_1, \ldots, u_m$ sono autosoluzioni di (1.3) linearmente indipendenti (in Ω) se, e solo se, le relative $(\psi_1, \varphi_1, c_1), \ldots, (\psi_m, \varphi_m, c_m)$ sono autosoluzioni linearmente indipendenti dell'equazione: $\tilde{\mathscr{T}}(\psi, \varphi, c) = 0$. In altre parole il numero delle autosoluzioni linearmente indipendenti di (1.3) è uguale alla $\dim A(\tilde{\mathscr{T}})$. Abbiamo quindi:

$$\chi_{\mathscr{P}} = \operatorname{din} A(\tilde{\mathscr{T}}) - \dim A(\mathscr{T}^*). \tag{1.4}$$

Sia ora: $(\psi_1, \varphi_1, c_1), \ldots, (\psi_m, \varphi_m, c_m)$ una base di $A(\tilde{\mathscr{T}})$ e siano $(\lambda_1, \mu_1, b_1), \ldots, (\lambda_s, \mu_s, b_s)$ tali che: $(\psi_1, \varphi_1, c_1), \ldots, (\psi_m, \varphi_m, c_m)$, (λ_1, μ_1, b_1), $\ldots, (\lambda_s, \mu_s, b_s)$ è una base di $A(\mathscr{T})$. Possiamo supporre $\mu_1, \ldots, \mu_s \in A_0$ (5) e quindi non può essere $s > 1$: infatti, se fosse $s \geq 2$, poniamo

$$u_h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\Omega \lambda_h(\zeta) \log |z - \zeta| \, d\tau_\zeta + \int_\Sigma \mu_h(\zeta) \log |z - \zeta| \, ds_\zeta + b_h$$

Poiché u_h appartiene all'autoinsieme di (1.3), esistono delle costanti γ_h^i tali che (sono sottointese le sommatorie):

(5) Altrimenti, posto $\mu_j = \mu_j^0 + \mu_j^1$, $\mu_j^h \in A_h$ $(h = 0, 1;\ j = 1, \ldots, s)$ risulta $(\lambda_j, \mu_j^1, b_j) \in A(\tilde{\mathscr{T}})$ e può essere espresso come combinazione lineare di (ψ_i, φ_i, c_i). Sostituendo μ_j con μ_j^0 si ha ancora una base.

$$u_h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\Omega \gamma_h^i \psi_i(\zeta) \log |z - \zeta| \, d\tau_\zeta + \int_\Sigma \gamma_h^i \varphi_i(\zeta) \log |z - \zeta| \, ds_\zeta + \gamma_h^i c_i \, .$$

Allora deve essere:

$$(1.5) \quad \begin{aligned} 0 = \frac{1}{2\pi} \int_\Omega [\gamma_h^i \psi_i(\zeta) - \lambda_h(\zeta)] \log |z - \zeta| \, d\tau_\zeta \, + \\ + \int_\Sigma [\gamma_h^i \varphi_i(\zeta) - \mu_h(\zeta)] \log |z - \zeta| \, ds_\zeta + (\gamma_h^i c_i - b_h) \end{aligned}$$

e quindi: $\gamma_h^i \varphi_i - \mu_h \in A_0$. Poiché $\dim A_0 = 1$, esisteranno delle costanti β^h tali che: $\beta^h \gamma_h^i \varphi_i - \beta^h \mu_h = 0$. Da ciò e dalla (1.4) è facile dedurre che $(\psi_1, \varphi_1, c_1), \ldots, (\psi_m, \varphi_m, c_m), (\lambda_1, \mu_1, b_1), \ldots, (\lambda_s, \mu_s, b_s)$ dovrebbero essere linearmente dipendenti, e ciò è assurdo. D'altra parte $(0, \varphi_0, c_0)$ con $\varphi_0 \in A_0$, $\varphi_0 \neq 0$ e

$$c_0 = - \int_\Sigma \varphi_0(\zeta) \log |z - \zeta| \, d s_\zeta$$

appartiene ad $A(\mathscr{T})$ e quindi: $\dim A(\mathscr{T}) = \dim A(\tilde{\mathscr{T}}) + 1$.

Per la (1.4): $\chi_{\mathscr{P}} = \chi_{\mathscr{T}} - 1$.

Poniamo ora $\mathscr{R}_1(\psi, \varphi, c) = (\psi, S\varphi)$, $\mathscr{R}_2 = \mathscr{T} - \mathscr{R}_1$. Essendo $\mathscr{R}_2$ un operatore compatto, si ha: $\chi_{\mathscr{T}} = \chi_{\mathscr{R}_1}$ (6). È facile verificare che $\dim A(\mathscr{R}_1^*) = \dim A(S^*)$.

Infine se $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ è una base di $A(S)$, si ha che i vettori $(0, \varphi_1, 0), \ldots, (0, \varphi_n, 0)$, $(0, 0, 1)$ formano una base di $A(\mathscr{R}_1)$. Quindi $\dim A(\mathscr{R}_1) = \dim A(S) + 1$. Allora: $\chi_{\mathscr{P}} = \chi_{\mathscr{T}} - 1 = \chi_{\mathscr{R}_1} - 1 = \chi_s$.

L'interesse di questa formula risiede nel fatto che χ_s si può calcolare esplicitamente mediante la formula di Muskhelishvili (7): $\chi_s = \dfrac{1}{2\pi i} \left[\log \dfrac{\rho - i\sigma}{\rho + i\sigma} \right]_\Sigma$.

2. Soluzioni deboli.

Indichiamo con $\mathscr{A}^p$ lo spazio delle funzioni u tali che:

I) $u \in L^p(\Omega)$;

II) $\Delta_2 u \in L^p(\Omega)$ ($\Delta_2 u$ è nel senso delle distribuzioni);

III) esistono $f_\alpha \in L^p(\Sigma)$ ($|\alpha| \leq 1$) tali che:

(6) Cfr. [2], [3].
(7) Cfr. [4].

$$(2.1)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\Sigma} f_{00} \frac{\partial}{\partial s} v \, ds = - \int_{\Sigma} v \, (f_{10} \dot{x} + f_{01} \dot{y}) \, ds \\ \displaystyle\int_{\Omega} (u \Delta_2 v - v \, \Delta_2 u) \, d\tau = - \int_{\Sigma} \left[f_{00} \frac{\partial}{\partial \nu} v - v \, (-f_{10} \dot{y} + f_{01} \dot{x}) \right] ds \end{cases}$$

per ogni $v \in C^{\infty}(\mathbf{C})$.

Mostriamo che, se le f_{α} esistono, sono uniche: infatti, se

$$\int_{\Sigma} \left[f_{00} \frac{\partial}{\partial \nu} v - v \, (-f_{10} \dot{y} + f_{01} \dot{x}) \right] ds = 0 \qquad \forall \, v \in C^{\infty}(\mathbf{C})$$

allora $f_{00} = 0$, $-f_{10} \dot{y} + f_{01} \dot{x} = 0$; dalla (2.1) si trae:

$$\int_{\Sigma} v \, (f_{10} \dot{x} + f_{01} \dot{y}) \, ds = 0 \qquad \forall v \in C^{\infty}(\mathbf{C})$$

e quindi $f_{10} \dot{x} + f_{01} \dot{y} = 0$, ossia $f_{\alpha} = 0$ $(|\alpha| \leq 1)$.

È ovvio che $H^{2,p}(\Omega) \subset \mathscr{A}^p$ e che, se $u \in H^{2,p}(\Omega)$, f_{α} coincide con $D^{\alpha} u|_{\Sigma}$ nel senso usuale delle tracce. $\mathscr{A}^p$ è, però, più ampia di $H^{2,p}(\Omega)$.

Dato un operatore al contorno B, con Bu intenderemo: $\sum_{|\beta| \leq 1} b_{\beta}(z) f_{\beta}(z)$.

2) *Se* $u \in \mathscr{A}^p$ *e si ha* $\Delta_2 u = 0$ *in* Ω, $\frac{\partial}{\partial s} u = 0$ *su* Σ, *allora* $u = \text{cost.}$ in Ω.

Dalle (2.1) segue:

$$\int_{\Sigma} f_{00} \frac{\partial}{\partial s} v \, d\, s = 0 \qquad \forall \, v \in C^{\infty}(\mathbf{C})$$

e quindi $f_{00} = c_0$, con c_0 costante. Ancora dalle (2.1):

$$(2.2)\qquad \int_{\Omega} u \Delta_2 v \, d\tau = - c_0 \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu} v \, ds + \int_{\Sigma} v \frac{\partial}{\partial \nu} u \, ds \qquad \forall v \in C^{\infty}(\mathbf{C}) .$$

In particolare si deve avere:

$$\int_{\Sigma} v \frac{\partial}{\partial \nu} u \, ds = 0 \qquad \forall v \in C^{\infty}(\mathbf{C}); \ \Delta_2 v = 0$$

e quindi: $\frac{\partial}{\partial\nu} u = 0$. Allora da (2.2), per le formule di Green:

$$\int_\Omega (u - c_0)\, \Delta_2 v \, d\tau = 0 \qquad \forall v \in C^\infty(\mathbf{C})$$

e questo implica la tesi.

3) $u \in \mathscr{A}^p$ *se, e solo se, esiste* $(\psi, \varphi, c) \in L^p(\Omega) \times L^p(\Sigma) \times \mathbf{C}$ *tale che*:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\Omega \psi(\zeta) \log | z - \zeta | \, d\tau_\zeta + \int_\Sigma \varphi(\zeta) \log | z - \zeta | \, ds_\zeta + c \tag{2.3}$$

Sia u dato dalle (2.3); poiché la funzione

$$\frac{1}{2\pi} \int_\Omega \psi(\zeta) \log | z - \zeta | \, d\tau_\zeta + c$$

appartiene ad $H^{2,p}(\Omega) \subset \mathscr{A}^p$, basterà mostrare che

$$\int_\Sigma \varphi(\zeta) \log | z - \zeta | \, ds_\zeta$$

appartiene ad $\mathscr{A}^p$. Poniamo:

$$\tag{2.4} \begin{cases} f_{00}(z) = \displaystyle\int_\Sigma \varphi(\zeta) \log | z - \zeta | \, ds_\zeta \\ f_{10}(z) = -\dot{y}\pi\varphi(z) + \displaystyle\int_\Sigma \varphi(\zeta) \left[\dot{x} \frac{\partial}{\partial s_z} - \dot{y} \frac{\partial}{\partial \nu_z} \right] \log | z - \zeta | \, ds_\zeta \\ f_{01}(z) = \dot{x}\pi\varphi(z) + \displaystyle\int_\Sigma \varphi(\zeta) \left[\dot{y} \frac{\partial}{\partial s_z} + \dot{x} \frac{\partial}{\partial \nu_z} \right] \log | z - \zeta | \, ds_\zeta \, . \end{cases}$$

Si ha: $f_\alpha \in L^p(\Sigma)$ e inoltre:

$$f_{10}\, \dot{x} + f_{01}\, \dot{y} = \int_\Sigma \varphi(\zeta) \frac{\partial}{\partial s_z} \log | z - \zeta | \, ds_\zeta$$

$$-f_{10}\, \dot{y} + f_{01}\, \dot{x} = \pi\varphi(z) + \int_\Sigma \varphi(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_z} \log | z - \zeta | \, ds_\zeta$$

Sia ora $\{\varphi_n\} \in C^\lambda(\Sigma)$ tale che $\varphi_n \to \varphi$ in $L^p(\Sigma)$ e sia:

$$u_n(z) = \int_\Sigma \varphi_n(\zeta) \log |z - \zeta| \, ds_\zeta$$

$u_n \in C^{1+\lambda}(\overline{\Omega})$ e si ha:

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_\Sigma u_n \frac{\partial}{\partial s} v \, ds = - \int_\Sigma v \frac{\partial}{\partial s} u_n \, ds \\ & \int_\Omega u_n \Delta_2 v \, d\tau = - \int_\Sigma \left(u_n \frac{\partial}{\partial \nu} v - v \frac{\partial}{\partial \nu} u_n \right) ds \end{aligned} \right. \qquad \forall v \in C^\infty(\mathbf{C})$$

Dato che gli operatori che compaiono a secondo membro nella (2.4) sono continui da $L^p(\Sigma)$ in $L^p(\Sigma)$, passando al limite si ottiene la tesi.

Viceversa, sia $u \in \mathscr{A}^p$; posto

$$w(z) = u(z) - \frac{1}{2\pi} \int_\Omega \Delta_2 u(\zeta) \log |z - \zeta| \, d\tau_\zeta$$

risulta: $w \in \mathscr{A}^p$, $\Delta_2 w = 0$. Dalle (4.1) si trae:

$$\int_\Sigma \frac{\partial}{\partial s} w \, ds = 0$$

e quindi esiste una $\varphi \in L^p(\Sigma)$ soluzione dell'equazione integrale singolare:

$$\int_\Sigma \varphi(\zeta) \frac{\partial}{\partial s_z} \log |z - \zeta| \, ds_\zeta = \frac{\partial}{\partial s} w .$$

Allora la funzione

$$h(z) = w(z) - \int_\Sigma \varphi(\zeta) \log |z - \zeta| \, ds_\zeta$$

appartiene ad $\mathscr{A}^p$ (per quanto dimostrato nella prima parte del teorema) e si ha: $\frac{\partial}{\partial s} h = 0$. Dal lemma 2 segue la tesi.

È interessante il seguente corollario:

4) *Se* $u \in \mathscr{A}^p$ *si ha che* $u \in H^{1,p}(\Omega)$, $f_{00} = u|_\Sigma$ *nel senso usuale delle tracce e inoltre sussistono, per q.o.* $z_0 \in \Sigma$, *le seguenti relazioni*:

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ \text{su } \nu^+_{z_0}}} \frac{\partial}{\partial x} u(z) = f_{10}(z_0) \quad ; \quad \lim_{\substack{z \to z_0 \\ \text{su } \nu^+_{z_0}}} \frac{\partial}{\partial y} u(z) = f_{01}(z_0)$$

La dimostrazione è immediata.

Osserviamo che dall'essere $u \in H^{1,p}(\Omega)$, $\Delta_2 u \in L^p(\Omega)$ non segue, in generale, che $u \in \mathscr{A}^p$, come mostrano semplici esempi.

Consideriamo L, B dati da (1.2); per quanto detto ha senso il problema seguente:

$$u \in \mathscr{A}^p \quad ; \quad Lu = F \quad ; \quad Bu = G \tag{2.5}$$

essendo $(F, G) \in L^p(\Omega) \times L^p(\Sigma)$.

Nelle dimostrazioni dei Teoremi 2 e 3 di [1], è contenuto il seguente risultato:

5) *Dato* $(F, G) \in L^p(\Omega) \times L^p(\Sigma)$ *esiste una soluzione di* (2.5) *se, e solo se,* (F, G) *verifica le* (I.2.5). *Inoltre il numero delle autosoluzioni linearmente indipendenti del problema omogeneo* $(F = 0, G = 0)$ *è finito e si ha*: $\chi_{\mathscr{P}} = \chi_s$.

3. Sufficienza della condizione di Lopatinskii.

Il Teorema 5 mostra che il problema (2.5), verificando B la condizione di Lopatinskii, è un problema ad indice.

La condizione di Lopatinskii è anche necessaria perché il problema (2.5) sia ad indice.

6) *Condizione necessaria e sufficiente affinché il problema* (2.5) *sia ad indice è che sia verificata la condizione di Lopatinskii.*

Basta dimostrare la parte necessaria. Dire che il problema (2.5) è ad indice equivale a supporre che l'operatore $\mathscr{T}$ ha le seguenti proprietà:

$$\dim A(\mathscr{T}) < \infty \quad ; \quad \mathscr{R}(\mathscr{T}) = \overline{\mathscr{R}(\mathscr{T})} \quad ; \quad \dim A(\mathscr{T}^*) < \infty .$$

Allora anche l'operatore $\mathscr{R}_1$ (definito in § 1) gode delle stesse proprietà, giacché differisce da $\mathscr{T}$ per un operatore compatto [8]. Da ciò segue facilmente che:

$$\dim A(S) < \infty \quad ; \quad \mathscr{R}(S) = \overline{\mathscr{R}(S)} \quad ; \quad \dim A(S^*) < \infty .$$

Posto: $\mathscr{K}\varphi = \rho\varphi + \sigma S_0 \varphi$ (ρ, σ, S_0 sono stati definiti in § 1 di [1]) si avrà:

(8) Cfr. [2], [3].

$$\dim \mathrm{A}(\mathscr{K}) < \infty \quad ; \quad \mathscr{R}(\mathscr{K}) = \overline{\mathscr{R}(\mathscr{K})} \quad ; \quad \dim \mathrm{A}(\mathscr{K}^*) < \infty .$$

Allora $\mathscr{K}$ è riducibile e quindi vale il teorema dell'alternativa. Sulla base di un principio generale dell'analisi funzionale [9], sussistono le seguenti maggiorazioni:

$$(3.1) \qquad \begin{cases} \inf\limits_{\varphi_0 \in \mathrm{A}(\mathscr{K})} \| \varphi + \varphi_0 \|_p \leq \mathrm{K} \| \mathscr{K} \varphi \|_p & \forall \varphi \in \mathrm{L}^p(\Sigma) \\ \inf\limits_{\psi_0 \in \mathrm{A}(\mathscr{K}^*)} \| \psi + \psi_0 \|_q \leq \mathrm{K} \| \mathscr{K}^* \psi \|_q & \forall \psi \in \mathrm{L}^q(\Sigma) . \end{cases}$$

Sia $\{\eta_i \mid i = 1, \ldots, m\}$ una base di $\mathrm{A}(\mathscr{K})$ e $\zeta_i \in \mathrm{C}^\lambda(\Sigma)$ tali che

$$\int_\Sigma \zeta_i \, \eta_j \, ds = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, \ldots, m).$$

Posto $\mathrm{P}\varphi = \sum\limits_{i=1}^m \int\limits_\Sigma \zeta_i \, \varphi \, ds \, \eta_i$, dalla prima maggiorazione (3.1) segue che esiste una costante C tale che:

$$(3.2) \qquad \| \varphi \|_p \leq \mathrm{C} (\| \mathscr{K} \varphi \|_p + \| \mathrm{P} \varphi \|_p) \qquad \forall \varphi \in \mathrm{L}^p(\Sigma) .$$

Supponiamo che ciò non sia vero; esiste allora una $\{\varphi_n\} \subset \mathrm{L}^p(\Sigma)$ tale che: $\| \varphi_n \|_p > n (\| \mathscr{K} \varphi_n \|_p + \| \mathrm{P} \varphi_n \|_p)$. Posto $w_n = \varphi_n / \| \varphi_n \|_p$, si ha:

$$(3.3) \qquad \| w_n \|_p = 1 \quad ; \quad \| \mathrm{P} w_n \|_p \to 0 \quad ; \quad \| \mathscr{K} w_n \|_p \to 0 .$$

Da (3.1) segue allora che esiste $\varphi_n^0 \in \mathrm{A}(\mathscr{K})$ tale che:

$$\| w_n + \varphi_n^0 \|_p = \| (\mathrm{P} w_n + \varphi_n^0) + (w_n - \mathrm{P} w_n) \|_p \to 0$$

È facile dedurre: $\| w_n - \mathrm{P} w_n \|_p \to 0$ e da (3.3) segue un assurdo. Analogamente si ottiene:

$$(3.4) \qquad \| \psi \|_q \leq \mathrm{D} (\| \mathscr{K}^* \psi \|_q + \| \mathrm{Q} \psi \|_q) \qquad \forall \psi \in \mathrm{L}^q(\Sigma)$$

con Q operatore degenere: $\mathrm{L}^q(\Sigma) \to \mathrm{A}(\mathscr{K}^*)$.

Supponiamo che non sia verificata la condizione di Lopatinskii: esiste un $z_0 \in \Sigma$ tale che $\rho^2(z_0) + \sigma^2(z_0) = 0$. Esisteranno due costanti $\mathrm{H} > 0$, $0 < h \leq 1$ tali che:

$$(3.5) \qquad | \rho^2(z) + \sigma^2(z) | \leq \mathrm{H} \, | s_z - s_{z_0} |^h \qquad z \in \Sigma .$$

(9) Cfr. [3], p. 75. In questo paragrafo con $\| \cdot \|_p$ $(\| \cdot \|_q)$ intenderemo $\| \cdot \|_{\mathrm{L}^p(\Sigma)}$ $(\| \cdot \|_{\mathrm{L}^q(\Sigma)})$.

Sia $n \in \mathbf{N}$ tale che:

$$n > \frac{1}{h} \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right| \tag{3.6}$$

Supponiamo, inoltre, che sia $1 < p \leq 2$; esiste una costante γ tale che:

$$\| \varphi \|_p \leq \gamma \| \varphi \|_q \qquad \forall \varphi \in L^q(\Sigma) . \tag{3.7}$$

Dalla (3.2) si deduce per induzione che esistono una costante C_n ed n operatori degeneri P_j tali che:

$$\| \varphi \|_p \leq C_n (\| \mathscr{K}^n \varphi \|_p + \sum_{j=1}^{n} \| P_j \varphi \|_p) \qquad \forall \varphi \in L^p(\Sigma) . \tag{3.8}$$

Poiché $\mathscr{K}^* \varphi = \rho\varphi - S_0(\sigma\varphi)$, possiamo scrivere: $\mathscr{K}^* \varphi = \rho\varphi - \sigma S_0 \varphi + T\varphi$, con T operatore compatto da $L^r(\Sigma)$ in $L^r(\Sigma)$ per ogni $1 < r < \infty$[10].
Da (3.4) segue allora:

$$\| \psi \|_q \leq D (\| \rho\psi - \sigma S_0 \psi \|_q + \| T\psi \|_q + \| Q\psi \|_q) \qquad \forall \psi \in L^q(\Sigma) .$$

Inoltre esistono una costante D_n e $2n$ operatori compatti Q_j tali che:

$$\| \psi \|_q \leq D_n (\| (\rho - \sigma S_0)^n \psi \|_q + \sum_{j=1}^{2n} \| Q_j \psi \|_q) \qquad \forall \psi \in L^q(\Sigma) . \tag{3.9}$$

Si prova inoltre che esiste un operatore compatto M_n da $L^r(\Sigma)$ in $L^r(\Sigma)$ tale che

$$(\rho - \sigma S_0)^n (\rho + \sigma S_0)^n \varphi = (\rho^2 + \sigma^2)^n \varphi + M_n \varphi \tag{3.10}$$

Da (3.7), (3.8), (3.9), (3.10) si trae:

$$\begin{aligned}
\| \varphi \|_p \leq \gamma C_n \Big(\| \mathscr{K}^n \varphi \|_q + \sum_{j=1}^{n} \| P_j \varphi \|_q \Big) \leq \\
\gamma C_n D_n \Big(\| (\rho - \sigma S_0)^n (\rho + \sigma S_0)^n \varphi \|_q + \sum_{i=1}^{2n} \| Q_i \mathscr{K}^n \varphi \|_q + \\
+ \sum_{j=1}^{n} \Big(\| (\rho - \sigma S_0)^n P_j \varphi \|_q + \sum_{i=1}^{2n} \| Q_i P_j \varphi \|_q \Big) \Big) \leq \\
\Gamma_n \Big(\| (\rho^2 + \sigma^2)^n \varphi \|_q + \sum_{h=1}^{l} \| \tilde{Q}_h \varphi \|_q \Big) \qquad \forall \varphi \in L^q(\Sigma)
\end{aligned}$$

dove Γ_n è una costante che dipende da p ed n, $\tilde{Q}_h$ sono operatori compatti ed $l = (2n + 1)(n + 1)$. Supponiamo ora che supp $\varphi \subset \Sigma_\varepsilon = \{ z \in \Sigma \mid | s_z - s_{z_0} | \leq \varepsilon \}$.
Da (3.5) segue:

$$\| \varphi \|_p \leq \Gamma_n H^n \varepsilon^{nh} \| \varphi \|_q + \Gamma_n \Big(\sum_{h=1}^{l} \| \tilde{Q}_h \varphi \|_q \Big) \qquad \forall \varphi \in L^q(\Sigma) , \ \text{supp}\ \varphi \subset \Sigma_\varepsilon .$$

(10) Infatti si ha: $S_0(\sigma\varphi) = S_{0\zeta}((\sigma(\zeta) - \sigma(z))\varphi(\zeta)) + \sigma(z) S_0 \varphi$.

È possibile costruire una successione $\{\varphi_m\}$ tale che:

$$\operatorname{supp} \varphi_m \subset \Sigma_\varepsilon \quad ; \quad \| \varphi_m \|_\infty = \frac{1}{2\varepsilon} \qquad \forall m \in \mathbf{N}$$

$$\| \varphi_m - \varphi_s \|_p = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/q} \quad ; \quad \| \varphi_m - \varphi_s \|_q = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/p}$$

$\forall m\,, s \in \mathbf{N}\,,\ m \neq s$ (11).

Dalla compattezza degli $\tilde{Q}_h$ segue:

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/q} \leq \Gamma_n \, H^n \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/p} \varepsilon^{nh}$$

e questo, dovendo valere per ogni $\varepsilon > 0$, è assurdo, essendo le costanti Γ_n, H indipendenti da ε ed $nh + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 0$, in virtù della (3.6).

Per $p > 2$ si dimostra in maniera analoga, scambiando fra di loro i ruoli della (3.8) e della (3.9).

BIBLIOGRAFIA

[1] A. CIALDEA (1986) – *L'equazione* $\Delta_2 u + a_{10}(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + a_{01}(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + a_{00}(x,y)u = F(x,y)$. *Teorema di esistenza per un generale problema al contorno*, « Rend. dell'Accademia Nazionale dei Lincei ».

[2] G. FICHERA (1958) – *Una introduzione alla teoria delle equazioni integrali singolari*, « Rend. di Matem. », V, *17*, 82-191.

[3] G. FICHERA (1963) – *Operatori di Riesz-Fredholm, operatori riducibili, equazioni integrali singolari, applicazioni*, « Pubbl. dell'Ist. Matem. dell'Univ. di Roma ».

[4] N.I. MUSKHELISHVILI (1972) – *Singular integral equations*, Groningen Noordhoff.

[5] A. ZYGMUND (1979) – *Trigonometric series*, II ediz., Cambridge University Press.

(11) Siano $\phi_m(x)$ le funzioni di Rademacher (cfr. [5], p. 6, vol. I), ossia $\phi_m(x) = \operatorname{sign} \operatorname{sen} 2^{m+1} \pi x$. Le funzioni

$$\varphi_m(s) \begin{cases} = \dfrac{1}{2\varepsilon} \phi_m\left(\dfrac{s+\varepsilon}{2\varepsilon}\right) & |s - s_{z_0}| < \varepsilon \\ = 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

verificano le condizioni richieste.