Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Alberto Cialdea

L'equazione $\Delta_2 u + a_{10}(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + a_{01}(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + a_{00}(x,y)u = F(x,y)$. Teorema di esistenza per un generale problema al contorno

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **80** (1986), n.3, p. 89–99.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1986_8_80_3_89_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1986.

Analisi matematica. — *L'equazione* $\Delta_2 u + a_{10}(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + a_{01}(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + a_{00}(x, y) u = F(x, y)$. *Teorema di esistenza per un generale problema al contorno.* Nota di ALBERTO CIALDEA, presentata (*) dal Socio G. FICHERA.

SUMMARY. — Necessary and sufficient conditions are given for the existence of smooth solutions of the differential equations (1) with the boundary conditions (2). Coefficients of (1) and (2) are only supposed Hölder-continuous.

La presente è la prima di quattro Note che hanno come oggetto una teoria dei problemi al contorno per l'equazione lineare alle derivate parziali di secondo ordine di tipo ellittico, che considererò nella sua forma canonica:

$$\Delta_2 u + a_{10}(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + a_{01}(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + a_{00}(x, y) u = F(x, y) \tag{1}$$

in un campo limitato Ω del piano x, y avente per frontiera una curva chiusa di Jordan Σ di classe $C^{1+\lambda}$.

Circa i coefficienti a_{10}, a_{01}, a_{00} supporrò soltanto che essi siano funzioni (a valori complessi) appartenenti alla classe $C^{\lambda}(\overline{\Omega})$. Alla (1) associerò una generale condizione al contorno del tipo seguente:

$$b_{10}(z) \frac{\partial u}{\partial x} + b_{01}(z) \frac{\partial u}{\partial y} + b_{00}(z) u = G(z) \tag{2}$$

nella quale b_{10}, b_{01}, b_{00} sono funzioni (a valori complessi) del punto $z = (x, y)$ (1), variabile su Σ, appartenenti alla classe $C^{\lambda}(\Sigma)$.

I problemi che studierò per il sistema (1), (2) – in questa Nota e nella successiva – sono quelli consistenti nell'assegnare condizioni sufficienti e condizioni necessarie su b_{10}, b_{01} perché il problema sia *ad indice*, e quando venga considerato in spazi di soluzioni nel senso classico, e quando per esso vengano considerate soluzioni generalizzate. Più precisamente, in questa Nota mi li-

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1986.

(1) In questa e nelle successive Note, con z indicherò sia il punto (x, y), sia la variabile complessa $x + iy$.

miterò a considerare soluzioni in senso classico e farò vedere che, se è verificata la ben nota condizione di Lopatinskii, il problema è ad indice. Tale ormai classico risultato verrà integrato dalla esplicita determinazione delle eventuali condizioni di compatibilità per i dati e da analoga costruzione delle eventuali autosoluzioni del problema.

In una Nota successiva a questa, farò vedere che i risultati già stabiliti per le soluzioni in senso classico sussistono anche per soluzioni generalizzate, la considerazione delle quali permetterà di dimostrare che la condizione algebrica anzidetta perché il problema sia ad indice è anche necessaria.

L'interesse di questa prima Nota e della successiva è soprattutto di ordine metodologico. Ritengo altresì non irrilevante la generalità concessa ai coefficienti sia della (1) che della (2). Ciò sembra segnare un progresso rispetto ai metodi fondati sulla teoria delle funzioni analitiche di una variabile complessa e su estensioni di questa, che, per equazioni o sistemi lineari ellittici in due variabili, sono stati impiegati da I.N. Vekua [15], R.P. Gilbert [7], [8], W.L. Wendland [16] e da altri.

Presumo che i metodi da me impiegati possano estendersi a sistemi ellittici più generali, quali considerati in [7], [8], [16].

Maggiore interesse di novità ritengo abbiano la terza e quarta Nota, che ho dedicato al sistema (1), (2). Infatti nella terza considererò il problema della maggiorazione della soluzione (o della *classe di equivalenza* di soluzioni del problema (1), (2)) mediante i dati in varie forme con *l'intento di fornire indicazioni quanto più ampie possibili sui coefficienti delle maggiorazioni.*

L'ultima nota, infine, studierà il problema della *completezza nel senso di Picone* (2) di sistemi di soluzioni particolari della equazione omogenea associata alla (1):

$$\Delta_2 u + a_{10}(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + a_{01}(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + a_{00}(x, y)\, u = 0 . \tag{3}$$

Come sottoprodotto di tale analisi, si otterranno teoremi del *tipo Runge* (3) per la (3) nelle generali ipotesi assunte per i coefficienti.

1. Preliminari

Sia Ω un aperto semplicemente connesso e limitato del piano della variabile complessa $z = x + iy$ avente per frontiera $\Sigma = \partial\Omega$ una curva di Jordan semplice di classe $C^{1+\lambda}$.

Nel prosieguo indicheremo con p un numero $1 < p < \infty$ e con q l'esponente coniugato: $q = p/(p-1)$.

(2) Per una esegesi del concetto di completezza nel senso di Picone, si veda [1].
(3) Cfr. [16].

Indichiamo con $L^p(\Omega)$ ($L^p(\Sigma)$) la classe delle funzioni misurabili su Ω (su Σ) a valori complessi di potenza p-sima sommabile su Ω (su Σ). Con $H^{k,p}(\Omega)$ indichiamo la chiusura di $C^k(\bar{\Omega})$ nella norma seguente:

$$\| u \|_{H^{k,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq k} \| D^\alpha u \|^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{1/p} .$$

Con $C^\lambda(\bar{\Omega})$ ($C^\lambda(\Sigma)$) denotiamo la classe delle funzioni a valori complessi, continue su $\bar{\Omega}$ (su Σ), verificanti una condizione di Hölder uniforme su $\bar{\Omega}$ (su Σ) per qualche esponente $0 < h \leq 1$. Con $C^{k+\lambda}(\bar{\Omega})$ indichiamo lo spazio delle $u \in C^k(\bar{\Omega})$ tali che $D^\alpha u \in C^\lambda(\bar{\Omega})$ per $|\alpha| = k$.

Sia $f \in L^p(\Omega)$; poniamo

$$\mathscr{L} f(z) = \int_\Omega f(\zeta) \log |z - \zeta| \, d\tau_\zeta .$$

Ci serviremo delle seguenti proprietà di $\mathscr{L}$:

I) Se $f \in C^\lambda(\bar{\Omega})$ allora $\mathscr{L} f \in C^{2+\lambda}(\bar{\Omega})$.

II) Se $f \in L^p(\Omega)$ allora $\mathscr{L} f \in H^{2,p}(\Omega)$ si ha:

$$\| \mathscr{L} f \|_{H^{2,p}(\Omega)} \leq C \, \| f \|_{L^p(\Omega)} \qquad \forall f \in L^p(\Omega).$$

III) Se $f \in L^p(\Omega)$ si ha: $\Delta_2 \, \mathscr{L} f(z) = 2\pi f(z)$ per q.o. $z \in \Omega$ (4).

Sia dato un operatore al contorno:

$$B = \sum_{|\beta| \leq 1} b_\beta(z) \, D^\beta \qquad b_\beta \in C^\lambda(\Sigma) .$$

Data una $\varphi \in L^p(\Sigma)$ consideriamo l'operatore $\mathscr{P}$ così definito:

$$\mathscr{P} \varphi(z) = \int_\Sigma \varphi(\zeta) \log |z - \zeta| \, ds_\zeta .$$

Se $\varphi \in C^\lambda(\Sigma)$ allora $\mathscr{P} \varphi \in C^{1+\lambda}(\bar{\Omega})$ (5) e ha senso quindi considerare l'operatore seguente: $S\varphi = B \, \mathscr{P} \varphi$.

Ricordiamo alcune delle proprietà di S (6):

I) Se $\varphi \in C^\lambda(\Sigma)$ allora:

$$\| S\varphi \|_{L^p(\Sigma)} \leq C \, \| \varphi \|_{L^p(\Sigma)}$$

e quindi l'operatore S si può prolungare a tutto $L^p(\Sigma)$.

(4) Per I) cfr. [5], p. 413; per II) e III) cfr. [17] e la bibliografia ivi citata. Per $p = 2$ cfr. anche [6], [9].

(5) Cfr. [5], p. 401.

(6) Cfr. [2], [3].

II) Detto prolungamento coincide con un operatore integrale singolare e precisamente (il punto indica la derivata rispetto all'ascissa curvilinea s su Σ):

$$S\varphi(z) = (b_{01}\dot{x} - b_{10}\dot{y})\,\pi\varphi(z) + \int_{\Sigma} \varphi(\zeta)\, B_z \log|z-\zeta|\, ds_\zeta .$$

III) Per q.o. $z \in \Sigma$ si ha ($\nu^+_{z_0}$ è la normale in z_0 interna ad Ω):

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ \text{su } \nu^+_{z_0}}} B\mathscr{P}\varphi(z) = S\varphi(z_0) .$$

Indichiamo con S^* l'operatore trasposto di S, ossia l'operatore da $L^q(\Sigma)$ in $L^q(\Sigma)$ tale che

$$\int_{\Sigma} S\varphi\psi\, ds = \int_{\Sigma} \varphi S^*\psi\, ds \quad , \quad \varphi \in L^p(\Sigma)\, ,\ \psi \in L^q(\Sigma) .$$

L'operatore S^* gode di proprietà analoghe a quelle di S; in particolare si ha ($\nu^-_{z_0}$ è la normale in z_0 esterna ad Ω):

$$S^*\psi(z) = (b_{01}\dot{x} - b_{10}\dot{y})\,\pi\psi(z) + \int_{\Sigma} \psi(\zeta)\, B_\zeta \log|z-\zeta|\, ds_\zeta ,$$

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ \text{su } \nu^-_{z_0}}} \int_{\Sigma} \psi(\zeta)\, B_\zeta \log|z-\zeta|\, ds_\zeta = S^*\psi(z_0) \qquad (\text{q.o. } z_0 \in \Sigma) .$$

S ed S^* si scrivono usualmente anche sotto un'altra forma: posto

$$S_0\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{+\Sigma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \quad , \quad S_0^*\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{+\Sigma} \frac{\varphi(\zeta)}{z-\zeta}\, d\zeta ,$$

si ha

$$\frac{1}{\pi} S\varphi(z) = \rho(z)\varphi(z) + \sigma(z) S_0\varphi(z) + \mathscr{T}\varphi(z) ,$$

$$\frac{1}{\pi} S^*\varphi(z) = \rho(z)\varphi(z) + S_0^*(\sigma\varphi) + \mathscr{T}^*\varphi(z) ,$$

essendo $\mathscr{T}$ un certo operatore compatto da $L^p(\Sigma)$ in $L^p(\Sigma)$ e

$$
(1.1)\qquad \begin{cases} \rho = b_{01}\dot{x} - b_{10}\dot{y}\,, \\ \sigma = -(b_{10}\dot{x} + b_{01}\dot{y})\,. \end{cases}
$$

Osserviamo esplicitamente che si ha: $\rho^2 + \sigma^2 = b_{10}^2 + b_{01}^2$.

Vogliamo infine richiamare alcune delle proprietà degli operatori riducibili (7). Sia T un operatore lineare e continuo tra due spazi di Banach B e B'. T è detto riducibile se esiste un operatore $T' : B' \to B$ lineare e continuo tale che $T'T$ è un operatore di Fredholm, ossia $T'T = I + \mathscr{T}$, dove I è la identità B e $\mathscr{T}$ è un operatore compatto da B in se stesso.

Per un operatore riducibile sussiste il principio della alternativa: l'equazione $T(\varphi) = \psi$ è risolubile se, e solo se, ψ è ortogonale a ogni autosoluzione dell'equazione $T^*(\psi) = 0$.

Si dimostra, inoltre, che T è riducibile se, e solo se, la dimensione dell'autoinsieme di T, $A(T)$, è finita e il codominio $\mathscr{R}(T)$ è chiuso in B'. Non sempre la dimensione di $A(T^*)$ è finita; perché ciò accada è necessario e sufficiente che la dimensione di $A(T')$ sia finita, essendo T' un qualsiasi operatore riducente T.

Osserviamo infine che se $b_{10}^2 + b_{01}^2 \neq 0$ per ogni $z \in \Sigma$, l'operatore $S : L^p(\Sigma) \to L^p(\Sigma)$, introdotto precedentemente, risulta riducibile e la dimensione di $A(S^*)$ risulta finita. In tal caso, come operatore riducente S, si può prendere il seguente operatore:

$$
S'\,\varphi(z) = \frac{\rho(z)}{\rho^2 + \sigma^2}\,\varphi(z) - \frac{\sigma(z)}{\rho^2 + \sigma^2}\,S_0\,\varphi(z)\,.
$$

2. Teorema di esistenza

Poniamo:

$$
\mathscr{U}(\Omega) = \{u \in C^{1+\lambda}(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \mid \Delta_2 u \in C^\lambda(\overline{\Omega})\}\,.
$$

1) *La funzione u appartiene a* $\mathscr{U}(\Omega)$ *se, e solo se, esiste* $(\psi, \varphi, c) \in C^\lambda(\overline{\Omega}) \times C^\lambda(\Sigma) \times \mathbf{C}$ *tale che*:

$$
(2.1)\qquad u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_\Omega \psi(\zeta)\log|z-\zeta|\,d\tau_\zeta + \int_\Sigma \varphi(\zeta)\log|z-\zeta|\,ds_\zeta + c\,.
$$

(7) Cfr. [2], [3].

Sia $u \in \mathscr{U}(\Omega)$. Poniamo $\psi = \Delta_2 u$ e

$$w(z) = u(z) - \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \psi(\zeta) \log |z - \zeta| \, d\tau_\zeta .$$

Si ha: $w \in C^{1+\lambda}(\overline{\Omega})$; $\Delta_2 w = 0$. Consideriamo l'equazione integrale singolare:

$$\int_{\Sigma} \varphi(\zeta) \frac{\partial}{\partial s_z} \log |z - \zeta| \, ds_\zeta = \frac{\partial}{\partial s} w(z) \qquad (z \in \Sigma). \tag{2.2}$$

Esiste una $\varphi \in L^p(\Sigma)$ soluzione di (2.2) se, e solo se, il termine noto è ortogonale alle autosoluzioni dell'equazione:

$$\int_{\Sigma} \psi(\zeta) \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log |z - \zeta| \, ds_\zeta = 0 ,$$

che, si vede facilmente, sono le costanti. Poiché si ha:

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial s} w \, ds = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial s} w \in C^\lambda(\Sigma) ,$$

esiste una $\varphi \in C^\lambda(\Sigma)$ soluzione della (2.2). Allora la funzione:

$$w(z) - \int_{\Sigma} \varphi(\zeta) \log |z - \zeta| \, ds_\zeta$$

deve essere costante in tutto $\overline{\Omega}$ e quindi si ha la (2.1). Il viceversa è ovvio [8].

Poniamo:

$$\begin{cases} L = \Delta_2 + \sum\limits_{|\alpha| \leq 1} a_\alpha(z) D^\alpha & a_\alpha \in C^\lambda(\overline{\Omega}) \\ B = \sum\limits_{|\beta| \leq 1} b_\beta(z) D^\beta & b_\beta \in C^\lambda(\Sigma) . \end{cases} \tag{2.3}$$

(8) Nella (2.1) si può eliminare il termine c se, e solo se, esiste una ψ_0 tale che: $\int_{\Sigma} \psi_0(\zeta) \log |z - \zeta| \, ds_\zeta = 1$, $z \in \Omega$, o, equivalentemente, che $\int_{\Sigma} \varphi(\zeta) \log |z - \zeta| \, ds_\zeta = 0$, $z \in \Omega \Leftrightarrow \varphi = 0$. Questo in generale è falso; basta considerare $\Omega = D(0, 1)$. Osserviamo che casi come questo possono essere eliminati con delle omotetie (cfr. [11], p. 185).

D'ora in poi, salvo avviso contrario, supporremo che B verifichi la condizione di Lopatinskii [9]. Per un noto teorema ciò equivale a supporre che l'operatore S (introdotto in § 1) è di seconda specie, ossia che $b^2_{10}(z) + b^2_{01}(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Sigma$ [10].

Consideriamo il problema seguente:

$$u \in \mathcal{U}(\Omega)\,; \qquad \mathrm{L}u = \mathrm{F} \quad \text{in } \Omega; \qquad \mathrm{B}u = \mathrm{G} \quad \text{su } \Sigma \tag{2.4}$$

essendo $(\mathrm{F}, \mathrm{G}) \in \mathrm{C}^\lambda(\overline{\Omega}) \times \mathrm{C}^\lambda(\Sigma)$.

2) *Dato* $(\mathrm{F}, \mathrm{G}) \in \mathrm{C}^\lambda(\overline{\Omega}) \times \mathrm{C}^\lambda(\Sigma)$, *esiste una soluzione di* (2.4) *se, e solo se*:

$$\int_\Omega \mathrm{F}\Psi_j \, d\tau + \int_\Sigma \mathrm{G}\,\phi_j \, ds = 0 \qquad (j = 1, \dots, l) \tag{2.5}$$

essendo $\{(\Psi_j, \phi_j)\}$ *una base per le autosoluzioni in* $\mathrm{L}^q(\Omega) \times \mathrm{L}^q(\Sigma)$ *del sistema seguente*:

$$\left\{\begin{array}{ll} \psi(z) + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\Omega \psi(\zeta) \sum_{|\alpha| \leq 1} a_\alpha(\zeta)\, \mathrm{D}^\alpha_\zeta \log|z - \zeta|\, d\tau_\zeta + & \\ + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\Sigma \varphi(\zeta) \sum_{|\beta| \leq 1} b_\beta(\zeta)\, \mathrm{D}^\beta_\zeta \log|z - \zeta|\, ds_\zeta = 0\,, & z \in \Omega\,, \\ \displaystyle\int_\Omega \psi(\zeta) \sum_{|\alpha| \leq 1} a_\alpha(\zeta)\, \mathrm{D}^\alpha_\zeta \log|z - \zeta|\, d\tau_\zeta + \mathrm{S}^*\varphi(z) = 0, & z \in \Sigma\,, \\ \displaystyle\int_\Omega a_{00}\,\psi d\tau + \int_\Sigma b_{00}\,\varphi\, ds = 0\,, & \end{array}\right. \tag{2.6}$$

(*per la definizione di* S* *cfr.* § 1). *Inoltre* $(\Psi_j, \phi_j) \in \mathrm{C}^\lambda(\overline{\Omega}) \times \mathrm{C}^\lambda(\Sigma)$.

Sia u soluzione di (2.4). Allora esiste (ψ, φ, c) appartenente a $\mathrm{C}^\lambda(\overline{\Omega}) \times \mathrm{C}^\lambda(\Sigma) \times \mathbf{C}$ tale che valga la (2.1) e inoltre:

$$\left\{\begin{array}{ll} \psi(z) + \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq 1} a_\alpha(z)\, \mathrm{D}^\alpha \int_\Omega \psi(\zeta) \log|z - \zeta|\, d\tau_\zeta + & \\ + \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq 1} a_\alpha(z)\, \mathrm{D}^\alpha \int_\Sigma \varphi(\zeta) \log|z - \zeta|\, ds_\zeta + c a_{00}(z) = \mathrm{F}(z) & z \in \Omega \\ \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\sum_{|\beta| \leq 1} b_\beta(z)\, \mathrm{D}^\beta \int_\Omega \psi(\zeta) \log|z - \zeta|\, d\tau_\zeta + \mathrm{S}\varphi(z) + & \\ \qquad + c b_{00}(z) = \mathrm{G}(z)\,. & z \in \Sigma\,. \end{array}\right. \tag{2.7}$$

(9) Cfr. [10].
(10) Cfr. [14].

Posto:

$$\mathscr{T}_1 \psi = \frac{1}{2\pi} \sum_{|\alpha| \leq 1} a_\alpha (z) \, D^\alpha \int_\Omega \psi(\zeta) \log |z - \zeta| \, d\tau_\zeta ,$$

$$\mathscr{T}_2 \varphi = \sum_{|\alpha| \leq 1} a_\alpha (z) \, D^\alpha \int_\Sigma \varphi(\zeta) \log |z - \zeta| \, ds_\zeta ,$$

$$\mathscr{T}_3 \psi = \frac{1}{2\pi} \sum_{|\beta| \leq 1} b_\beta (z) \, D^\beta \int_\Omega \psi(\zeta) \log |z - \zeta| \, d\tau_\zeta ,$$

possiamo riscrivere il sistema (2.7) così:

$$\text{(2.8)} \qquad \begin{cases} \psi + \mathscr{T}_1 \psi + \mathscr{T}_2 \varphi + c a_{00} = F , \\ \mathscr{T}_3 \psi + S\varphi + c b_{00} = G . \end{cases}$$

Definiamo il seguente operatore (11):

$$\mathscr{T} : L^p(\Omega) \times L^p(\Sigma) \times \mathbf{C} \to L^p(\Omega) \times L^p(\Sigma)$$
$$(\psi , \varphi , c) \to (\psi + \mathscr{T}_1 \psi + \mathscr{T}_2 \varphi + c a_{00} , \mathscr{T}_3 \psi + S \varphi + c b_{00})$$

$\mathscr{T}$ è un operatore continuo riducibile: infatti, detto S′ un operatore riducente S, e posto $\mathscr{T}'(f, g) = (f, S'g, 0)$, si ha che $\mathscr{T}' : L^p(\Omega) \times L^p(\Sigma) \to L^p(\Omega) \times L^p(\Sigma) \times \mathbf{C}$ è continuo e $\mathscr{T}' \mathscr{T} (\psi , \varphi , c) = (\psi + \mathscr{T}_1 \psi + \mathscr{T}_2 \varphi + c a_{00} , S' S\varphi + S' \mathscr{T}_3 \psi + S'(c b_{00}) , 0)$. L'operatore che associa a $\psi \in L^p(\Omega)$ la funzione:

$$\text{(2.9)} \qquad \int_\Omega \psi(\zeta) \, D_z^\alpha \log |z - \zeta| \, d\tau_\zeta \qquad (|\alpha| \leq 1)$$

è un operatore continuo da $L^p(\Omega)$ in $H^{1,p}(\Omega)$ e poiché $H^{1,p}(\Omega)$ è immerso compattamente in $L^p(\Omega)$, detto operatore, pensato come operatore da $L^p(\Omega)$ in se stesso, è compatto. Da ciò segue che $\mathscr{T}_1 : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ è compatto. Inoltre, dal fatto che l'operatore di traccia da $H^{1,p}(\Omega)$ in $L^p(\Sigma)$ è compatto (12), si deduce che $\mathscr{T}_3 : L^p(\Omega) \to L^p(\Sigma)$ è compatto.

(11) Si noti che $\mathscr{T}_2 (L^p(\Sigma)) \subset L^p(\Omega)$. Infatti se $\varphi \in L^p(\Sigma)$, per ogni $h \in L^q(\Omega)$ si ha:

$$\left| \int_\Omega h(z) \int_\Sigma \varphi(\zeta) \, D_z \log |z - \zeta| \, ds_\zeta \, d\tau_z \right| \leq \int_\Sigma |\varphi(\zeta)| \int_\Omega \frac{1}{|z - \zeta|} |h(z)| \, d\tau_z \, ds_\zeta < \infty$$

giacché: $\int_\Omega \frac{1}{|z - \zeta|} |h(z)| \, d\tau_z \in L^q(\Sigma)$. Da ciò segue $\mathscr{T}_2 \varphi \in L^p(\Omega)$ (cfr. ad esempio [18], p. 166, vol. I).

(12) Cfr. [4].

Infine l'operatore che a $\varphi \in L^q(\Sigma)$ associa

$$\int_\Sigma \varphi(\zeta)\, D_z^\alpha \log|z-\zeta|\, ds_\zeta \qquad (|\alpha| \leq 1)$$

è, a meno del segno, l'operatore trasposto di (2.9); per un teorema di Schauder [13] si ha che questo operatore è compatto da $L^q(\Sigma)$ in $L^q(\Omega)$. Valendo ciò per ogni $1 < p < \infty$ (e quindi per ogni $1 < q < \infty$), segue che $\mathscr{T}_2 : L^p(\Sigma) \to L^p(\Omega)$ è compatto. Essendo $S'S$ un operatore di Fredholm, si trae che $\mathscr{T}'\mathscr{T}$ è un operatore di Fredholm.

Allora esiste una soluzione di (2.8) in $L^p(\Omega) \times L^p(\Sigma) \times \mathbf{C}$ se, e solo se, (F, G) è ortogonale a ogni autosoluzione di $\mathscr{T}^*(\Psi, \phi) = 0$, ossia del sistema (2.6). Inoltre, poiché la dimensione di $A(\mathscr{T}')$ è finita, essendo tale la dimensione di $A(S')$, si ha che la dimensione di $A(\mathscr{T}^*)$ è finita. Dall'esistenza di una soluzione di (2.4) segue quindi che sono verificate le (2.5).

Viceversa, sia $(F, G) \in C^\lambda(\overline{\Omega}) \times C^\lambda(\Sigma)$ verificante le (2.5). Allora il sistema (2.8) ammette una soluzione (ψ, φ, c) in $L^p(\Omega) \times L^p(\Sigma) \times \mathbf{C}$. Mostriamo che dall'essere $(F, G) \in C^\lambda(\overline{\Omega}) \times C^\lambda(\Sigma)$, segue: $(\psi, \varphi) \in C^\lambda(\overline{\Omega}) \times C^\lambda(\Sigma)$. Precisamente facciamo vedere che dall'essere $(\psi, \varphi) \in L^p(\Omega) \times L^p(\Sigma)$ soluzione di:

$$\text{(2.10)} \qquad \begin{cases} \psi + \mathscr{T}_1\psi + \mathscr{T}_2\varphi = f, \\ S\varphi + \mathscr{T}_3\psi = g. \end{cases} \qquad (f, g) \in C^\lambda(\overline{\Omega}) \times C^\lambda(\Sigma)$$

segue: $(\psi, \varphi) \in C^\lambda(\overline{\Omega}) \times C^\lambda(\Sigma)$. È sufficiente supporre $1 < p < 2$. Da (2.10) si trae: $S\varphi + \mathscr{T}_3(f - \mathscr{T}_1\psi - \mathscr{T}_2\varphi) = g$. Inoltre, poiché le funzioni (2.9) appartengono ad $H^{1,p}(\Omega)$, per i teoremi di immersione di Sobolev [14], si ha: $\mathscr{T}_1\psi \in L^s(\Omega)$, dove $s = 2p/(2-p)$. Le funzioni:

$$\int_\Omega \mathscr{T}_1\psi(\zeta)\, D_z^\alpha \log|z-\zeta|\, d\tau_\zeta$$

appartengono quindi ad $H^{1,s}(\Omega)$ ed, essendo $s > 2$, si ha:

$\mathscr{T}_3\mathscr{T}_1\psi \in C^\lambda(\Sigma)$. Allora φ è soluzione di un'equazione del tipo

$$\text{(2.11)} \qquad S\varphi - \mathscr{T}_3\mathscr{T}_2\varphi = h \qquad h \in C^\lambda(\Sigma).$$

Osserviamo che si ha:

$$\mathscr{T}_3\mathscr{T}_2\varphi = \int_\Sigma \varphi(\sigma)\, \mathscr{K}(z, \sigma)\, ds_\sigma$$

(13) Cfr., ad esempio, [3], p. 101.
(14) Cfr., ad esempio, [12].

dove

$$\mathcal{K}(z,\sigma)=\sum_{|\alpha|\leq 1}\sum_{|\beta|\leq 1} b_\beta(z)\int_\Omega a_\alpha(\zeta)\, D_\zeta^\alpha \log|\sigma-\zeta|\, D_z^\beta \log|z-\zeta|\, d\tau_\zeta$$

Poiché $\mathcal{K}(z,\sigma)=O\left(\log\frac{c}{|z-\sigma|}\right)$ (15), si ha che $\mathcal{T}_3\,\mathcal{T}_2\,\varphi$ è limitata.

Dall'equazione (2.11) si deduce che φ è limitata (16). Allora $\mathcal{T}_2\varphi\in L^r(\Omega)$ con $r>2$ (17); per i teoremi di Sobolev, $\mathcal{T}_3\,\mathcal{T}_2\,\varphi\in C^\lambda(\Sigma)$. Essendo $S\varphi\in C^\lambda(\Sigma)$, si trae $\varphi\in C^\lambda(\Sigma)$ (18). Poiché $\mathcal{T}_2\,\varphi\in C^\lambda(\bar\Omega)$ e $\psi=-\mathcal{T}_1\,\psi-\mathcal{T}_2\varphi+f$, ψ deve appartenere a $L^s(\Omega)$, $\mathcal{T}_1\,\psi$ a $C^\lambda(\bar\Omega)$ e quindi: $\psi\in C^\lambda(\bar\Omega)$.

Allora la funzione u data da (2.1) con (ψ,φ,c) soluzione del sistema (2.8) è soluzione di (2.5).

Infine, che le autosoluzioni di (2.6) siano Hölderiane, si dimostra analogamente a quanto fatto per le soluzioni di (2.7).

Osserviamo esplicitamente che la (2.1), quando (ψ,φ,c) è autosoluzione del sistema:

$$\begin{cases}\psi+\mathcal{T}_1\,\psi+\mathcal{T}_2\,\varphi+ca_{00}=0\\ \mathcal{T}_3\,\psi+S\varphi+cb_{00}=0\end{cases}$$

fornisce una rappresentazione esplicita delle eventuali autosoluzioni del problema omogeneo:

$$u\in\mathcal{U}(\Omega)\,;\qquad Lu=0 \quad\text{in }\Omega;\qquad Bu=0\quad\text{su }\Sigma\,.$$

Bibliografia

[1] A. Cialdea - *Un teorema di completezza per i polinomi biarmonici in un campo con contorno angoloso*, « Rend. Matem. », in corso di pubblicazione.

[2] G. Fichera (1958) - *Una introduzione alla teoria delle equazioni integrali singolari*, « Rend. Matem. », V, *17*, 82-191.

[3] G. Fichera (1963) - *Operatori di Riesz-Fredholm, operatori riducibili, equazioni integrali singolari, applicazioni*, « Pubbl. dell'Ist. Matem. dell'Univ. di Roma ».

[4] G. Fichera (1964) - *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno*, « Mem. Acc. Naz. dei Lincei », 7, 91-140.

[5] G. Fichera e L. De Vito (1971) - *Funzioni analitiche di una variabile complessa*, Veschi, III ediz., Roma, 1971.

[6] K.O. Friedrichs (1947) - *A theorem of Lichtenstein*, « Duke Math. Journal », *14*, 67-82.

[7] R.P. Gilbert (1974) - *Constructive methods for elliptic equations*, Springer Verlag, Berlin etc.

(15) Cfr. [13], p. 806.
(16) Cfr. [3], p. 265.
(17) Cfr. nota (11).
(18) Cfr. [3], p. 264, Teorema XXII.

[8] R.P. GILBERT e J.L. BUCHANAN (1983) – *First order elliptic systems. A function theorethic approach,* Academic Press, New York etc.
[9] L. LICHTENSTEIN (1912) – *Über das Poissonche Integral etc.,* « Journ. fur die reine u. angewandte Mathem. », *141,* 12-42.
[10] Y.B. LOPATINSKII (1953) – *On a method of reducing boundary problems for a system of differential equations of elliptic type to regular equations,* « Ukrain. Mat. Zurnal », *5,* 123-151.
[11] N.I. MUSKHELISHVILI (1972) – *Singular integral equations,* Groningen Noordhoff.
[12] L. NIRENBERG (1959) – *On elliptic partial differential equations,* « Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa III », *13,* 115-162.
[13] M. PICONE (1940) – *Appunti di Analisi Superiore,* Rondinella, Napoli.
[14] P.E. RICCI (1974) – *Sui potenziali di semplice strato per le equazioni ellittiche di ordine superiore in due variabili,* « Rend. Matem. », VI, *7,* 1-39.
[15] I.N. VEKUA (1967) – *New methods for solving elliptic equations,* North-Holland, Amsterdam.
[16] W.L. WENDLAND (1979) – *Elliptic systems in the plane,* Pitman, London etc.
[17] A. ZYGMUND (1957) – *On singular integrals,* « Rend. Matem. », V, *16,* 468-505.
[18] A. ZYGMUND (1979) – *Trigonometric series,* II ediz., Cambridge University Press.