
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

GIANNI DAL MASO, ENNIO DE GIORGI, LUCIANO
MODICA

**Convergenza debole di misure su spazi di funzioni
semicontinue**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 79 (1985), n.5, p. 98–106.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1985_8_79_5_98_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di
ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le
copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Misura e integrazione. — *Convergenza debole di misure su spazi di funzioni semicontinue.* Nota di GIANNI DAL MASO (*), ENNIO DE GIORGI (**) e LUCIANO MODICA (***), presentata (****) dal Corrisp. E. DE GIORGI.

SUMMARY. — Given a complete and separable metric space X , we study the weak convergence of sequences of measures defined on the space $\mathcal{S}(X)$ of all real-valued lower semicontinuous functions on X as well as on the space $\mathcal{F}(X)$ of all closed subsets of X .

INTRODUZIONE

Una recente impostazione del problema dell'omogeneizzazione stocastica (vedi [12], [18], [14], [1], [17]) nell'ambito della teoria della Γ -convergenza di funzionali integrali (vedi [11], [4], [5], [10]) ha messo in evidenza l'opportunità di studiare in modo sistematico la convergenza debole di successioni di misure di probabilità definite su uno spazio di funzionali semicontinui.

A tale scopo si considerano uno spazio topologico X , che nelle applicazioni sarà in generale uno spazio di funzioni (ad esempio $X = L^p(\Omega)$ o $X = W^{m,p}(\Omega)$), e l'insieme $\mathcal{S} = \mathcal{S}(X)$ dei funzionali inferiormente semicontinui su X . Considerazioni di carattere variazionale, relative alla ricerca dei minimi dei funzionali, portano ad introdurre su $\mathcal{S}$ una topologia compatta, legata alla teoria della Γ -convergenza.

Questa topologia non soddisfa in generale l'assioma di separazione di Hausdorff, e, in molti casi interessanti, non esistono funzioni reali continue su $\mathcal{S}$ che non siano costanti (vedi [2]). Quindi occorre usare un tipo di convergenza debole di misure simile a quello considerato in [16] e [8].

Lo scopo di questa Nota è enunciare alcuni teoremi sulla convergenza debole di misure definite sui boreliani di $\mathcal{S}$, nell'ipotesi che X sia uno spazio metrico completo e separabile.

Questi Teoremi da un lato comprendono come casi particolari molti risultati dimostrati in [11], [4], [9] e [15], ove lo spazio dei funzionali considerati

(*) S.I.S.S.A., Strada Costiera 11, 34014 Trieste.

(**) Scuola Normale Superiore, Piazza dei Cavalieri 7, 56100 Pisa.

(***) Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Via F. Buonarroti 2, 56100 Pisa.

(****) Nella seduta del 22 novembre 1985.

Lavoro eseguito nell'ambito di un progetto nazionale di ricerca finanziato dal Ministero della Pubblica Istruzione.

risulta metrizzabile, dall'altro risolvono positivamente diverse congetture formulate in [6].

Le dimostrazioni, esposte in altra sede (vedi [3]), si fondano sulla possibilità di immergere lo spazio $\mathcal{S}(X)$ nello spazio $\mathcal{F}(X \times \mathbf{R})$ dei chiusi di $X \times \mathbf{R}$, dotato di una topologia legata alla convergenza d'insiemi di Kuratowski, e su alcuni teoremi relativi alla convergenza debole di misure definite sui boreliani di $\mathcal{F}(X \times \mathbf{R})$.

1. MISURE SULLO SPAZIO DEI FUNZIONALI INFERIORMENTE SEMICONTINUI

Sia X uno spazio metrico completo e separabile, e sia $\mathcal{S} = \mathcal{S}(X)$ l'insieme dei funzionali

$$\phi : X \rightarrow \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

inferiormente semicontinui su X . Per ogni sottoinsieme A di X consideriamo il funzionale $f_A : \mathcal{S} \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ definito da

$$(1.1) \quad f_A(\phi) = \inf_{x \in A} \phi(x)$$

per ogni $\phi \in \mathcal{S}$.

Indichiamo con τ_M la meno fine tra le topologie su $\mathcal{S}$ rispetto alle quali i funzionali f_A siano superiormente semicontinui su $\mathcal{S}$ per ogni A aperto in X ed inferiormente semicontinui su $\mathcal{S}$ per ogni A compatto in X .

Ricordiamo brevemente alcune proprietà della topologia τ_M dimostrate in [2].

1. La topologia τ_M è compatta e sequenzialmente compatta.
2. La convergenza indotta da τ_M sulle successioni coincide con la $\Gamma(X^-)$ - convergenza (vedi [7], Definizione 1.1).
3. Se lo spazio X è localmente compatto, allora τ_M è metrizzabile.
4. Se ogni sottoinsieme compatto di X ha parte interna vuota, allora ogni coppia di aperti non vuoti della topologia τ_M ha intersezione non vuota. Ne segue che, in questo caso, τ_M non soddisfa l'assioma di separazione di Hausdorff, e le uniche funzioni reali continue su $\mathcal{S}$ rispetto alla topologia τ_M sono le funzioni costanti.

Indichiamo con $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ la σ -algebra su $\mathcal{S}$ generata dalla topologia τ_M .

PROPOSIZIONE 1.1. *La σ -algebra $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ è la meno fine tra le σ -algre su $\mathcal{S}$ che rendono misurabili, per ogni A aperto in X , le applicazioni f_A definite in (1.1).*

Indichiamo con $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ l'insieme delle misure non negative e limitate su $(\mathcal{S}, \mathcal{B}(\mathcal{S}))$.

DEFINIZIONE 1.2. Diciamo che una successione (μ_h) in $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ converge debolmente ad una misura μ della classe $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

(a₁) per ogni aperto $\mathcal{E}$ della topologia τ_M

$$\mu(\mathcal{E}) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \mu_h(\mathcal{E});$$

(a₂) per ogni chiuso $\mathcal{E}$ della topologia τ_M .

$$\mu(\mathcal{E}) \geq \limsup_{h \rightarrow \infty} \mu_h(\mathcal{E}).$$

Si dimostra facilmente che le condizioni (a₁) e (a₂) equivalgono alle seguenti proprietà:

(b₁) per ogni funzionale $f: \mathcal{S} \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ inferiormente limitato ed inferiormente semicontinuo rispetto alla topologia τ_M si ha

$$\int_{\mathcal{S}} f d\mu \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{S}} f d\mu_h;$$

(b₂) per ogni funzionale $f: \mathcal{S} \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ superiormente limitato e superiormente semicontinuo rispetto alla topologia τ_M si ha

$$\int_{\mathcal{S}} f d\mu \geq \limsup_{h \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{S}} f d\mu_h.$$

Si può dimostrare che la convergenza debole su $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ gode delle seguenti proprietà:

(c₁) se $\mu_h = \mu$ per ogni h , allora (μ_h) converge debolmente a μ ;

(c₂) se (μ_h) converge debolmente a μ , allora ogni sottosuccessione di (μ_h) converge debolmente a μ ;

(c₃) se (μ_h) non converge debolmente a μ , allora esiste una sottosuccessione di (μ_h) che non contiene alcuna sottosuccessione debolmente convergente a μ ;

(c₄) se (μ_h) converge debolmente sia a μ che a ν , allora $\mu = \nu$;

(c₅) se la successione $(\mu_h(\mathcal{S}))$ è limitata, allora la successione (μ_h) ha una sottosuccessione debolmente convergente.

Le proprietà (c₁), (c₂), (c₃) si riassumono dicendo che la convergenza debole su $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ soddisfa gli assiomi degli spazi $\mathcal{L}^*$ di Kuratowski (vedi [13] § 20).

Indichiamo con $\mathcal{M}_1(\mathcal{S})$ l'insieme delle misure di probabilità su $(\mathcal{S}, \mathcal{B}(\mathcal{S}))$. Dalle proprietà (c₁), ..., (c₅) si ottiene facilmente il seguente Teorema.

TEOREMA 1.3. *Lo spazio $\mathcal{M}_1(\mathcal{S})$, dotato della convergenza debole per successioni introdotta dalla Definizione 1.2, è uno spazio $\mathcal{L}^*$ sequenzialmente compatto e con unicità del limite.*

Il seguente Teorema consente di stabilire la convergenza debole di una successione di misure verificando le disuguaglianze (b_1) e (b_2) soltanto su una classe ristretta di funzionali semicontinui. Consideriamo i funzionali $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{R}$ della forma

$$(1.2) \quad f(\phi) = \beta \left(\inf_{x \in A_1} \phi(x), \dots, \inf_{x \in A_n} \phi(x) \right),$$

ove n è un numero naturale, $\beta: \bar{\mathbf{R}}^n \rightarrow \mathbf{R}$ è una funzione limitata, continua e crescente (rispetto all'ordine prodotto su $\bar{\mathbf{R}}^n$), ed $A_1, \dots, A_n$ sono sottoinsiemi di X .

TEOREMA 1.4. *Una successione (μ_h) in $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ converge debolmente ad una misura μ della classe $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ se e solo se sono soddisfatte le seguenti condizioni:*

(d_1) *per ogni funzione f del tipo (1.2) con n arbitrario ed $A_1, \dots, A_n$ compatti in X si ha*

$$\int_{\mathcal{S}} f d\mu \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{S}} f d\mu_h;$$

(d_2) *per ogni funzione f del tipo (1.2) con n arbitrario ed $A_1, \dots, A_n$ aperti in X si ha*

$$\int_{\mathcal{S}} f d\mu \geq \limsup_{h \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{S}} f d\mu_h.$$

Illustriamo ora il significato variazionale della convergenza debole su $\mathcal{M}(\mathcal{S})$. A tale scopo utilizzeremo le disuguaglianze (b_1) e (b_2) con opportuni funzionali semicontinui f .

Fissiamo un numero naturale n ed una funzione $\beta: X^n \times \bar{\mathbf{R}}^n \rightarrow \mathbf{R}$ continua e limitata, tale che $z \rightarrow \beta(x, z)$ sia crescente su $\bar{\mathbf{R}}^n$ (rispetto all'ordine prodotto) per ogni $x = (x_1, \dots, x_n) \in X^n$. Per ogni sottoinsieme A di X^n consideriamo il funzionale $f_A^\beta: \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{R}$ definito da

$$(1.3) \quad f_A^\beta(\phi) = \inf_{x \in A} \beta(x_1, \dots, x_n, \phi(x_1), \dots, \phi(x_n))$$

per ogni $\phi \in \mathcal{S}$. Notiamo che i funzionali introdotti in (1.2) non sono altro che i funzionali della forma (1.3) corrispondenti ad un insieme A del tipo $A_1 \times \dots \times A_n$ e ad una funzione β indipendente da $x_1, \dots, x_n$.

PROPOSIZIONE 1.5. *Se A è compatto (risp. aperto) in X^n , allora il funzionale f_A^β definito in (1.3) è inferiormente (risp. superiormente) semicontinuo su rispetto alla topologia τ_M .*

Applicando le disuguaglianze (b_1) e (b_2) ai funzionali f_A^β definiti in (1.3), si ottiene facilmente il seguente Teorema, che costituisce la naturale estensione allo spazio $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ del Teorema che lega la $\Gamma(X^-)$ -convergenza alla convergenza dei minimi (vedi [7], Corollario 2.4)

TEOREMA 1.6. *Sia (μ_h) una successione debolmente convergente ad una misura μ in $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ e sia G un aperto di X^n . Supponiamo che esista un compatto K di X^n , contenuto in G , tale che*

$$\mu_h(\{\phi \in \mathcal{S} : f_G^\beta(\phi) \neq f_K^\beta(\phi)\}) = 0$$

per ogni h . Allora

$$\mu(\{\phi \in \mathcal{S} : f_G^\beta(\phi) \neq f_K^\beta(\phi)\}) = 0$$

e

$$\int_{\mathcal{S}} f_G^\beta d\mu = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{S}} f_G^\beta d\mu_h.$$

Introduciamo ora la nozione di funzionale aleatorio.

DEFINIZIONE 1.7. *Un funzionale aleatorio (inferiormente semicontinuo su X) è una applicazione misurabile da uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ nello spazio misurabile $(\mathcal{S}, \mathcal{B}(\mathcal{S}))$.*

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità e sia $\Phi : \Omega \rightarrow \mathcal{S}$ una applicazione. Dalla Proposizione 1.1 segue che Φ è un funzionale aleatorio se e solo se le funzioni $f_A \circ \Phi : \Omega \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ sono $\mathcal{A}$ -misurabili per ogni A aperto in X . Ricordiamo a questo proposito che

$$(f_A \circ \Phi)(\omega) = \inf_{x \in A} [\Phi(\omega)](x)$$

per ogni $\omega \in \Omega$.

Indichiamo con $\mathcal{B}(X)$ la σ -algebra dei boreliani di X . Il seguente Teorema fornisce un criterio per stabilire se Φ sia un integrando aleatorio.

TEOREMA 1.8. *Se Φ è un integrando aleatorio, allora l'applicazione $(\omega, x) \rightarrow [\Phi(\omega)](x)$ di $\Omega \times X$ in $\bar{\mathbf{R}}$ è $\mathcal{A} \times \mathcal{B}(X)$ -misurabile. Viceversa, se lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ è completo e l'applicazione $(\omega, x) \rightarrow [\Phi(\omega)](x)$ è $\mathcal{A} \times \mathcal{B}(X)$ -misurabile, allora Φ è un integrando aleatorio.*

Per ogni funzionale aleatorio Φ indichiamo con μ_Φ la legge di probabilità di Φ , cioè la misura su $(\mathcal{S}, \mathcal{B}(\mathcal{S}))$ definita da

$$\mu_\Phi(\mathcal{E}) = P(\Phi^{-1}(\mathcal{E}))$$

per ogni $\mathcal{E} \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$. Il seguente Teorema stabilisce il legame tra la $\Gamma(X^-)$ -convergenza dei funzionali aleatori e la convergenza debole delle corrispondenti leggi di probabilità.

TEOREMA 1.9. *Sia (Φ_h) una successione di funzionali aleatori su X , tutti definiti sul medesimo spazio di probabilità completo $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Supponiamo che per ogni $\omega \in \Omega$ la successione $(\Phi_h(\omega))$ $\Gamma(X^-)$ -converga verso un elemento $\Phi(\omega)$ di $\mathcal{S}$. Allora l'applicazione $\Phi: \Omega \rightarrow \mathcal{S}$ è un funzionale aleatorio e la successione di misure (μ_{Φ_h}) converge debolmente alla misura μ_Φ .*

2. MISURE SULLO SPAZIO DEI CHIUSI

Sia X uno spazio metrico completo e separabile, e sia $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X)$ l'insieme dei chiusi di X (compreso l'insieme vuoto $\emptyset$). Per ogni sottoinsieme A di X consideriamo l'insieme

$$(2.1) \quad \mathcal{F}_A = \{F \in \mathcal{F} : F \cap A \neq \emptyset\}.$$

Indichiamo con τ_V la *meno fine* tra le topologie su $\mathcal{F}$ per le quali gli insiemi $\mathcal{F}_A$ siano *aperti* in $\mathcal{F}$, per ogni A *aperto* in X , e *chiusi* in $\mathcal{F}$, per ogni A *compatto* in X .

Sia $e: \mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X \times \mathbf{R})$ l'applicazione che ad ogni funzione $\phi \in \mathcal{S}(X)$ associa il suo epigrafo $e(\phi)$, definito da

$$e(\phi) = \{(x, t) \in X \times \mathbf{R} : \phi(x) \leq t\}.$$

Sia $\chi: \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{S}(X)$ l'applicazione che ad ogni chiuso $F \in \mathcal{F}(X)$ associa la sua funzione indicatrice $\chi(F)$, definita da

$$[\chi(F)](x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in F, \\ +\infty & \text{se } x \in X - F. \end{cases}$$

Il legame tra la topologia τ_V , su $\mathcal{F}$, e la topologia τ_M , su $\mathcal{S}$, è dato dalla seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 2.1. *L'applicazione $e: \mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X \times \mathbf{R})$ è un omeomorfismo tra $\mathcal{S}(X)$, con la topologia τ_M , e la sua immagine, con la topologia indotta da*

τ_V . L'applicazione $\chi: \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{S}(X)$ è un omeomorfismo tra $\mathcal{F}(X)$, con la topologia τ_V , e la sua immagine, con la topologia indotta da τ_M .

Le proprietà della topologia τ_V , su $\mathcal{F}$, sono quindi analoghe a quelle della topologia τ_M , su $\mathcal{S}$, espresse nel capitolo precedente. Il ruolo avuto, in $\mathcal{S}$, dalla $\Gamma(X)$ -convergenza è assunto, in $\mathcal{F}$, dalla classica convergenza d'insiemi nel senso di Kuratowski (vedi [13], § 29).

Indichiamo con $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ la σ -algebra su $\mathcal{F}$ generata dalla topologia τ_V .

PROPOSIZIONE 2.2. *La σ -algebra $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ è generata dagli insiemi della forma $\mathcal{F}_A$, definiti in (2.1), con A aperto in X .*

Indichiamo con $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ l'insieme delle misure non-negative e limitate su $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathcal{F}))$ e con $\mathcal{M}_1(\mathcal{F})$ l'insieme delle misure di probabilità su $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathcal{F}))$. La definizione di convergenza debole su $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ si ottiene dalla Definizione 1.2 sostituendo lo spazio $\mathcal{S}$ con $\mathcal{F}$ e la topologia τ_M con τ_V .

Si può allora dimostrare il seguente Teorema, dal quale si ottiene facilmente il Teorema 1.3 utilizzando gli omeomorfismi forniti dalla Proposizione 2.1.

TEOREMA 2.3. *Lo spazio $\mathcal{M}_1(\mathcal{F})$, dotato della nozione di convergenza debole per successioni, è uno spazio $\mathcal{L}^*$ sequenzialmente compatto e con unicità del limite.*

Il seguente Teorema, analogo al Teorema 1.4, fornisce una caratterizzazione della convergenza debole su $\mathcal{M}(\mathcal{F})$.

TEOREMA 2.4. *Una successione (μ_h) in $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ converge debolmente ad un elemento μ della classe $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ se e solo se sono soddisfatte le seguenti condizioni:*

(e₁) *per ogni G aperto in X*

$$\mu(\mathcal{F}_G) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \mu_h(\mathcal{F}_G);$$

(e₂) *per ogni K compatto in X*

$$\mu(\mathcal{F}_K) \geq \limsup_{h \rightarrow \infty} \mu_h(\mathcal{F}_K);$$

(e₃) $\mu(\mathcal{F}) = \lim_{h \rightarrow \infty} \mu_h(\mathcal{F}).$

La dimostrazione dei Teoremi 2.3 e 2.4 si basa sulle proprietà delle misure della classe $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ espresse nelle seguenti proposizioni.

PROPOSIZIONE 2.5. *Sia $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$. Allora*

$$\mu(\mathcal{F}_G) = \sup \{ \mu(\mathcal{F}_K) : K \text{ compatto, } K \subseteq G \}$$

per ogni G aperto in X .

PROPOSIZIONE 2.6. Siano $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$. Se $\mu(\mathcal{F}) = \nu(\mathcal{F})$ e $\mu(\mathcal{F}_K) = \nu(\mathcal{F}_K)$ per ogni K compatto in X , allora $\mu = \nu$.

PROPOSIZIONE 2.7. Se (μ_h) e μ verificano le condizioni (e_1) ed (e_2) del Teorema 2.4, allora

$$\begin{aligned}\mu(\mathcal{F}_K) &= \inf \{ \liminf_{h \rightarrow \infty} \mu_h(\mathcal{F}_G) : G \text{ aperto, } G \supseteq K \} = \\ &= \inf \{ \limsup_{h \rightarrow \infty} \mu_h(\mathcal{F}_G) : G \text{ aperto, } G \supseteq K \}\end{aligned}$$

per ogni K compatto in X .

Le dimostrazioni dei Teoremi 1.3 e 1.4 si basano sui risultati ottenuti nei Teoremi 2.3 e 2.4 e sugli omeomorfismi forniti dalla Proposizione 2.1.

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. BURRIDGE, S. CHILDRESS e G.C. PAPANICOLAOU (1981) – *Microscopic properties of disordered media (Proceedings)*. « Lecture Notes in Physics », 154, Springer, Berlin.
- [2] D. DAL MASO (1983) – *Questioni di topologia legate alla Γ -convergenza*. « Ricerche Mat. », 32, 135-162.
- [3] G. DAL MASO, E. DE GIORGI e L. MODICA (1986) – *Weak convergence of measures on spaces of lower semicontinuous functions*. In « Integral functionals in calculus of variations », ed. by G. Dal Maso and L. Modica, « Lecture Notes in Math. », Springer, Berlin.
- [4] G. DAL MASO e L. MODICA (1986) – *Nonlinear stochastic homogenization*. Di prossima pubblicazione su « Ann. Mat. Pura Appl. ».
- [5] G. DAL MASO e L. MODICA – *Nonlinear stochastic homogenization and ergodic theory*. Di prossima pubblicazione su « J. Reine Angew. Math. ».
- [6] E. DE GIORGI (1984) – *On a definition of Γ -convergence of measures*. In « Multifunctions and integrands », ed. by G. Salinetti, « Lecture Notes in Math. », 1091, Springer, Berlin, 150-159.
- [7] E. DE GIORGI e T. FRANZONI (1975) – *Su un tipo di convergenza variazionale*. « Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. », (8) 58, 842-850 e « Rend. Sem. Mat. Brescia », 3 (1979), 63-101.
- [8] E. DE GIORGI e G. LETTA (1977) – *Une notion générale de convergence faible pour des fonctions croissantes d'ensemble*. « Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. », (4) 4, 61-99.
- [9] G. FACCHINETTI – *Dualità e convergenza stocastica dei minimi*. Di prossima pubblicazione su « Le Matematiche ».
- [10] G. FACCHINETTI e A. GAVIOLI – *Omogeneizzazione stocastica di funzionali non coercivi*. Di prossima pubblicazione su « Ann. Mat. Pura Appl. ».
- [11] G. FACCHINETTI e L. RUSSO (1983) – *Un caso unidimensionale di omogeneizzazione stocastica*. « Boll. Un. Mat. Ital. », (6) 2-C, 159-170.
- [12] S.M. KOZLOV (1980) – *Averaging of random operators*. « Math. USSR Sb. », 37, 167-180.
- [13] K. KURATOWSKI (1966) – *Topology*. Academic Press, New York.
- [14] G.C. PAPANICOLAOU e S.R.S. VARADHAN (1981) – *Boundary value problems with rapidly oscillating random coefficients*. In « Random fields », ed. by J. Fritz, J.L. Le-

- bowitz and D. Szasz, « Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai », 27, North Holland, Amsterdam, 835-873.
- [15] G. SALINETTI e R. WETS – *On the convergence in distribution of measurable multifunctions, normal integrands, stochastic processes and stochastic infima*. Di prossima pubblicazione su « Math. Oper. Res. ».
- [16] F. TOPSOE (1970) – *Topology and measure*. « Lecture Notes in Math. », 133, Springer, Berlin.
- [17] J.R. WILLIS (1981) – *Variational and related methods for the overall properties of composites*. « Advances in Appl. Mech. », 21, 1-78.
- [18] V.V. YURINSKIJ (1980) – *Averaging elliptic equations with random coefficients*. « Sib. Math. J. », 20, 611-623.