Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Luigi Ambrosio

Nuovi risultati sulla semicontinuità inferiore di certi funzionali integrali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **79** (1985), n.5, p. 82–89.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1985_8_79_5_82_0>

Analisi matematica. — *Nuovi risultati sulla semicontinuità inferiore di certi funzionali integrali.* Nota (*) di LUIGI AMBROSIO (**), presentata dal Corrisp. E. DE GIORGI.

SUMMARY. — Given an open subset Ω of $\mathbf{R}^n$ and a Borel function $f : \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to [0, +\infty[$, conditions on f are given which assure the lower semicontinuity of the functional $\int_\Omega f(x, u, \mathrm{D}u)\, \mathrm{d}x$ with respect to different topologies.

INTRODUZIONE

Criteri di semicontinuità per il funzionale

$$\mathrm{F}(u) = \int_\Omega f(x, u, \mathrm{D}u)\, \mathrm{d}x \qquad u \in \mathrm{W}^{1,1}(\Omega)$$

sono stati dati da Serrin, in ipotesi di continuità di f in tutti gli argomenti e di convessità in $\mathrm{D}u$ (vedi il Teorema 1) e da Ioffe, in ipotesi di semicontinuità rispetto ad $(u, \mathrm{D}u)$ e convessità rispetto a $\mathrm{D}u$ (vedi il Teorema 2); recentemente De Giorgi, Buttazzo e Dal Maso hanno dimostrato un teorema di semicontinuità rispetto alla topologia $\mathrm{L}^1(\Omega)$ per il funzionale

$$\mathrm{F}(u) = \int_\Omega f(u, \mathrm{D}u)\, \mathrm{d}x \qquad u \in \mathrm{W}^{1,1}(\Omega)$$

in ipotesi di misurabilità di f rispetto ad u e convessità in $\mathrm{D}u$ (vedi il Teorema 3).

In questa Nota diamo alcuni Teoremi di semicontinuità (Teoremi 4, 5, 6) che comprendono sia i casi studiati da Serrin, Ioffe, che i casi studiati da De Giorgi, Buttazzo, Dal Maso.

Successivamente vediamo come questi risultati si applichino al caso in cui f è una forma quadratica definita positiva del tipo

$$f(x, s, p) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, s)\, p_i\, p_j \qquad (x, s, p) \in \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n .$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 18 ottobre 1985.
(**) Scuola Normale Superiore, piazza Cavalieri 7, 56100, Pisa.

Infine, diamo alcuni controesempi che illustrano il ruolo di alcune ipotesi dei Teoremi 4, 5, 6 e mostrano che è difficile indebolirle.

§ 1. DEFINIZIONI E RISULTATI PRECEDENTI

DEFINIZIONE 1. Sia Ω un insieme aperto e limitato di $\mathbf{R}^n$ e sia $g\colon \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to [0, +\infty[$; diremo che g ha la *proprietà* (K) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $K \subseteq \Omega$ compatto tale che

i) $\operatorname{mis}(\Omega - K) < \varepsilon$ (con mis si intende la misura di Lebesgue);

ii) la funzione $g(\cdot, s, \cdot)\colon K \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ è s.c.i. per ogni $s \in \mathbf{R}$.

DEFINIZIONE 2. Sia $\{u_h\}_{1 \le h \le +\infty} \subseteq W^{1,1}(\Omega)$; diremo che $u_h \to u$ nella *convergenza* $w - BV_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ se $u_h \to u$ in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e la successione $\{u_h\}$ è limitata in $W^{1,1}(A)$ per ogni aperto $A \Subset \Omega$.

DEFINIZIONE 3. Sia $g : \mathbf{R}^n \to [0, +\infty]$ una funzione convessa e $p \in \mathbf{R}^n$; definiamo il *sottodifferenziale di g in p* come l'insieme

$$\partial^- g(p) = \{z \in \mathbf{R}^n \mid f(q) \ge f(p) + \langle q - p, z\rangle \ \forall q \in \mathbf{R}^n\} .$$

Fissiamo ora una funzione Boreliana $f : \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to [0, +\infty[$ ed enunciamo i Teoremi di Serrin, Ioffe, De Giorgi-Buttazzo-Dal Maso.

TEOREMA 1 (*Serrin*, cfr. [7], [9]).

Se la funzione $f(x, s, p)$ è continua in (x, s, p) e convessa in p, allora il funzionale

$$\text{(1)} \qquad F(u) = \int_\Omega f(x, u, Du)\, dx \qquad u \in W^{1,1}(\Omega)$$

è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza $w - BV_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

TEOREMA 2 (*Ioffe*, cfr. [5], [6]).

Se la funzione $f(x, s, p)$ è semicontinua inferiormente in (s, p) e convessa in p, allora il funzionale F, *definito dalla* (1), *è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza* $w - W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

TEOREMA 3 (*De Giorgi-Buttazzo-Dal Maso*, cfr. [3]).

Se la funzione $f(x, s, p)$ è indipendente da x, convessa in p e inoltre

i) *la funzione $f(\cdot, 0)$ è s.c.i.*;

ii) *la funzione* $\alpha(s) = \limsup_{|p|\to 0} [f(s\,,0) - f(s\,,p)]^+/|p|$ *appartiene a* $L^1_{loc}(\mathbf{R})$;

allora il funzionale F, *definito dalla* (1), *è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza* $L^1_{loc}(\Omega)$.

OSSERVAZIONE 1. Se esistono $c > 0$, $\alpha \geq 1$ tali che

$$f(x, s, p) \geq c\,|p|^\alpha \qquad \forall\,(x, s, p) \in \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$$

allora il funzionale F definito dalla (1) è $L^1_{loc}(\Omega)$ s.c.i. se e solo se è $w - BV_{loc}(\Omega)$ s.s.c.i. e, se $\alpha > 1$, si ha anche che

$$F \text{ è } L^1_{loc}(\Omega) \text{ s.c.i.} \Longleftrightarrow F \text{ è } w - BV_{loc}(\Omega) \text{ s.s.c.i.} \Longleftrightarrow F \text{ è } w - W^{1,1}_{loc}(\Omega) \text{ s.s.c.i.}\,.$$

§ 2. NUOVI RISULTATI

TEOREMA 4. *Sia* Ω *un aperto limitato di* $\mathbf{R}^n$ *e* $f : \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to [0\,, +\infty[$ *una funzione di Borel avente le seguenti proprietà:*

(*a*) *per ogni* $(x\,, s) \in \Omega \times \mathbf{R}$ *la funzione* $f(x\,, s\,, \cdot)$ *è convessa*;

(*b*) *per ogni* $(x\,, s) \in \Omega \times \mathbf{R}$ si ha $f(x\,, s, 0) = 0$.

Supponiamo inoltre che f soddisfi una delle seguenti ipotesi:

(*c*) *f ha la proprietà* (K);

(*c*)′ *per ogni* $s \in \mathbf{R}$ *la funzione* $f(\cdot\,, s\,, \cdot)$ *è s.c.i. in* $\Omega \times \mathbf{R}^n$;

Si ha allora:

i) *se f soddisfa la* (*c*) *il funzionale* F, *dato dalla* (1), *è s.s.c.i. rispetto alla convergenza* $w - W^{1,1}_{loc}(\Omega)$;

ii) *se f soddisfa la* (*c*)′ *il funzionale* F *è s.s.c.i. rispetto alla convergenza* $w - BV_{loc}(\Omega)$;

iii) *se f soddisfa la* (*c*)′ *e* $n = 1$ *il funzionale* F *è s.s.c.i. rispetto alla convergenza* $L^1_{loc}(\Omega)$.

L'ipotesi (*b*) nel Teorema 4 è semplice ma troppo restrittiva; nei due teoremi seguenti essa viene sostituita da alcune ipotesi più generali, anche se più complicate, di regolarità della funzione $f(x\,, s, p)$ nel punto $p = 0$.

TEOREMA 5. *Sia* Ω *un aperto limitato di* $\mathbf{R}^n$ *e* $f : \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to [0\,, +\infty[$ *una funzione di Borel avente le seguenti proprietà*:

(*a*) *per ogni* $(x\,, s) \in \Omega \times \mathbf{R}$ *la funzione* $f(x\,, s\,, \cdot)$ *è convessa*;

(*b*)′ *per ogni* $x \in \Omega$ *la funzione* $f(x\,, \cdot\,, 0)$ *è s.c.i.*;

$(c)''$ *per ogni* $s \in \mathbf{R}$ *la funzione* $f(\cdot, s, \cdot) - f(\cdot, s, 0)$ *è s.c.i. in* $\Omega \times \mathbf{R}^n$;

(d) *esiste una funzione di Borel* $\lambda : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ *tale che*

i) $\lambda(x, s) \in \partial^- f(x, s, 0)$ $\forall (x, s) \in \Omega \times \mathbf{R}$;

ii) *per ogni insieme aperto* $A \Subset \Omega$ *la funzione* $g(s) = \sup_{x \in A} |\lambda(x, s)|$ *appartiene a* $L^1_{loc}(\mathbf{R})$ *e le funzioni* $\{\lambda(\cdot, s)\}_{s \in \mathbf{R}}$ *sono equicontinue in* $C(\bar{A})$.

Allora il funzionale F, *definito dalla* (1), *è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza* $w - BV_{loc}(\Omega)$.

TEOREMA 6. *Sia* Ω *un aperto limitato di* $\mathbf{R}^n$ *e* $f : \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to [0, +\infty[$ *una funzione di Borel avente le seguenti proprietà*:

(a) *per ogni* $(x, s) \in \Omega \times \mathbf{R}$ *la funzione* $f(x, s, \cdot)$ *è convessa*;

$(b)'$ *per ogni* $x \in \Omega$ *la funzione* $f(x, \cdot, 0)$ *è s.c.i.*;

$(c)'''$ *la funzione* $g(x, s, p) = f(x, s, p) - f(x, s, 0)$ *ha la proprietà* (K);

$(d)'$ *esiste una funzione di Borel* $\lambda : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ *tale che*

i) $\lambda(x, s) \in \partial^- f(x, s, 0)$ $\forall (x, s) \in \Omega \times \mathbf{R}$;

ii) $\forall \varepsilon > 0$ *esiste un insieme compatto* $K \subseteq \Omega$ *tale che mis* $(\Omega - K) < \varepsilon$, *la funzione* $g(s) = \sup_{x \in K} |\lambda(x, s)|$ *appartiene a* $L^\infty_{loc}(\mathbf{R})$ *e le funzioni* $\{\lambda(\cdot, s)\}_{s \in \mathbf{R}}$ *sono equicontinue in* $C(K)$.

Allora il funzionale F, *definito dalla* (1), *è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza* $w - W^{1,1}_{loc}(\Omega)$.

OSSERVAZIONE 2. Le ipotesi dei Teoremi 4, 5, 6 possono essere lievemente indebolite; ad esempio l'ipotesi (a) può essere sostituita da

$(a)'$ esiste un insieme $M \in \mathbf{B}(\Omega)$ tale che mis $(M) = 0$ e la funzione $f(x, s, \cdot)$ è convessa per ogni $x \in \Omega - M$, $s \in \mathbf{R}$;

e simili modifiche possono essere fatte nelle altre ipotesi.

Vediamo ora di fare un confronto tra i Teoremi 1, 2, 3 ed i Teoremi 4, 5, 6. Per prima cosa, è evidente che il Teorema 5 indebolisce le ipotesi del Teorema 3, mentre nella tesi si passa dalla convergenza $L^1_{loc}(\Omega)$ alla convergenza $w - BV_{loc}(\Omega)$; questo passaggio sembra inevitabile (vedi il controesempio 1 del § 3) se si vuole dipendenza da x dell'integrando f.

Le ipotesi del Teorema 5 sono tutte più deboli delle corrispondenti ipotesi del Teorema 1, a parte la (d) che comunque può essere indebolita ma non eliminata (vedi il controesempio 5 del § 3) se si richiede la sola misurabilità in s dell'integrando $f(x, s, p)$.

Infine, il collegamento tra il Teorema 6 ed il Teorema 2 è dato dal Teorema di Scorza-Dragoni (cfr. [4]), dal quale si ricava facilmente che ogni funzione soddisfacente le ipotesi del Teorema 2 ha anche la proprietà (K).

Per chiarire meglio la situazione, consideriamo il funzionale

$$\mathrm{J}(u) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, u)\, \mathrm{D}_i u\, \mathrm{D}_j u\, \mathrm{d}x \qquad u \in \mathrm{W}^{1,1}(\Omega)$$

dove

$$f(x, s, p) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, s)\, p_i p_j \qquad (x, s, p) \in \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$$

è una forma quadratica definita positiva; supponiamo per semplicità che esista $\mathrm{C} > 0$ tale che

$$f(x, s, p) \geq \mathrm{C}\, |p|^2 \qquad \forall (x, s, p) \in \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n .$$

In tal caso, il teorema di Serrin garantisce la semicontinuità di J nella topologia $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ se i coefficienti a_{ij} sono continui, il teorema di Ioffe la garantisce se i coefficienti a_{ij} sono misurabili in x e continui in s e il Teorema 4 è applicabile se i coefficienti a_{ij} hanno la seguente proprietà:

(P) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \mathrm{K} \subseteq \Omega$ compatto t.c. $\mathrm{mis}(\Omega - \mathrm{K}) < \varepsilon$ e le funzioni $a_{ij}(\cdot, s) : \mathrm{K} \to \mathbf{R}$ sono continue per $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$.

La (P) è verificata sia nei casi previsti dai teoremi precedenti, sia nel caso banale in cui i coefficienti a_{ij} sono continui in x, sia nel caso in cui

$$a_{ij}(x, s) = p_{ij}(x)\, \lambda_{ij}(s) \qquad \forall (x, s) \in \Omega \times \mathbf{R}$$

con le funzioni p_{ij}, λ_{ij} misurabili.

§ 3. Alcuni controesempi

L'impossibilità di sopprimere alcune ipotesi dei Teoremi precedenti è illustrata dai seguenti controesempi.

Esempio 1. La distinzione fatta nel Teorema 4 tra il caso in cui $n = 1$ ed il caso in cui $n > 1$ è necessaria; è infatti possibile trovare una funzione continua $\omega :]0\,, 1[\times]0\,, 1[\to [0\,, 1]^2$ tale che il funzionale

$$\mathrm{F}(u) = \int_{\Omega} |\langle \omega(x)\,, \mathrm{D}u \rangle|\, \mathrm{d}x \qquad u \in \mathrm{W}^{1,1}(\Omega)$$

non è $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ s.c.i. (cfr. [2], [8]), con $\Omega =]0\,, 1[^2$.

ESEMPIO 2. Un semplice controesempio (cfr. [1]) mostra che se nel Teorema 4 si lascia cadere l'ipotesi (c'), allora il funzionale F, dato dalla (1), non è necessariamente semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza w — — $BV_{loc}(\Omega)$.

La funzione che realizza il controesempio è del tipo

$$f(x, p) = I_C(x) \, |p|^2 \qquad (x, p) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$

dove C è un opportuno insieme chiuso dell'intervallo $]0, 1[$ e I_C è la funzione caratteristica dell'insieme C.

ESEMPIO 3. Il Teorema 4, privo dell'ipotesi (c), è falso; è sufficiente considerare la funzione

$$I_\Delta(x, s) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = s \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad (x, s) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$

ed il funzionale

$$F(u) = \int_{]0,1[} I_\Delta(x, u) \, |Du| \, dx \qquad u \in W^{1,1}(]0,1[)$$

che, come si verifica facilmente, non è w — $W^{1,1}_{loc}(]0, 1[)$ s.s.c.i.

ESEMPIO 4. I Teoremi 3, 4, 5, 6 non possono essere estesi al caso vettoriale, come mostra il seguente controesempio.

Sia $\Omega =]0, 1[$, $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \Omega, y = 0\}$ e $f : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to [0, + + \infty[$ la funzione $f(s, p) = I_C(s) \, |p|$.

È facile verificare che il funzionale

$$F(u) = \int_\Omega f(u, Du) \, dx \qquad u \in W^{1,1}(\Omega; \mathbf{R}^2)$$

non è w — $W^{1,1}(\Omega; \mathbf{R}^2)$ s.s.c.i.; basta ad esempio considerare le funzioni

$$u_h(x) = (x, 1/(h+1)) \qquad x \in \Omega, \, h \in \mathbf{N}$$

$$u_\infty(x) = (x, 0) \qquad x \in \Omega.$$

ESEMPIO 5. Le ipotesi (d), (d)' nei Teoremi 5 e 6 non possono essere eliminate. Sia infatti $\Omega =]0, 1[$ e, se $h \in \mathbf{N}$, $h \geq 1$, definiamo

$$c_h = h(h+1) \; ; \; A_h = \{s \in \mathbf{R} \mid 1/(h+1) < s < 1/h\}$$

$$\Omega_k^h = [2k/c_h, (2k+2)/c_h] \qquad 0 \leq k < c_h/2.$$

Siano $\psi_h : \overline{\Omega} \times A_h \to \mathbf{R}$, $\omega : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ le seguenti funzioni

$$\psi_h(x, s) = [(1/c_h - |x - (2k+1)/c_h|)((2k+1)/c_h - x)]/[(s - 1/(h+1))(1/h - s)] \quad \text{se } x \in \Omega_k^h$$

$$\omega(x, s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \leq 0 \text{ o } s \geq 1 \text{ o } s = 1/h \text{ per qualche } h \in \mathbf{N},\ h \geq 1 \\ (-1 \vee \psi_h(x, s)) \wedge 1 & \text{se } s \in A_h . \end{cases}$$

Non è difficile vedere che per ogni $s \in A_h$ la funzione $\psi_h(\cdot, s)$ è continua in $\overline{\Omega}$. Definiamo ora la funzione

$$f(x, s, p) = |\omega(x, s)p - 1| \qquad (x, s, p) \in \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} .$$

È facile verificare che la funzione f soddisfa tutte le ipotesi del Teorema 6, eccetto la $(d)'$ (ii); si ha infatti

$$\overline{\partial} f(x, s, 0) = \{-\omega(x, s)\} \qquad \forall (x, s) \in \Omega \times \mathbf{R}$$

e le funzioni $\{\omega(\cdot, s)\}_{s \in \mathbf{R}}$ non sono equicontinue.

Le funzioni

$$u_h(x) = \begin{cases} 1/(h+1) + (x - 2k/c_h) & \text{se } x \in [2k/c_h, (2k+1)/c_h] \\ 1/h - (x - (2k+1)/c_h) & \text{se } x \in [(2k+1)/c_h, (2k+2)/c_h] \end{cases} \qquad 0 \leq k < c_h/2$$

convergono debolmente a zero in $W^{1,1}(\Omega)$ (vedi figura) e si vede che

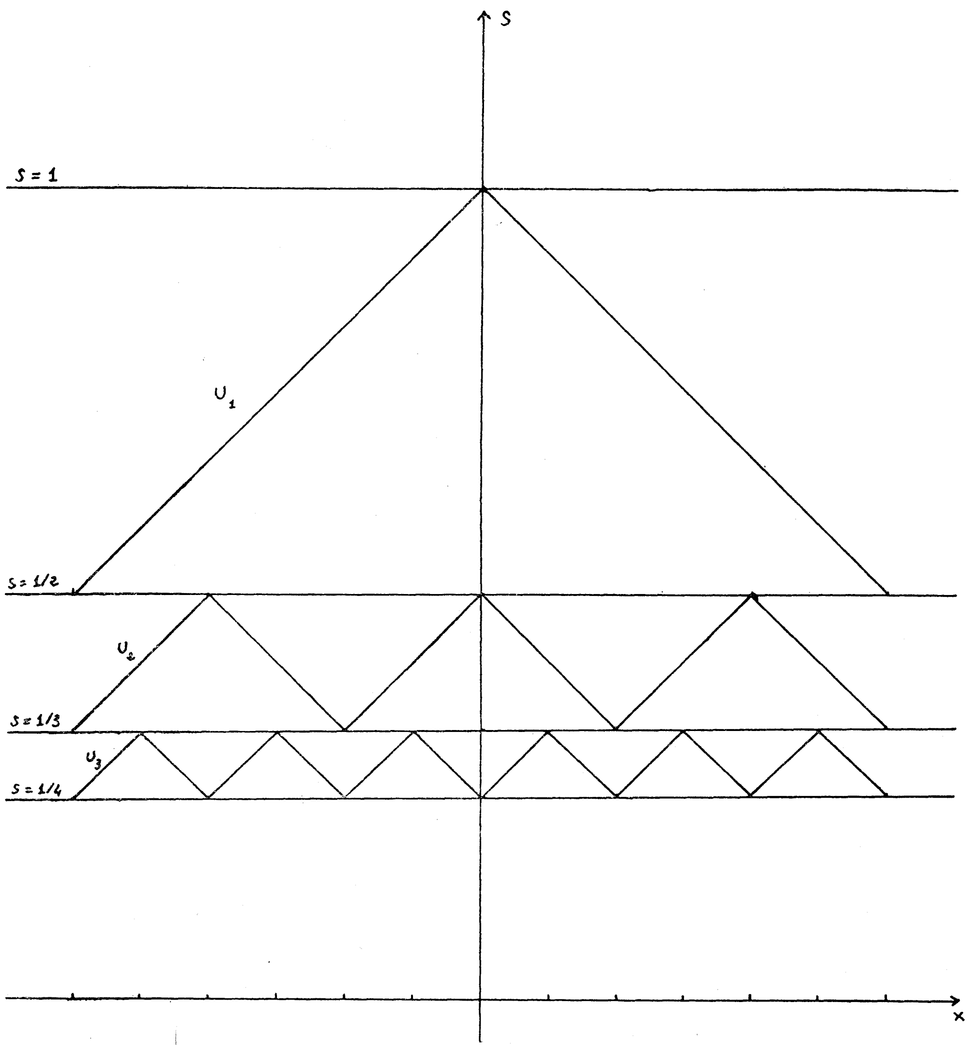
$$f(x, u_h(x), u_h'(x)) = 0 \qquad \text{per } q.o. x \in \Omega,\ h \in \mathbf{N}, h \geq 1 .$$

Se F è il funzionale definito dalla (1), si ha

$$F(O) = 1 > \liminf_h F(u_h) = 0$$

e quindi F non è $w - W^{1,1}(\Omega)$ s.s.c.i..

Ringrazio il Prof. E. De Giorgi, G. Buttazzo e G. Dal Maso per i loro utili suggerimenti.



BIBLIOGRAFIA

[1] L. CARBONE e C. SBORDONE (1979) – *Some properties of Γ–limits of integral functionals*, « Ann. Mat. Pura Appl. », (4), *122*, 1-60.

[2] G. DAL MASO (1980) – *Integral rapresentation on* BV (Ω) *of Γ–limits of variational integrals*, « Manuscripta Math. », *30*, 387-413.

[3] E. DE GIORGI, G. BUTTAZZO e G. DAL MASO (1983) – *On the lower semicontinuity of certain integral functionals*, « Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Mat. Fis. Natur. », (8), *74*, 274-282.

[4] I. EKELAND e R. TEMAM (1976) – *Convex analysis and variational problems*, North Holland, Amsterdam.

[5] A.D. IOFFE (1977) – *On lower semicontinuity of integral functionals*, I, « SIAM J. Cont. Optim. », *15*, 521-538.

[6] A.D. IOFFE (1977) – *On lower semicontinuity of integral functionals*, II, « SIAM J. Cont. Optim. », *15*, 991-1000.

[7] C.B. MORREY (1966) – *Multiple integrals in the calculus of variations*, Springer Verlag, Berlin.

[8] C. PAUC (1941) – *La mèthode metrique en calculus des variations*, Hermann, Paris.

[9] J. SERRIN (1961) – *On the definition and properties of certain variational integrals*, « Trans. Amer. Math. Soc. », *101*, 139-167.