Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Vincenzo M. Tortorelli

Γ Limiti e analisi non standard

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **79** (1985), n.5, p. 75–81.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1985_8_79_5_75_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1985.

Analisi matematica. — Γ *Limiti e analisi non standard.* Nota [(*)] di VINCENZO M. TORTORELLI, presentata dal Corrisp. E. DE GIORGI.

SUMMARY. — In this note we give a nonstandard characterization of multiple topological Γ operators as sup-min of standard part map.

INTRODUZIONE

Questa Nota riguarda una caratterizzazione, nell'ambito dell'analisi non standard, dei Γ limiti di funzioni di più variabili.

I risultati ottenuti vogliono essere un primo passo per un'applicazione dell'analisi non standard, introdotta da A. Robinson a fondamento di un corretto concetto di infinitesimo, cfr. [R], alla teoria degli operatori di tipo G e della Γ convergenza, proposta da E. De Giorgi e T. Franzoni, cfr. [DGF], [DG], quale teoria di sintesi per trattare i diversi concetti di limite sviluppatisi negli ultimi anni in diversi campi dell'analisi matematica, come il calcolo delle variazioni, la teoria dei controlli, la teoria delle equazioni differenziali, ecc. . . .

La Nota si suddivide in due parti. Nel primo paragrafo e in parte del secondo, sono richiamati i fondamenti e le nozioni classiche di analisi non standard, utilizzate per ottenere i risultati di rappresentazione presentati nel secondo e nel terzo paragrafo. Nel quarto paragrafo si mostra un'applicazione.

§ 1. PRELIMINARI

Un ambiente sufficientemente ampio in cui svolgere le abituali operazioni dell'analisi matematica può essere definito come segue.

Sia A_0 un opportuno insieme di atomi [(1)], almeno contenente i numeri reali estesi, $\overline{\mathbf{R}}$. Definiamo per ogni numero naturale $n : A_{n+1} = P(A_n \cup A_0)$; e quindi la struttura « base »: $A = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$.

Ammettendo assiomi di libera costruzione, del tipo di quelli introdotti da

(*) Pervenuta all'Accademia il 31 ottobre 1985.

(1) Con atomi intendiamo enti distinti dall'insieme vuoto ma considerati privi di elementi.

M. Boffa in [B], o da M. Forti e F. Honsell in [FoH], si ottiene la seguente versione [2] del classico teorema di esistenza di modelli non standard, cfr. [T 1].

TEOREMA 1.1. *Sia k un cardinale più che numerabile; esiste allora una collezione $\overline{\mathrm{M}}$, transitiva,* i.e. $x \in \overline{\mathrm{M}} \rightarrow x \subset \overline{\mathrm{M}}$, *a meno di atomi, ed esiste un'immersione* $* : \mathrm{A} \rightarrowtail \overline{\mathrm{M}}$ *tali che*

1) *Per ogni* $a \in \mathrm{A}_0$ *si ha* $*a = a$.

2) *Ogni formula in cui compaiono solo elementi di* A, *e in cui le variabili siano considerate vincolate in* A, *è vera se, e solo se, è vera la formula* [3] *ottenuta sostituendo agli elementi di* A *i loro valori in* $\overline{\mathrm{M}}$ *tramite* $*$, *e intendendo le variabili vincolate in* $\overline{\mathrm{M}}$; (*elementare equivalenza*).

3) *Esiste* $z \in \overline{\mathrm{M}}$ *tale che*: $z \in {}^*\overline{\mathbf{R}}$, $z \;{}^*\!\!< {}^*(+\infty)$ *e per ogni* $x \in \mathbf{R}$ ${}^*x \;{}^*\!\!< z$.

4) *Per ogni elemento* x *di* $\overline{\mathrm{M}} \setminus {}^*\mathrm{A}_0$, *e per ogni sottoinsieme* G *di* $\mathrm{P}(x) \cap \overline{\mathrm{M}}$, *la cui cardinalità sia minore o uguale di* k *si ha*:

G *ha la proprietà dell'intersezione finita se, e solo se* $\bigcap \mathrm{G} \neq \varnothing$; ($k^+$–S–*saturazione*).

Si osservi che la condizione 3) è un caso particolare della 4).

Tra le conseguenze più significative si ha, dato $a \in \mathrm{A} \setminus \mathrm{A}_0$, a è finito se, e solo se, $*a = \widehat{*}a$ [4] $= \{*x : x \in a\}$ se e solo se, $\widehat{*}a \in \overline{\mathrm{M}}$. In generale $\widehat{*}a \subset *a$, $\widehat{*}a \subset \overline{\mathrm{M}}$.

In un tale modello non standard è opportuna una distinzione tra i vari suoi elementi e sottoinsiemi.

DEFINIZIONE 1.1. *Se* $x \in \overline{\mathrm{M}}$, x *sarà detto elemento o insieme* interno. *Se* $x = *a$, *per qualche* $a \in \mathrm{A}$, *sarà detto* standard. *Un sottoinsieme di* $\overline{\mathrm{M}}$, *non appartenente ad* $\overline{\mathrm{M}}$, *sarà detto insieme* esterno.

Nel seguito intenderemo, riferendoci ad $\overline{\mathrm{M}}$, un modello k^+–S–saturato con $k \geq \mathrm{card}\,\mathrm{A}$, e $\mathrm{card}\,\overline{\mathrm{M}} = 2^k$.

Molti dei risultati ottenuti rimangono validi anche con modelli più deboli.

(2) Nei vari enunciati originali del Teorema, cfr. [SL], [RZ], [Z] . . . , gli Autori sostituiscono alla condizione 2) una condizione più debole. Questo, sia per un diverso approccio alla teoria, sia perché in vece di assiomi di libera costruzione viene adottato l'assioma di regolarità che rende incompatibili le condizioni 3) e 2), cfr. [T 2]. La dimostrazione del Teorema 1.1 deriva, comunque, pur con qualche semplificazione, da quelle preesistenti basate su una costruzione mediante ultrapotenze.

(3) Una tale formula potremo denominarla $*(\phi)$, se ϕ è la formula data.

(4) In generale indicheremo con $\widehat{g}(\mathrm{B})$ l'immagine di un insieme B tramite la funzione g.

§ 2. La nozione di ultravicino

Grazie alla proprietà 3), abbiamo la garanzia di elementi infiniti in $^*\mathbf{R}$. Essendo per elementare equivalenza $^*\mathbf{R}$ un corpo, se z è un infinito esiste $\frac{1}{z}$ e $\left|\frac{1}{z}\right| {}^* < \frac{1}{n}$, per ogni numero n in $\mathbf{N}$.

Un tale reale non standard sarà detto infinitesimo, e scriveremo $1/z \sim 0$.
Si ha la seguente definizione:

DEFINIZIONE 2.1. *Un elemento y di $^*\mathbf{R}$ si dice ultravicino a $^*x$, con x elemento di $\mathbf{R}$, se, e solo se, $|y - {}^*x|$ è infinitesimo.*

Volendo estendere questa definizione a $^*\overline{\mathbf{R}}$, si potrà dire che $y \in {}^*\overline{\mathbf{R}}$ è ultravicino a $x \in {}^*\overline{\mathbf{R}}$ se, e solo se $y \in \bigcap \{{}^*\mathrm{U} : \mathrm{U}$ intorno di $x\}$.

Ne segue la definizione generale di ultravicinanza in spazi topologici.

DEFINIZIONE 2.2. *Sia (X, τ) uno spazio topologico in A. È definita la relazione binaria di τ–ultravicinanza tra elementi di $^*\mathrm{X}$ ed elementi di $\widehat{^*\mathrm{X}}$ come segue $y \underset{\tau}{\sim} {}^*x$ se, e solo se, $\tau \in \bigcap \{{}^*\mathrm{V} : x \in \mathrm{V} \in \tau\}$.*

Il dominio di $\underset{\tau}{\sim}$ viene indicato con $uv\,({}^*\mathrm{X})$.

Si noti che: $^*x \underset{\tau}{\sim} {}^*x$; $^*y \underset{\tau}{\sim} {}^*x$ se, e solo se, $x \in \overline{\{y\}}$. Le principali nozioni di topologia sono così caratterizzate:

TEOREMA 2.1. *Se B è un sottoinsieme di X si ha: B è chiuso se, e solo se, $\forall x \in \mathrm{X}$ se $\exists y \in {}^*\mathrm{B}\ y \underset{\tau}{\sim} {}^*x$ allora $x \in \mathrm{B}$. B è aperto se, e solo se, $\forall y \in {}^*\mathrm{B}$ $\bigcap \{{}^*\mathrm{V} : y \in {}^*\mathrm{V}, \mathrm{V} \in \tau\} \subset \mathrm{B}$. X è compatto se, e solo se, $uv\,({}^*\mathrm{X}) = {}^*\mathrm{X}$.*

DEFINIZIONE 2.3. *Sia H un qualsiasi sottoinsieme di $^*\mathrm{X}$, definiamo τ-ombra di H, l'insieme:*

$$\delta_\tau\,(\mathrm{H}) = \{x \in \mathrm{X} : \exists h \in \mathrm{H}\ h \underset{\tau}{\sim} {}^*x\}\,.$$

Come notazione useremo la seguente: $\delta\,(\{y\}) = \{x\}$ se, e solo se, $\delta\,(y) = x$. Nel caso in cui (X, τ) sia di Hansdorff è ben definita una funzione f da $uv\,({}^*\mathrm{X})$ in X, tale che: $f(y) = \delta\,(y)$.

TEOREMA 2.2. *Se B è un sottoinsieme di X si ha $\delta\,({}^*\mathrm{B}) = \overline{\mathrm{B}}$. In generale se C è un sottoinsieme di $^*\mathrm{X}$, che sia l'intersezione di al più K insiemi interni, allora $\delta\,(\mathrm{C})$ è chiuso.*

COROLLARIO 2.1. *Sia $\mathscr{E}$ la topologia su $\overline{\mathbf{R}}$ indotta da quella euclidea. Si ha che $\delta_{\mathscr{E}}$ è un omomorfismo tra i reticoli $({}^*\overline{\mathbf{R}}, {}^*\leq)$ e $(\overline{\mathbf{R}}, \leq)$, ed è $^*\mathscr{P}(\overline{\mathbf{R}}) - \mathscr{P}(\overline{\mathbf{R}})$ completo, i.e.: se $\mathrm{B} \in {}^*\mathscr{P}(\overline{\mathbf{R}})$ $\delta\,(\sup \mathrm{B}) = \sup \delta\,(\mathrm{B}) = \max \delta\,(\mathrm{B})$, e $\delta\,(\inf \mathrm{B}) =$*

$= \inf \delta(\mathrm{B}) = \min \delta(\mathrm{B})$. *Inoltre quando ambo i membri hanno senso, si ha:* $\delta(a + b) = \delta(a) + \delta(b)$ *e* $\delta(a\,b) = \delta(a)\,\delta(b)$.

Il primo risultato che ne segue è la caratterizzazione dell'operatore di minimolimite, che indicheremo con $\Gamma(\mathrm{X}^-)$ seguendo le notazioni proposte in [DG].

TEOREMA 2.3. *Sia* x_0 *un elemento di* X *e* f *una funzione da* X *in* $\overline{\mathbf{R}}$; *si ha allora*:

$$(\Gamma(\mathrm{X}^-)f)(x_0) = \min_{\xi \underset{\tau}{\sim} {}^*x_0} \delta({}^*f(\xi))$$

COROLLARIO 2.2. *Se* V *è uno* * *intorno di* $^*x_0$ *i cui punti sono tutti ultravicini a* $^*x_0$, *si ha*:

$$(\Gamma(\mathrm{X}^-)f)(x_0) = \min_{\mathrm{V}} \delta^*f$$

Le ipotesi: « x_0 standard » e « f standard », sono necessarie come mostrano i seguenti esempi.

ESEMPIO 2.1.

Sia g da $^*\mathbf{R}$ in $^*\mathbf{R}$: $g(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-\varepsilon, \varepsilon] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$, con ε

infinitesimo, ovvero $\varepsilon \sim {}^*0$.

Si ha che $(\min\lim_{\xi \to 0}) g = 1$, mentre $\min_{\xi \sim 0} g = 0$.

ESEMPIO 2.2. Sia $\mathrm{X} = (0, 1)$, ed f così definita:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } n > 1 \text{ e } x \in (1/n - 1/2\,n^n;\ 1/n + 1/2\,n^n) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sia quindi $\nu \in {}^*\mathbf{N} \setminus \widehat{{}^*\mathbf{N}}$ un « numero naturale infinito ». Si ha:

$$^*(\min\lim_{z \to 1/\nu})\, {}^*f = 1\,, \quad \text{mentre} \quad \min_{z \sim 1/\nu} \delta^*f = 0\,.$$

La corretta generalizzazione del teorema è quindi enunciata nella seguente:

PROPOSIZIONE 2.2. *Sia* Y *un elemento di* A, F *un filtro di sottoinsiemi interni di* $^*\mathrm{Y}$, *di cardinalità minore di* k. *Se* $g \in {}^*(\overline{\mathbf{R}}^{\mathrm{Y}})$ *allora si ha*:

$$\min_{\cap \mathrm{F}} \delta g = \sup_{\mathrm{E} \in \mathrm{F}} \min_{\mathrm{E}} \delta g\,.$$

Nel caso in cui $\mathrm{X} = \mathrm{Y}$, $\mathrm{F} = \{{}^*\mathrm{V} : y \in {}^*\mathrm{V},\ \mathrm{V} \in \tau\}$, *con* y *elemento di* $^*\mathrm{X}$ *si ha*:

$$\min_{\cap \mathrm{F}} \delta g = \sup_{^*\mathrm{U} \in \mathrm{F}} \min_{^*\mathrm{U}} \delta g\,.$$

Se ne deduce in generale che: $\delta\,(*\,(\min\lim)\,g) \geq \min\limits_{\cap \mathrm{F}} \delta\, g$.

Risultati analoghi valgono per l'operatore di massimolimite $\Gamma\,(\mathrm{X}^{+})$.

§ 3.

Cercheremo ora di estendere il risultato ottenuto nel Teorema 2.1. a Γ operatori multipli. Se $(\mathrm{X}\,,\tau)$ è uno spazio topologico in A, con $\mathscr{I}_x^\tau$ indicheremo il sistema fondamentale di intorni di x elemento di X, $\{\mathrm{V} \in \tau : x \in \mathrm{V}\}$; con $\mathscr{I}_y^{*\tau}$ lo *(sistema fondamentale di intorni) di y in *X, $\{\mathrm{V} \in {}^*\tau : y \in \mathrm{V}\}$; con $\mathscr{F}_y^\tau$ il filtro $\{{}^*\mathrm{V} : \mathrm{V} \in \tau\,,\ y \in {}^*\mathrm{V}\}$.

Ricordiamo la definizione di Γ limite, cfr. [DG]:

DEFINIZIONE 3.1. *Siano* $(\mathrm{X}_i\,,\tau_i)$ *spazi topologici in* A, *con* i *che varia da* 1 *a* n. *Siano* E_i *rispettivi sottoinsiemi, ed* f *una funzione da* $\mathrm{E}_1 \times \ldots \times \mathrm{E}_n$ *in* $\overline{\mathbf{R}}$.

$$(\Gamma\,(\mathrm{E}_1^{\alpha_1}\,..\,\mathrm{E}_n^{\alpha_n})\,f)\,(x_1\ldots x_n) = \operatorname*{ext}^{-\alpha_n}_{\mathscr{I}_{x_n}^{\tau_n}} \;\ldots\; \operatorname*{ext}^{-\alpha_1}_{\mathscr{I}_{x_1}^{\tau_1}} \operatorname*{ext}^{\alpha_1}_{\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{E}_1} \ldots\ldots \operatorname*{ext}^{\alpha_n}_{\mathrm{U}_n \cap \mathrm{E}_n} f\,;$$

ove: α_i *è o* $+$, *o* $-$; $\mathrm{ext}^{+} = \sup$, $\mathrm{ext}^{-} = \inf$, $\overline{\mathrm{ext}}^{+} = \max$, $\overline{\mathrm{ext}}^{-} = \min$.

LEMMA 3.1. *Siano* $\mathrm{Y}_1\ldots\mathrm{Y}_n$ *elementi di* A *e* $\mathrm{M}_i \subset {}^*\mathrm{Y}_i$ *siano o intersezioni di standard o sottoinsiemi interni.*

Se $g \in {}^*(\overline{\mathbf{R}}^{\mathrm{Y}_1 \times \ldots \mathrm{Y}_n})$, *allora esistono* $y_1 \in \mathrm{M}_1\ldots y_n \in \mathrm{M}_n$ *tali che*:

$$\operatorname*{ext}^{\alpha_1}_{y_1 \in \mathrm{M}_1} \ldots \operatorname*{\overline{ext}}^{\alpha_n}_{y_n \in \mathrm{M}_n} \delta g\,(y_1\ldots y_n) = \delta g\,(\bar{y}_1\ldots\bar{y}_n)\,.$$

COROLLARIO 3.1.

Se $\mathrm{B} \in {}^*\mathscr{P}\,(\mathrm{Y}_1 \times \ldots \times \mathrm{Y}_n)$, *si ha*:

$$\delta\,(\operatorname*{ext}^{\alpha_1}_{y_1} \ldots \operatorname*{ext}^{\alpha_n}_{y_n} {}_{(y_1\ldots y_n) \in \mathrm{B}}\; g) = \overline{\mathrm{ext}}^{\alpha_1} \ldots \operatorname*{\overline{ext}}^{\alpha_n}_{\mathrm{B}} \delta g\,.$$

Il passo successivo è la rappresentazione dei Γ operatori per funzioni di due variabili.

LEMMA 3.2. *Siano* $(\mathrm{X}\,,\tau)$ e $(\mathrm{Y}\,,\sigma)$ *due spazi topologici in* A, $(x\,,y) \in {}^*\mathrm{X} \times {}^*\mathrm{Y}$, e $g \in {}^*(\overline{\mathbf{R}}^{\mathrm{X}\times\mathrm{Y}})$; *allora*:

$$\operatorname*{ext}^{-\beta}_{\mathscr{F}_y^\sigma} \operatorname*{ext}^{-\alpha}_{\mathscr{F}_x^\tau} \operatorname*{\overline{ext}}^{\alpha}_{*\mathrm{U}} \operatorname*{\overline{ext}}^{\beta}_{*\mathrm{V}} \delta g = \operatorname*{ext}^{\alpha}_{\cap \mathscr{F}_x^\tau} \operatorname*{\overline{ext}}^{\beta}_{\cap \mathscr{F}_y^\sigma} \delta g\,.$$

Ne deriva il seguente teorema:

TEOREMA 3.1. *Siano* (X, τ), (Y, σ) *spazi topologici in* A, $(x_0, y_0) \in X \times Y$ *e* $f \in \mathbf{R}^{X \times Y}$; *allora si ha*:

$$(\Gamma(X^{\alpha}, Y^{\beta}) f)(x_0 y_0) = \underset{\xi \underset{\tau}{\sim} {}^* x_0}{\mathrm{ext}^{\alpha}} \; \underset{\eta \underset{\sigma}{\sim} {}^* y_0}{\overline{\mathrm{ext}}^{\beta}} \; \delta \circ {}^* f .$$

Resta aperto il problema della validità di formule simili anche per i Γ limiti di funzioni con più di due variabili.

Nel caso ciò non fosse, sarebbe opportuno studiare, oltre agli usuali Γ operatori, i seguenti:

DEFINIZIONE 3.2. *Siano* $(X_1, \tau_1) \dots (X_n, \tau_n)$ *spazi topologici in* A, *sia* $(x_1 \dots x_n)$ *un elemento del loro prodotto cartesiano, e* f *una funzione da esso in* $\overline{\mathbf{R}}$; *definiamo*:

$$(\gamma(X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}) f)(x_1 \dots x_n) = \underset{\xi_1 \sim {}^* x_1}{\mathrm{ext}^{\alpha_1}} \dots \underset{\xi_n \sim {}^* x_n}{\overline{\mathrm{ext}}^{\alpha_n}} \; \delta \circ {}^* f .$$

Si sono finora dimostrate solo diseguaglianze del tipo $\gamma(X_1^+, X_2^-, X_3^+) f \leq \Gamma(X_1^+, X_2^-, X_3^+) f$.

§ 4.

In questo paragrafo si mostra come da un riesame di una dimostrazione standard di un enunciato noto, si sia dedotta un'ipotesi piú debole ed espressiva.

DEFINIZIONE 4.1. (cfr. [DGF], Definizione 4.1).

Siano d *e* σ *due distanze estese su di un insieme* X. *Esse si dicono compatibili se*:

$$\exists c > 0 \qquad \forall x, y, z \in X \qquad \exists t \in X:$$

$$\text{(i)} \quad d(t, y) \leq d(x, z) + c \min(d(x, z); \sigma(x, y))$$

$$\text{(ii)} \quad \sigma(t, z) \leq \sigma(x, y) + c \min(d(x, z); \sigma(x, y)) .$$

Il numero c *si dirà costante di compatibilità tra* d *e* σ, *e* t *si dirà* (c, d, σ)-*simmetrico di* x *rispetto a* (y, z).

PROPOSIZIONE 4.1. (Cfr. [DGF], Teorema 4.2).

Siano d *e* σ *distanze compatibili su* X, *e sia* $\{f_n\}$ *una successione di funzioni* d–*equilipshitziane* (*questo sta per*:

$$\exists K > 0 \; \forall x, y \; | f_n(x) - f_n(y) | \leq d(x, y) \; \forall n \in \mathbf{N}) .$$

Allora anche $\Gamma(\bar{\mathrm{N}}^{+}, \mathrm{X}_{\sigma}^{-}) f = f'$ *e* $\Gamma(\bar{\mathrm{N}}^{-}, \mathrm{X}_{\sigma}^{-}) f = f''$ *sono* d-*lipshitziane, con la stessa costante.*

La tesi segue anche sostituendo la compatibilità con la seguente condizione:

$$(*)\quad \forall x, y \in \mathrm{X} \quad \forall \bar{y} \underset{\sigma}{\sim} {}^*y \quad \exists t \underset{\sigma}{\sim} {}^*x : \delta\, {}^*\mathrm{d}(t, \bar{y}) \leq \mathrm{d}(x, y).$$

Si osservi che tale condizione, più debole della compatibilità e di per sé più espressiva, permette anche di sostituire nell'enunciato della Proposizione 4.1, la distanza σ con una topologia su X.

Ringraziamenti. Ringrazio il Dott. F. Honsell, il Prof. T. Franzoni, il Prof. M. Forti, il Prof. E. De Giorgi, per gli utili colloqui.

A lavoro ultimato, l'autore ha rilevato che, in un contesto più generale, K. Čuda ha dimostrato asserti molto simili alla Proposizione 2.2 e al Lemma 3.2 qui enunciati.

Cfr. Teorema 2, Teorema 3 § 2; Teorema 1 § 3 in

[Č] KAREL ČUDA, *The relation between* ε-δ *procedures and the infinitely small in non standard methods*, in « L.N.M. », *619*, 143-152, (Springer).

BIBLIOGRAFIA

[B] M. BOFFA (1969) – *Sur la Teorie des Ensemble sans Axiome de Fondament*, « Bull. de la S.M. de Belgique », *21* (1).

[DG] E. DE GIORGI (1977) – Γ-*Convergenza e* G-*Convergenza*, « B.U.M.I. », (5) *14-A*, 213-220.

[DGF] E. DE GIORGI e T. FRANZONI (1979) – *Su un tipo di convergenza variazionale*, « Rend. Sem. Mat., Brescia », *3*, 63-101.

[FoH] M. FORTI e F. HONSELL – *Set theory with free Construction Principles*, « Ann. S.N.S. Pisa », C. Sc., Ser. IV, Vol. X, 3 (1983).

[L] W.A.I. LUXEMBURG (1969) – *A General Theory of Monads*, in « Application of Model Theory to Algebra, Analysis, and Probability », ed. by W.A.I. Luxemburg, (Holt-Rinehart and Winston).

[R] A. ROBINSON (1966) – *Non Standard Analysis*, (North-Holland).

[RZ] A. ROBINSON e E. ZAKON (1969) – *A Set Theoretical characterization of Enlargements*, in « Application of . . . », ed. by W.A.I. Luxemburg, (Holt-Rinehart and Winston).

[SL] K.D. STROYAN e W.A.I. LUXEMBURG (1976) – *Introduction to the Theory of Infinitesimals*, (Academic Press).

[T1] V.M. TORTORELLI (1983) – Γ *limiti e analisi non standard*, Tesi di Laurea, Pisa, Ottobre 1983.

[T2] V.M. TORTORELLI (1984) – *A characterization of internal sets*, Quaderni del Dipartimento di Matematica « L. Tonelli », Pisa, *88*.

[Z] E. ZAKON (1970) – *A new Variant of non Standard Analysis*, « L.N.M. », *369* (Springer).