Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Bruno Franchi, Ermanno Lanconelli, James Serrin

Esistenza e unicità degli stati fondamentali per equazioni ellittiche quasilineari

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **79** (1985), n.5, p. 121–126.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1985_8_79_5_121_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1985.

Equazioni a derivate parziali. — *Esistenza e unicità degli stati fondamentali per equazioni ellittiche quasilineari* (*). Nota di BRUNO FRANCHI (**), ERMANNO LANCONELLI (**) e JAMES SERRIN (***), presentata (****) dal Socio G. FICHERA.

SUMMARY. — In this paper we describe some existence and uniqueness theorems for radial ground states of a class of quasilinear elliptic equations. In particular, the mean curvature operator and the degenerate Laplace operator are considered.

1. Consideriamo in $\mathbf{R}^n$ l'equazione quasilineare

$$\operatorname{div}(A(|Du|)Du) + f(u) = 0; \tag{1.1}$$

chiameremo *stato fondamentale* di (1.1) una soluzione classica dell'equazione, positiva e infinitesima all'infinito.

In questa Nota presenteremo alcuni risultati di esistenza e di unicità degli stati fondamentali a *simmetria radiale* per (1.1).

Ricordiamo che nel caso semilineare ($A \equiv 1$), se f ha un buon comportamento vicino a zero, gli stati fondamentali di (1.1) sono necessariamente a simmetria radiale ([GNN]). Un analogo risultato vale anche nel caso quasilineare in situazioni significative (ad esempio: equazione di tipo curvatura media assegnata).

Le dimostrazioni complete dei teoremi di esistenza e unicità (insieme con uno studio più completo del comportamento asintotico delle soluzioni) verrà pubblicato successivamente ([FLS]).

I risultati che esporremo si applicano in particolare al Laplaciano degenere ($A(|p|) = |p|^{m-2}$, $1 < m \leq 2$) e all'operatore della curvatura media ($A(|p|) = (1 + p^2)^{-1/2}$, o, più in generale, $A(p) = (1 + p^2)^{-m/2}$, $0 \leq m \leq 1$). Nel caso semilineare analoghi risultati sono stati ottenuti in [BLP], [BL] (cui rimandiamo per una più completa bibliografia sull'esistenza), [PS_1] e [PS_2].

(*) Con il contributo del G.N.A.F.A. del C.N.R. e del Ministero P.I. (40% e 60%).
(**) Dipartimento di Matematica, Piazza di Porta S. Donato, 5 – 40127 Bologna, Italia.
(***) University of Minnesota, School of Mathematics, 206 Church Street S.E., Minneapolis, MN 55455, U.S.A.
(****) Nella seduta del 22 novembre 1985.

Essendo interessati alle soluzioni radiali di (1.a), ci si può ricondurre allo studio del problema

$$(*)\quad \begin{aligned} &(\mathrm{A}(|u'|)\,u')' + \frac{n-1}{r}\,\mathrm{A}(|u'|)\,u' + f(u) = 0\,, \quad r > 0\,; \\ &u > 0 \text{ se } r \geq 0;\ u'(0) = 0;\ u(r) \to 0 \textit{ per } r \to +\infty\,. \end{aligned}$$

Nel paragrafo 2 mostreremo alcune proprietà qualitative delle soluzioni classiche di (*), adattando sostanzialmente le tecniche di [PS_1] e di [PS_2].

Nel paragrafo 3 daremo condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di soluzioni nel caso unidimensionale e un corrispondente teorema di esistenza anche per dimensioni superiori. È inoltre possibile utilizzare l'approccio variazionale all'esistenza sviluppato, ad esempio in [BL].

Per un risultato in questa direzione per il Laplaciano degenere, si veda [C].

Nel paragrafo 4 stabiliremo il risultato fondamentale di unicità. Lo strumento essenziale è una nuova identità per le soluzioni $u = u(r)$ di (*) che, nel caso $\mathrm{A}(|p|) = (1+p^2)^{-1/2}$ diventa

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left\{r^{2(n-1)}\left(\frac{p^2}{1+p^2} + \frac{2\,\mathrm{F}(u)}{\sqrt{1+p^2}} - \mathrm{F}^2(u)\right)\right\}$$
$$= 2(n-1)\,r^{2n-3}\left(\frac{p^2+2}{\sqrt{1+p^2}} - \mathrm{F}(u)\right)\mathrm{F}(u)$$

e, nel caso $\mathrm{A}(|p|) = |p|^{m-2}$, $1 < m \leq 2$, diventa

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left\{r^{2(n-1)}\left(p^m + \frac{m}{m-1}\,\mathrm{F}(u)\right)^{2(m-1)/m}\right\}$$
$$= \frac{2m(n-1)}{m-1}\,r^{2n-3}\left(p^m + \frac{m}{m-1}\,\mathrm{F}(u)\right)^{(m-2)/m}\mathrm{F}(u)\,,$$

dove $p = |u'(r)|$ e $\mathrm{F}(u) = \int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Nel seguito diremo che una funzione reale u di classe C^1 su $[0,\infty)$ è soluzione dell'equazione in (*) se $w = \mathrm{A}(|u'|)\,u'$ è di classe C^1 su $[0,\infty)$ e, per $r > 0$,

$$w' + \frac{n-1}{r}\,w + f(u) = 0\,.$$

Cominciamo a precisare le ipotesi su f e su A; in questo paragrafo assumiamo dapprima

(H.1) *f è continua su* $[0, \infty)$, *localmente lipschitziana su* $(0, \infty)$, *e nulla in zero. Risulta inoltre* $\alpha = \inf \{u > 0;\ f(u) > 0\} > 0$.

(H.2) $A \in C^1((0, \infty))$, $A > 0$, $pA(p) \to 0$ *per* $p \to 0$. *Inoltre, posto* $E(p) = (p\,A(p))'$, *risulta* $E > 0$ *e* $\liminf_{p \to 0} E(p) > 0$.

Allora, se u è soluzione di (*), si ha:

$$\lim_{r \to \infty} r^{n-1} A(|u'(r)|)\, u'(r) = -\lambda, \quad \lambda \in \mathbf{R}, \quad \lambda \leq 0. \tag{2.1}$$

(2.2) *per ogni* r_0, $r_1 \geq 0$ *ritulta*

$$\int_{|u'(r_0)|}^{|u'(r_1)|} \rho\, E(\rho)\, d\rho + (n-1) \int_{r_0}^{r_1} A(|u'(\rho)|)\, u'^2(\rho) \frac{d\rho}{\rho} = F(u(r_0)) - F(u(r_1)).$$

Di qui si deduce che $\lim_{r \to \infty} u'(r) = 0$, che u *è strettamente decrescente* e che

$$(n-1) \int_0^\infty A(|u'(\rho)|)\, u'^2(\rho) \frac{d\rho}{\rho} = F(u(0)), \tag{2.3}$$

$$\int_0^{|u'(r)|} \rho E(\rho)\, d\rho + F(u(r)) = (n-1) \int_r^\infty A(|u'(\rho)|) \frac{u'^2(\rho)}{\rho}\, d\rho > 0. \tag{2.4}$$

In particolare allora, se $n > 1$, la seguente ipotesi è necessaria per l'esistenza di una soluzione di (*),

(H.3) *Esiste* $\delta > 0$ *tale che* $F(\delta) > 0$.

Poniamo $\beta = \inf \{u > 0;\ F(u) > 0\}$. *Pertanto, se* $n > 1$, *deve essere* $u(0) > \beta$. *Inoltre, se* (*) *ha soluzione è necessario che sia*

$$\max_{[0,\beta]} |F| < \int_0^\infty \rho E(\rho)\, d\rho. \tag{2.5}$$

Osserviamo che la condizione (2.4) è vuota nel caso del Laplaciano e del Laplaciano degenere, ma non lo è, ad esempio, per l'operatore della curvatura media.

Siano ora u e v due soluzioni distinte di (*); indichiamo rispettivamente con $r = r(u)$ e $s = s(u)$ le loro funzioni inverse e con r_u (s_u) la derivata di r (di s) rispetto a u. Con l'ulteriore ipotesi

$$\text{(H.4)} \qquad A' \leq 0 \ \ e \ \ p^{2-m} A(p) \to 1 \ \ per \ \ p \to 0 \,, \ 1 < m \leq 2 \,,$$

valgono i seguenti risultati di *separazione monotona*:

(2.6) *u e v si intersecano al più in un numero finito di punti;*

(2.7) *se $u > v$ in* $]R, \infty[$ *allora $r - s$ è positiva e strettamente decrescente in* $]0, v(R)[$; *inoltre $\lambda \geq \mu$, dove λ è definita in* (2.2) *e μ è l'analogo limite per v.*

3. Per quanto riguarda l'esistenza di soluzioni per il problema (*), consideriamo dapprima il caso $n = 1$.

In questa situazione, utilizzando il metodo « shooting » (cfr. [BLP] e [BL]) si può dare una condizione necessaria e sufficiente di esistenza; si può provare inoltre facilmente anche l'unicità.

TEOREMA I. *Sia $n = 1$. Supponiamo che valga* (H.2), *che f sia localmente lipschitziana su* $[0, \infty)$ *e $f(0) = 0$. Allora* (*) *ha una soluzione u se e solo se* $\beta_0 = \inf\{u > 0; F(u) \geq 0\}$ *esiste ed è positivo,* $f(\beta_0) > 0$ *e*

$$\max_{[0,\beta_0]} |F| < \int_0^\infty E(\rho)\, d\rho .$$

Tale soluzione è unica poichè $u(0) = \beta_0$.

Utilizzando questo risultato si può provare, anche quando $n > 1$, un teorema di esistenza.

Con le notazioni del Teorema I si ha

TEOREMA II. *Sia $n > 1$. Supponiamo*

(i) (H.2) *è soddisfatta;*

(ii) *f è localmente lipschitziana su* $[0, \infty)$ *e* $f(0) = 0$;

(iii) *β_0 esiste ed è positivo;*

(iv) *esiste* $\gamma \in (\beta_0, \infty]$ *tale che* $f(u) > 0$ *per* $\beta_0 \leq u < \gamma$, $f(\gamma) = 0$ *se* $\gamma < \infty$ *e*

$$\sup_{0<v<u<\gamma} (F(u) - F(v)) < \int_0^\infty \rho E(\rho)\, d\rho .$$

Allora il problema (*) *ha soluzione.*

4. Enunciamo il teorema di unicità nel caso $n > 1$.

TEOREMA III. *Sia* $n \geq \frac{3}{2}$. *Supponiamo soddisfatte* (H.1), (H.2), (H.3) (H.4). *Assumiamo inoltre*

(H.5) $A \in C^2((0, \infty))$ *e* $t \to A(\sqrt{t})^{-2}$

è concava. Infine supponiamo verificata una delle ipotesi seguenti

(H.6′) f *è decrescente su* $\{u > \beta; f(u) > 0\}$,

(H.6″) E/A *è decrescente*, $p^{2-m} E(p)$ *è crescente e* $(u - \beta)^{1-m} f(u)$, *è drecrescente su* $\{u > \beta; f(u) > 0\}$.

Allora il problema (*) *ha al più una soluzione.*

Ad esempio l'ipotesi (H.6′) è utilizzabile nel caso dell'equazione della curvatura media, mentre (H.6″) lo è per il Laplaciano degenere. Osserviamo anche che per il Laplaciano non degenere ($m = 2$), l'ipotesi (H.6″) coincide con la condizione (S) di [PS_1] e [PS_2].

La dimostrazione del Teorema III segue dai lemmi di separazione monotona (2.5)-(2.6) e dai seguenti fatti. (*a*) Due soluzioni distinte di (*) non possono intersecarsi sopra la «quota» β; (*b*) due soluzioni distinte di (*) non possono intersecarsi ad una quota minore o uguale a β.

La prova di (*a*) non utilizza l'ipotesi (H.5) e non si discosta troppo dalla corrispondente dimostrazione relativa al caso semilineare contenuta in [PS_1] e [PS_2]. La dimostrazione di *b*), che non richiede (H.6′) e (H.6″), utilizza invece una identità nuova. Denotiamo con $l(u, p)$ la funzione definita implicitamente dall'equazione

$$\int_l^p \rho E(\rho)\, d\rho + F(u) = 0$$

nell'aperto $\Omega = \{(u, p);\ 0 < u < \beta, p > 0, \int_0^p \rho E(\rho)\, d\rho + F(u) > 0\}$.

Poniamo inoltre $K(u, p) = 2(n-1) A(l) \{p^2 A(p) - l^2 A(l)\}$.

È evidente (cfr. (2.4)) che $0 < l(u, p) \leq p$ in Ω, e che, per H.2), $K(u, p) \geq 0$, col segno di uguaglianza se e solo se $F(u) = 0$, $l(u, p) = p$.

Allora, se $u = u(r)$ è soluzione di (*) e se $u(R) = U \leq \beta$ per un certo $R > 0$, risulta $(u(r), p(r)) \in \Omega$ se $r > R$ per (2.4) e

$$\frac{d}{dr}(r^{n-1} l A(l))^2 = -r^{2n-3} K(u, p) \tag{4.1}$$

per $r > \mathrm{R}$, dove $p = p(r) = |u'(r)|$ e $l = l(u(r), p(r))$.

Ora, se u e v sono due soluzioni distinte di (*) tali che $u(\mathrm{R}) = v(\mathrm{R}) = \mathrm{U} \leq \beta$, si arriva ad un assurdo scrivendo la (4.1) per u e per v, integrando su $[\mathrm{R}, \infty)$ e utilizzando il lemma di separazione monotona ed il fatto che

$$\frac{\partial}{\partial p}(\mathrm{K}(u, p)/p) \leq 0 \qquad \text{in} \quad \Omega . \tag{4.2}$$

Nella dimostrazione di (4.2) si usa in modo essenziale l'ipotesi (H.5).

Bibliografia

[BL] H. Berestycki e P.L. Lions (1983) – *Nonlinear Scalar Field equations,* I, « Arch. Rational Mech. Anal. », *82,* 313-345.

[BLP] H. Berestycki, P.L. Lions e L.A. Peletier (1981) – *An* ODE *Approach to the Existence of Positive Solutions for Semilinear Problems in* $\mathbf{R}^n$, « Indiana Univ. Math. J. », *30,* 141-157.

[C] G. Citti (1985) – *Positive Solutions for a Quasilinear Degenerate Elliptic Equation in* $\mathbf{R}^n$, Preprint.

[FLS] B. Franchi, E. Lanconelli e J. Serrin (1985) – *Existence and Uniqueness of Positive Solution of Quasilinear Equations in* $\mathbf{R}^n$, to appear.

[GNN] B. Gidas, W.M. Ni e L. Nirenberg (1981) – *Symmetry of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations in* $\mathbf{R}^n$, « Advances in Math. Studies », *7 A,* 369-402

[PS$_1$] L.A. Peletier e J. Serrin (1983) – *Uniqueness of Positive Solutions of Semilinear Equations in* $\mathbf{R}^n$, « Arch. Rational Mech. Anal. », *81,* 181-197.

[PS$_2$] L.A. Peletier e J. Serrin (1986) – *Uniqueness of Nonnegative Solutions of Semilinear Equations in* $\mathbf{R}^n$, « J. of Diff. Eq. », *61,* 380-397.