
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

CLAUDIO GIORGI

Sottopotenziali energia libera per l'isteresi meccanica

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 78 (1985), n.5, p. 218–230.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1985_8_78_5_218_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Fisica matematica. — *Sottopotenziali energia libera per l'isteresi meccanica* (*). Nota di CLAUDIO GIORGI (**), presentata (***) dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — This paper deals with free-energy lower-potentials for some rate-independent one-dimensional models of isothermal finite elastoplasticity proposed in [1]. Extending the thermodynamic arguments of Coleman and Owen [3] to large deformations, the existence, non-uniqueness and regularity of free-energy as function of state are deduced rather than assumed. This approach, along with some optimal control techniques, enables us to construct maximum and minimum free-energy functions and a wide class of differentiable potentials compatible with the given constitutive relations.

1. INTRODUZIONE

Con questa Nota intendo completare l'analisi dei sottopotenziali energia libera per un modello unidimensionale di materiale elasto-plastico proposto e studiato in un recente lavoro da B. Lazzari e da me [1]. In quel lavoro, oltre alla dimostrazione di alcune proprietà generali, viene caratterizzato l'elemento minimo φ_0 della classe U dei sottopotenziali energia libera, ma rimangono aperti alcuni problemi, tra i quali la caratterizzazione dell'elemento massimo $\hat{\varphi}$ di U e la sua regolarità ⁽¹⁾, nonché l'esistenza di altri sottopotenziali « regolari » (cioè di classe C^1) oltre a φ_0 .

Nella prima parte del presente lavoro vengono richiamati brevemente i risultati già ottenuti in [1], mentre nella seconda parte si dà una caratterizzazione completa di $\hat{\varphi}$. Poiché anche $\hat{\varphi}$ risulta una funzione regolare dello stato, si dimostra l'esistenza di una sottoclasse non numerabile V di U costituita da sottopotenziali regolari. Per ottenere tali risultati le tecniche utilizzate in [1] non sono sufficienti. Essi si fondano in maniera essenziale sull'esistenza di particolari processi « quasi-reversibili » che connettono gli stati a stress nullo del sistema (vedi Lemma 2.1) e quindi dipendono dalla particolare natura del modello studiato.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito delle attività del G.N.F.M. del C.N.R. e dei progetti di ricerca ministeriali 40% e 60%.

(**) Dipartimento di Matematica. Università di Bologna.

(***) Nella seduta del 18 maggio 1985.

(1) Il Teorema 3.1. in [1] stabilisce solo l'esistenza e la inferiore semicontinuità di $\hat{\varphi}$ richiamandosi ad una teoria molto più generale (vedi [2], [3]).

Nell'ultima parte, infine, si costruiscono due sottopotenziali regolari φ^+ e φ^- che non appartengono a V , dimostrando così l'esistenza di un'altra classe W di funzioni energia libera regolari. È interessante osservare che le funzioni φ^+ e φ^- rappresentano l'energia meccanica di due sistemi materiali ipoelastici governati da equazioni costitutive strettamente correlate al modello elasto-plastico considerato.

Tutti i sottopotenziali regolari così caratterizzati sono unimodali nelle variabili da cui dipendono e possiedono un minimo globale per $\sigma = 0$. Tali proprietà, che non si osservano per il modello della elastoplasticità perfetta (vedi [3], [4]), oltre che fisicamente rilevanti sono anche estremamente utili nell'analisi della stabilità del moto. Ricollegandoci a recenti lavori su problemi di stabilità per equazioni costitutive di tipo viscoelastico [6] e perfettamente elastoplastico [7], mostreremo in una Nota successiva [5] come applicare detti risultati allo studio di un « oscillatore dinamico elasto-plastico » (o « dangling spider system »).

Ricordiamo infine che risultati dello stesso tipo sono stati ottenuti dall'autore per una classe di materiali dotati di isteresi magnetica [8].

Riassumiamo ora brevemente i risultati ottenuti in [1].

In quel lavoro si studia il comportamento di una classe di materiali elasto-plastici soggetti a deformazioni finite isoterme governati, nel caso più generale, da una relazione costitutiva del tipo:

$$(1.1) \quad \dot{\sigma}(t) = \lambda(\sigma(t), \varepsilon(t); \text{sign } \dot{\varepsilon}(t)) \dot{\varepsilon}(t)$$

dove σ e ε rappresentano rispettivamente lo sforzo (« true stress ») diviso per la densità di massa e la deformazione (« logarithmic strain »). Inoltre, λ è una funzione reale definita su $D_\mu \times \{-1, 1\}$, con $D_\mu = \{(\sigma, \varepsilon) \in \mathbb{R}^2 : |\sigma - \mu^2 \varepsilon| < \alpha\}$.

Ponendo $\sigma^* = \sigma - \mu^2 \varepsilon$, la (1.1) può essere espressa nella forma:

$$\dot{\sigma}^*(t) = \lambda^*(\sigma^*(t), \varepsilon(t); \text{sign } \dot{\varepsilon}(t)) \dot{\varepsilon}(t),$$

dove $\lambda^*(\sigma^*, \varepsilon; \text{sign } \dot{\varepsilon}) = \lambda(\sigma^* + \mu^2 \varepsilon, \varepsilon; \text{sign } \dot{\varepsilon}) - \mu^2$. Si suppone inoltre che la funzione λ^* goda delle seguenti proprietà (vedi [1] Osservazione 2.1):

I) le funzioni $\lambda^+ = \lambda^*(\sigma^*, \varepsilon; +1)$ e $\lambda^- = \lambda^*(\sigma^*, \varepsilon; -1)$ sono sufficientemente regolari da permettere che i problemi di Cauchy associati a (1.1) con $\dot{\varepsilon} = +1$ e $\dot{\varepsilon} = -1$ ammettano sempre una ed una sola soluzione assolutamente continua che dipende con continuità dal dato iniziale in $D^* = \{(\sigma^*, \varepsilon) \in \mathbb{R}^2 : |\sigma^*| < \alpha\}$;

II) $0 < \lambda^*(\sigma^*, \varepsilon; +1) = \lambda^*(-\sigma^*, -\varepsilon; -1) \leq M$ per ogni $(\sigma^*, \varepsilon) \in D^*$;

III) $\lim_{\sigma^* \rightarrow \alpha} \lambda^*(\sigma^*, \varepsilon; -1) \neq 0$,
 $\lim_{\sigma^* \rightarrow \alpha} \lambda^*(\sigma^*, \varepsilon; +1) / |\alpha - \sigma^*| < +\infty^{(2)}$.

(2) La III)₂ è condizione sufficiente affinché il problema di Cauchy per (1.1) ammetta soluzione in D_μ per ogni $t > 0$ (cfr. [1], nota 4).

Dopo aver richiesto che la deformazione si possa decomporre in modo tale che:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon' + \varepsilon'' \\ \sigma^* &= s(\varepsilon') \end{aligned}$$

si caratterizza la funzione s supponendo l'esistenza di particolari processi non reversibili, detti di « scaricamento elastico », durante i quali la componente ε'' (deformazione plastica) rimane costante. Affinché tali ipotesi siano compatibili con l'equazione costitutiva (1.1), la funzione λ^* deve essere indipendente da ε (vedi [1] Teorema 2.1). In tal caso, s è univocamente determinata dalla equazione differenziale

$$(1.3) \quad \frac{d}{d\varepsilon'} s(\varepsilon') = \lambda^*(s(\varepsilon'); -\text{sign } \varepsilon'), \quad s(0) = 0$$

e per le proprietà I)-III) essa risulta una funzione di classe C^1 monotona crescente e dispari da $(-\beta, \beta)$, $\beta \in \mathbb{R}^+$, su $(-\alpha, \alpha)$. Applicando la trasformazione biunivoca (1.2) di D^* in $\bar{D} = \{(\varepsilon', \varepsilon'') \in \mathbb{R}^2 : |\varepsilon'| < \beta\}$ e tenendo conto di (1.3), dall'equazione (1.1) si deducono le seguenti relazioni (vedi [1] eq. 2.12):

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}'(t) &= \Lambda(\varepsilon'(t); \text{sign } \dot{\varepsilon}(t)) \dot{\varepsilon}(t) \\ \dot{\varepsilon}''(t) &= [1 - \Lambda(\varepsilon'(t); \text{sign } \dot{\varepsilon}(t))] \dot{\varepsilon}(t) \end{aligned}$$

dove

$$(1.5) \quad \Lambda(\varepsilon'; \text{sign } \dot{\varepsilon}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \varepsilon' = 0 \\ \lambda^*(s(\varepsilon'); \text{sign } \dot{\varepsilon}) / \lambda^*(s(\varepsilon'); -\text{sign } \varepsilon') & \text{se } \varepsilon' \neq 0. \end{cases}$$

Si è quindi dimostrato che il materiale definisce un particolare sistema dinamico, detto « sistema materiale elastoplastico » (vedi [1] Teorema 2.2), con processi di entrata $P \in \Pi$, $(P(t) = \dot{\varepsilon}(t), t \in [0, d_p])$, spazio degli stati $\Sigma = \bar{D}$ e funzione di transizione $\hat{p}((\varepsilon', \varepsilon''), P) = (\varepsilon'(t), \varepsilon''(t))$ dove $\varepsilon'(t)$ e $\varepsilon''(t)$ rappresentano la soluzione del problema di Cauchy per (1.4) corrispondente al processo P e al dato iniziale $(\varepsilon', \varepsilon'')$.

Il lavoro meccanico compiuto dal sistema durante il processo P a partire dallo stato $(\varepsilon', \varepsilon'')$ è definito da:

$$(1.6) \quad w((\varepsilon', \varepsilon''), P) = \int_0^{d_p} \sigma(t) P(t) dt = \int_0^{d_p} \sigma^*(t) P(t) dt + \mu^2 \int_0^{d_p} \varepsilon(t) P(t) dt,$$

quindi da (1.2) si ha

$$w((\varepsilon', \varepsilon''), P) = \int_0^{d_p} s(\varepsilon'(t)) P(t) dt + \frac{1}{2} \mu^2 (\varepsilon^2(d_p) - \varepsilon^2)$$

dove $\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon''$.

Si dimostra quindi facilmente (vedi [1] Osservazione 3.2) che il lavoro meccanico w è dissipativo, cioè non negativo sui cicli chiusi, se la funzione costitutiva λ^* soddisfa l'ulteriore condizione:

$$\text{IV) } \lambda^*(s(\varepsilon'); \text{sign } \varepsilon') < \lambda^*(s(\varepsilon'); -\text{sign } \varepsilon') \quad \text{per ogni } \varepsilon' \neq 0.$$

La notazione qui utilizzata consente di ottenere i risultati relativi al caso di materiali senza incrudimento ($\mu^2 = 0$) sostituendo semplicemente alle grandezze con asterisco le corrispondenti non asteriscate ($D = D_0$). Per tali materiali in [1] vengono dimostrate alcune proprietà generali dei sottopotenziali energia libera normalizzati a zero nello stato $(\varepsilon', \varepsilon'') = (0, 0)$ e viene caratterizzato l'elemento minimo φ_0 della classe U di detti sottopotenziali (vedi [1] Teorema 3.1), cioè:

$$(1.7) \quad \varphi_0(\varepsilon') = \int_0^{\varepsilon'} s(y) dy,$$

per cui vale la proprietà

$$\frac{d}{d\varepsilon'} \varphi_0(\varepsilon') = s(\varepsilon') = \sigma.$$

L'estensione di tali risultati al caso generale è banale, in quanto per la (1.6) ogni sottopotenziale energia libera normalizzato assumerà l'espressione:

$$(1.8) \quad \psi(\varepsilon', \varepsilon'') = \varphi(\varepsilon', \varepsilon'') + \frac{1}{2} \mu^2 (\varepsilon' + \varepsilon'')^2,$$

dove $\varphi \in U$. In particolare avremo:

$$(1.9) \quad \psi_0(\varepsilon', \varepsilon'') = \varphi_0(\varepsilon') + \frac{1}{2} \mu^2 (\varepsilon' + \varepsilon'')^2,$$

da cui discende anche nel caso generale

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon'} \psi_0(\varepsilon', \varepsilon'') = s(\varepsilon') + \mu^2 \varepsilon = \sigma^* + \mu^2 \varepsilon = \sigma.$$

Osserviamo infine che mediante (1.3) è possibile esprimere sia φ_0 sia ψ_0 in funzione di (σ, ε) ottenendo le espressioni:

$$(1.10) \quad \bar{\varphi}_0(\sigma) = \int_0^{\sigma} \xi \, d\xi / \lambda(\xi; -\text{sign } \xi),$$

$$(1.11) \quad \bar{\psi}_0(\sigma^*, \varepsilon) = \int_0^{\sigma^*} \xi \, d\xi / \lambda^*(\xi; -\text{sign } \xi) + \frac{1}{2} \mu^2 \varepsilon^2.$$

2. CARATTERIZZAZIONE DI $\hat{\varphi}$

Tratteremo dapprima il caso senza incrudimento ($\mu^2 = 0$). L'elemento massimo della classe U è quindi definito da (vedi [2] ed in particolare [1] Teorema 3.1.iii):

$$(2.1) \quad \hat{\varphi}(\varepsilon', \varepsilon'') = \inf_{\vec{\Pi}_{(\varepsilon', \varepsilon'')}} w((0, 0), P)$$

dove

$$\vec{\Pi}_{(\varepsilon', \varepsilon'')} = \{P \in \Pi : \hat{\varphi}((0, 0), P) = (\varepsilon', \varepsilon'')\}.$$

In [9] viene fatto notare che $\hat{\varphi}(\varepsilon', \varepsilon'')$ rappresenta la minima quantità di energia meccanica che occorre fornire al sistema per portarlo dallo stato $(0, 0)$ allo stato $(\varepsilon', \varepsilon'')$, mentre φ_0 rappresenta la massima quantità di energia che può essere prodotta dal sistema. Tale interpretazione fisica è particolarmente significativa ed è una caratteristica comune a tutti i sistemi dinamici dissipativi con spazio degli stati completamente controllabile.

Il risultato principale di questa sezione è il seguente teorema:

TEOREMA 2.1. *L'elemento massimo $\hat{\varphi}$ della classe U dei sottopotenziali energia libera per il sistema materiale elasto-plastico considerato ha la seguente espressione:*

$$(2.2) \quad \hat{\varphi}(\varepsilon') = \int_0^{\varepsilon'} s(y) \, dy / \Lambda(y, \text{sign } y)$$

dove Λ è definita in (1.5).

Osservando che $0 < \Lambda \leq 1$ (vedi [1], p. 251) è immediato verificare che $\hat{\varphi} \geq \varphi_0$. Mettendo in evidenza la dipendenza dallo stress σ , la (2.2) può essere scritta nella forma:

$$(2.3) \quad \hat{\varphi}(\sigma) = \int_0^{\sigma} \xi \, d\xi / \lambda(\xi, \text{sign } \xi).$$

Per giungere a tale caratterizzazione di $\hat{\phi}$ utilizzeremo le tecniche già adottate in [8]. A tal fine premettiamo la dimostrazione del seguente Lemma.

LEMMA 2.1. *Gli stati a stress nullo, cioè appartenenti al sottospazio $\Sigma_0 = \{(\varepsilon', \varepsilon'') \in \Sigma : \varepsilon' = 0\}$, sono completamente controllabili mediante processi «quasi reversibili», cioè dati due stati $(0, \varepsilon_1''), (0, \varepsilon_2'') \in \Sigma_0$ per ogni $\delta > 0$ esistono due processi $\vec{P}_\delta, \overleftarrow{P}_\delta \in \Pi$ tali che:*

- i) $\hat{\phi}((0, \varepsilon_1''), \vec{P}_\delta) = (0, \varepsilon_2'')$ e $|w((0, \varepsilon_1''), \vec{P}_\delta)| < \delta$;
- ii) $\hat{\phi}((0, \varepsilon_2''), \overleftarrow{P}_\delta) = (0, \varepsilon_1'')$ e $|w((0, \varepsilon_2''), \overleftarrow{P}_\delta)| < \delta$.

Dimostrazione. Se $\varepsilon_1'' = \varepsilon_2''$ gli enunciati sono banalmente soddisfatti per processi identicamente nulli. Per ottenere (i) e (ii) non è quindi restrittivo supporre $\varepsilon_1'' < \varepsilon_2''$.

(i) Iniziamo con la costruzione di un processo che connetta gli stati dati. A partire da $(0, \varepsilon_1'')$ applichiamo il processo $P_\Lambda^+(t) = 1/\Lambda(t, +1) > 0$ definito per $t \in [0, d_p)$, $d_p < \beta$ ⁽³⁾.

Da (1.4) si ottiene facilmente $\dot{\varepsilon}'(t) = 1$ e quindi $\varepsilon'(t) = t$; inoltre si avrà $\dot{\varepsilon}''(t) = (1 - \Lambda(t, +1))/\Lambda(t, +1)$. Indicando con $g(t)$ tale funzione risulta:

$$\varepsilon''(t) = \varepsilon_1'' + \int_0^t g(\tau) d\tau,$$

quindi, osservando che l'integrale a secondo membro diverge positivamente per t che tende a β (vedi nota (3)), possiamo concludere che esiste un istante $\bar{t} \in (0, \beta)$ tale che:

$$\varepsilon_2'' - \varepsilon_1'' = \int_0^{\bar{t}} g(\tau) d\tau.$$

Se $d_p = \bar{t}$ lo stato finale è dato da $\hat{\phi}((0, \varepsilon_1''), P_\Lambda^+) = (\bar{\varepsilon}', \varepsilon_2'')$, dove ovviamente $\bar{\varepsilon}' = \bar{t}$. A questo punto per ottenere lo stato $(0, \varepsilon_2'')$ basta applicare il

(3) Infatti risulta (vedi eq. 1.5):

$$\Lambda(t, +1) = \lambda(s(t), +1)/\lambda(s(t), -1) \quad \text{per } t \in [0, \beta),$$

e poiché $\beta = s^{-1}(\alpha)$, dalla (III)₂ e da (1.3) segue:

$$\lim_{t \rightarrow \beta} \int_0^t d\tau / \Lambda(\tau, +1) = \int_0^\alpha d\xi / \lambda(\xi, +1) = +\infty;$$

pertanto la funzione $P_\Lambda^+ : [0, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ non è sommabile e quindi non appartiene a Π (vedi (1) nota (3)).

processo $P^-(t) = -1$, $t \in [0, \bar{t}]$, tenendo conto di (1.4). Se indichiamo sinteticamente con $\bar{P}$ il processo ottenuto componendo quelli precedentemente definiti, cioè $\bar{P}(t) = P_\Lambda^+ * P^-(t)$, $t \in [0, 2\bar{t}]$ (vedi [1] (2.13)), otteniamo:

$$\hat{p}((0, \varepsilon_1''), \bar{P}) = (0, \varepsilon_2'').$$

Per soddisfare anche la seconda parte di (i) occorre costruire un processo che porti il sistema dal primo al secondo stato in modo che il lavoro meccanico w sviluppato sia arbitrariamente piccolo. L'idea che si intende seguire consiste nel trasferire il sistema da uno stato all'altro per piccoli passi, componendo processi come quello precedentemente descritto.

A tale scopo poniamo $\Delta_n = (\varepsilon_2'' - \varepsilon_1'')/n$, $n \in \mathbb{N}$, e introduciamo la successione $\{\bar{t}_n\}$ in modo tale che:

$$(2.4) \quad \Delta_n = \int_0^{\bar{t}_n} g(s) ds \quad \text{per ogni } n.$$

Fissato $n \in \mathbb{N}$, consideriamo il processo $\bar{P} = P_\Lambda^+ * P^-$ con P_Λ^+ e P^- definiti come in precedenza su $[0, \bar{t}_n]$. Se ora poniamo $\bar{P}_k = \bar{P} * \bar{P} * \dots * \bar{P}$ k volte per $k = 1, 2, \dots, n$, per quanto detto sopra si ottiene:

$$(2.5) \quad \hat{p}((0, \varepsilon_1''), \bar{P}_k) = (0, \varepsilon_1'' + k(\varepsilon_2'' - \varepsilon_1'')/n),$$

ed in particolare:

$$\hat{p}((0, \varepsilon_1''), \bar{P}_n) = (0, \varepsilon_2'').$$

Calcoliamo quindi il lavoro w corrispondente al processo $\bar{P}_n$ di durata $2n\bar{t}_n$. Dalle (1.6) e (2.4) si deduce l'espressione:

$$w((0, \varepsilon_1''), \bar{P}_n) = \int_0^{2n\bar{t}_n} s(\varepsilon'(t)) [\dot{\varepsilon}'(t) + \dot{\varepsilon}''(t)] dt = n \int_0^{\bar{t}_n} s(\varepsilon'(t)) \dot{\varepsilon}''(t) dt,$$

dove l'ultimo integrale è calcolato lungo il processo P_Λ^+ ; pertanto, ricordando (2.4),

$$w((0, \varepsilon_1''), \bar{P}_n) = n \int_0^{\bar{t}_n} s(t) g(t) dt \leq n s(\bar{t}_n) \Delta_n = s(\bar{t}_n) (\varepsilon_2'' - \varepsilon_1'').$$

Tenendo conto, infine, che $\{\bar{t}_n\}$ è infinitesima e che s è continua, possiamo concludere che per ogni $\delta > 0$ esiste $\bar{n}$ tale che:

$$(2.6) \quad 0 \leq w((0, \varepsilon_1''), \bar{P}_n) < \delta \quad \text{per } n > \bar{n}.$$

(ii) In tal caso si segue un procedimento analogo al precedente, sostituendo a $\bar{P}$ il processo $\hat{P} = P_{\Lambda}^- * P^+$, dove $P_{\Lambda}^-(t) = -1/\Lambda(-t, -1) = -1/\Lambda(t, +1)$ e $P^+(t) = +1$ per $t \in [0, \bar{t}_n)$.

Osservazione. Facciamo notare che il limite della successione di processi $\{\bar{P}_n\}$ per $n \rightarrow \infty$ non è un processo di Π . Infatti tale successione converge puntualmente ad una funzione ovunque discontinua in quanto:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} P_{\Lambda}^+(t) = +1, \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} P^-(t) = -1.$$

Lo stesso dicasi di $\{\hat{P}_n\}$. In altre parole ciò significa che non esistono processi « reversibili » che connettono gli stati di Σ_0 .

Dimostrazione del Teorema 2.1.

Dati $(\varepsilon_1', \varepsilon_2'') \in \Sigma$ e $P \in \Pi$, poniamo

$$(2.7) \quad w_D((\varepsilon_1', \varepsilon_2''), P) = \int_0^{d_p} s(\varepsilon'(t)) \dot{\varepsilon}''(t) dt,$$

dove $(\varepsilon'(t), \varepsilon''(t)) = \hat{p}((\varepsilon_1', \varepsilon_1''), P_t)$ per $t \in [0, d_p)$.

Se $\hat{p}((\varepsilon_1', \varepsilon_1''), P) = (\varepsilon_2', \varepsilon_2'')$, in base alle (1.6) e (1.7) si perviene alla seguente espressione del lavoro meccanico:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} w((\varepsilon_1', \varepsilon_1''), P) &= \int_0^{d_p} s(\varepsilon'(t)) \dot{\varepsilon}'(t) dt + \int_0^{d_p} s(\varepsilon'(t)) \dot{\varepsilon}''(t) dt = \\ &= \varphi_0(\varepsilon_2') - \varphi_0(\varepsilon_1') + w_D((\varepsilon_1', \varepsilon_1''), P). \end{aligned}$$

La quantità w_D rappresenta la frazione di lavoro che viene dissipata durante il processo P . Infatti la funzione integranda a secondo membro di (2.7) risulta essere sempre non negativa in conseguenza dell'ipotesi (IV) (vedi [1], eq. 3.6).

Da ciò e dalle (1.4) si ottiene:

$$(2.9) \quad 0 \leq w_D((\varepsilon_1', \varepsilon_1''), P) = \int_I [1 - \Lambda(\varepsilon'(t), \text{sign } \varepsilon'(t))] s(\varepsilon'(t)) P(t) dt$$

dove $I = \{t \in [0, d_p) : \varepsilon'(t) P(t) > 0\}$.

Utilizzando l'espressione (2.8) la funzione $\hat{\varphi}$ definita in (2.1) assume la seguente espressione:

$$\hat{\varphi}(\varepsilon', \varepsilon'') = \varphi_0(\varepsilon') + \inf_{\vec{\Pi}_{(\varepsilon', \varepsilon'')}} w_D((0, 0), P).$$

Per stimare quest'ultimo termine dalla (1.4) ricaviamo l'espressione

$$P(t) \equiv \dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}'(t)/\Lambda(\varepsilon'(t), \text{sign } \varepsilon'(t)) \quad \text{per } t \in I$$

e la sostituiamo in (2.9) ottenendo così:

$$(2.10) \quad w_D((0, 0), P) \geq \int_0^{\varepsilon'} s(y) \frac{1 - \Lambda(y, \text{sign } y)}{\Lambda(y, \text{sign } y)} dy$$

per ogni $P \in \vec{\Pi}_{(\varepsilon', \varepsilon'')}$.

Per ottenere una maggiorazione dell'inf di w_D osserviamo che per ogni $\bar{\varepsilon}''$ e per ogni P' tali che $\hat{\varphi}((0, \bar{\varepsilon}''), P') = (\varepsilon', \varepsilon'')$ in base al Lemma 2.1 si ha:

$$\begin{aligned} \inf_{\vec{\Pi}_{(\varepsilon', \varepsilon'')}} w_D((0, 0), P) &\leq \inf_{\vec{\Pi}_{(0, \bar{\varepsilon}'')}} w_D((0, 0), P) + w_D((0, \bar{\varepsilon}''), P') = \\ &= w_D((0, \bar{\varepsilon}''), P'). \end{aligned}$$

Se $\varepsilon' = 0$ basta scegliere $\bar{\varepsilon}'' = \varepsilon''$ e $P' = 0$ per verificare che tale estremo inferiore è nullo e quindi $\varphi_0 = \hat{\varphi}$ su Σ_0 .

Se $\varepsilon' \neq 0$ supporremo dapprima $\varepsilon' > 0$. In tal caso possiamo scegliere

$$\bar{\varepsilon}'' = \varepsilon'' - \int_0^{\varepsilon'} g(s) ds \quad \text{e} \quad P' = P_{\Lambda}^+, t \in [0, \varepsilon']$$

per quanto già osservato nella prima parte della dimostrazione del Lemma 2.1.i.). Il lavoro dissipato vale pertanto:

$$w_D((0, \bar{\varepsilon}''), P_{\Lambda}^+) = \int_0^{\varepsilon'} s(t) g(t) dt.$$

Se invece $\varepsilon' < 0$ basterà sostituire a P_{Λ}^+ il processo P_{Λ}^- ed otterremo così:

$$w_D((0, \bar{\varepsilon}''), P_{\Lambda}^-) = \int_0^{-\varepsilon'} s(-t) \frac{\Lambda(-t, -1) - 1}{\Lambda(-t, -1)} dt$$

in quanto nel primo caso $\varepsilon'(t) = t$, mentre nel secondo $\varepsilon'(t) = -t$.

Possiamo quindi concludere che qualunque sia $(\varepsilon', \varepsilon'') \in \Sigma$ risulta:

$$(2.11) \quad \inf_{\vec{\Pi}_{(\varepsilon', \varepsilon'')}} w_D((0, 0), P) \leq \int_0^{\varepsilon'} s(y) \frac{1 - \Lambda(y, \operatorname{sign} y)}{\Lambda(y, \operatorname{sign} y)} dy$$

e pertanto da (2.10) e (2.11) segue:

$$\inf_{\vec{\Pi}_{(\varepsilon', \varepsilon'')}} w_D((0, 0), P) = \int_0^{\varepsilon'} s(y) dy / \Lambda(y, \operatorname{sign} y) - \varphi_0(\varepsilon').$$

che prova il Teorema.

Osservazione. Il sottopotenziale $\hat{\varphi}$ è di classe C^1 su $(-\beta, \beta)$ e possiede un minimo globale stretto in 0. Tuttavia, a differenza di φ_0 non è limitato (vedi nota (3)).

La relazione (1.8) permette di determinare immediatamente l'espressione del massimo sottopotenziale energia libera nel caso generale, cioè:

$$\hat{\psi}(\varepsilon', \varepsilon'') = \int_0^{\varepsilon'} s(y) dy / \Lambda(y, \operatorname{sign} y) + \frac{1}{2} \mu^2 (\varepsilon' + \varepsilon'')^2$$

mentre da (2.3) si ha:

$$\hat{\psi}(\sigma^*, \varepsilon) = \int_0^{\sigma^*} \xi d\xi / \lambda^*(\xi, \operatorname{sign} \xi) + \frac{1}{2} \mu^2 \varepsilon^2.$$

3. SOTTOPOTENZIALI REGOLARI

Abbiamo determinato nelle precedenti sezioni l'espressione del minimo e del massimo per la classe U dei sottopotenziali energia libera del sistema elasto-plastico normalizzati a zero nello stato $(0, 0)$ ed abbiamo osservato che tali funzioni, rispettivamente indicate con φ_0 e $\hat{\varphi}$, sono di classe C^1 . Poiché U è convesso (vedi [2] Th. 3.3), l'insieme V delle combinazioni lineari convesse di φ_0 e di $\hat{\varphi}$, cioè

$$\varphi_\gamma(\varepsilon') = \gamma \varphi_0(\varepsilon') + (1 - \gamma) \hat{\varphi}(\varepsilon') \quad \text{per } \gamma \in [0, 1],$$

fornisce una sottoclasse non numerabile di U costituita da sottopotenziali regolari. Tali funzioni sono inoltre unimodali nel loro argomento e possiedono un minimo globale stretto nell'origine.

Analoghe considerazioni valgono anche nel caso generale. Occorre inoltre rilevare che la presenza di incrudimento lineare garantisce la convessità di tali sottopotenziali rispetto ad entrambe le variabili di stato e che quindi lo stato $(0, 0)$ è di minimo assoluto proprio su tutto lo spazio $\bar{D}$.

In questa sezione vogliamo dimostrare che la sottoclasse V non esaurisce l'insieme dei sottopotenziali regolari di U . Per maggiore chiarezza dei risultati tratteremo il caso senza incrudimento e rappresenteremo lo stato del sistema con la coppia stress-deformazione (σ, ε) sottointendendo la dipendenza di tali variabili da ε' e ε'' (vedi (1.2)).

TEOREMA 3.1. *Le funzioni regolari $\bar{\varphi}^+$ e $\bar{\varphi}^-$ definite da:*

$$(3.1) \quad \bar{\varphi}^+(\sigma) = \int_0^\sigma \xi \, d\xi / \lambda(\xi; +1)$$

$$(3.2) \quad \bar{\varphi}^-(\sigma) = \int_0^\sigma \xi \, d\xi / \lambda(\xi; -1)$$

appartengono a U , ma non a V .

Dimostrazione. Che tali funzioni non appartengano a V appare evidente confrontando (3.1) e (3.2) con (1.10) e (2.3); risulta infatti:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \bar{\varphi}^+(\sigma) &= \begin{cases} \hat{\bar{\varphi}}(\sigma) & \text{se } \sigma > 0 \\ \bar{\varphi}_0(\sigma) & \text{se } \sigma \leq 0 \end{cases} \\ \bar{\varphi}^-(\sigma) &= \begin{cases} \bar{\varphi}_0(\sigma) & \text{se } \sigma > 0 \\ \hat{\bar{\varphi}}(\sigma) & \text{se } \sigma \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Resta da dimostrare che appartengono ad U , cioè che verificano la definizione di sottopotenziale (ved. [1], Definizione 3.1). Per funzioni regolari $\bar{\varphi}$ ciò equivale a provare la seguente relazione:

$$(3.4) \quad \frac{d}{dt} \bar{\varphi}(\sigma(t)) \leq \sigma(t) P(t)$$

per ogni $P \in \Pi$ e per ogni $t \in [0, d_p]$, dove $P(t) = \dot{\varepsilon}(t)$ e $\sigma(t)$ è la soluzione di (1.1) corrispondente a P .

Sia $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}^+$; da (1.1) e (3.1) otteniamo:

$$\frac{d}{dt} \bar{\varphi}^+(\sigma(t)) = \frac{d}{d\sigma} \bar{\varphi}^+(\sigma(t)) \dot{\sigma}(t) = \sigma(t) \dot{\varepsilon}(t) \lambda(\sigma(t); \text{sign } \dot{\varepsilon}(t)) / \lambda(\sigma(t); +1)$$

perciò risulta

$$\frac{d}{dt} \bar{\varphi}^+(\sigma(t)) = \begin{cases} \sigma(t) \dot{\varepsilon}(t) & , \quad \text{se } \dot{\varepsilon}(t) \geq 0 \\ f(\sigma(t)) \sigma(t) \dot{\varepsilon}(t) & , \quad \text{se } \dot{\varepsilon}(t) < 0 \end{cases}$$

dove $f(\sigma) = \lambda(\sigma; -1)/\lambda(\sigma; +1)$.

Nel primo caso (3.4) è soddisfatta in forma di uguaglianza. Nel secondo caso osserviamo che in base all'ipotesi (IV) si ha:

$$(3.5) \quad f(\sigma) \begin{cases} > 1 & \text{se } \sigma < 0 \\ = 1 & \text{se } \sigma = 0 \\ < 1 & \text{se } \sigma > 0. \end{cases}$$

Pertanto $f(\sigma)\sigma \geq \sigma$ ed anche in questo caso (3.4) è soddisfatta.

Sia ora $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}^-$; da (1.1) e (3.2) segue:

$$\frac{d}{dt} \bar{\varphi}^-(\sigma(t)) = \begin{cases} \sigma(t) \dot{\varepsilon}(t) & \text{se } \dot{\varepsilon}(t) \leq 0, \\ \sigma(t) \dot{\varepsilon}(t)/f(\sigma(t)) & \text{se } \dot{\varepsilon}(t) > 0. \end{cases}$$

Poiché per (3.5) risulta $\sigma/f(\sigma) \leq \sigma$, anche $\bar{\varphi}^-$ verifica (3.4).

Le funzioni $\bar{\varphi}^+$ e $\bar{\varphi}^-$ sono unimodali e dotate di minimo in $\sigma = 0$; inoltre, in base a (3.3), non sono limitate:

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow \alpha} \bar{\varphi}^+(\sigma) &= \lim_{\sigma \rightarrow \alpha} \hat{\bar{\varphi}}(\sigma) = +\infty, \\ \lim_{\sigma \rightarrow -\alpha} \bar{\varphi}^-(\sigma) &= \lim_{\sigma \rightarrow -\alpha} \hat{\bar{\varphi}}(\sigma) = +\infty. \end{aligned}$$

È interessante osservare che tali funzioni rappresentano l'energia meccanica di due sistemi materiali ipoplastici descritti rispettivamente dalle relazioni costitutive:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \dot{\sigma}(t) &= \lambda(\sigma(t); +1) \dot{\varepsilon}(t), \\ \dot{\sigma}(t) &= \lambda(\sigma(t); -1) \dot{\varepsilon}(t), \end{aligned}$$

(vedi [10], Teorema 1).

L'insieme W delle combinazioni lineari convesse di φ^+ e φ^- , cioè:

$$\varphi_\nu(\varepsilon') = \nu \varphi^+(\varepsilon') + (1 + \nu) \varphi^-(\varepsilon') \quad \text{per } \nu \in [0, 1],$$

fornisce un'altra sottoclasse non numerabile di U costituita da sottopotenziali regolari.

Per costruzione V e W hanno in comune l'elemento corrispondente a $\gamma = 1/2$ e a $\nu = 1/2$. Pertanto, detto U' il più piccolo convesso di U che contiene V e W , esso risulta costituito interamente dai sottopotenziali regolari ottenuti mediante combinazioni lineari convesse degli elementi di V e W :

$$U' = \{\varphi \in U : \varphi = \delta \varphi_\gamma + (1 - \delta) \varphi_\nu, \delta \in [0, 1], \varphi_\gamma \in V, \varphi_\nu \in W\}.$$

Qualora sia presente anche l'incrudimento ($\mu^2 \neq 0$), si perviene a risultati analoghi. In particolare, i sottopotenziali del Teorema 3.1 sono dati da:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \bar{\Psi}^+(\sigma^*, \varepsilon) &= \int_0^{\sigma^*} \xi \, d\xi/\lambda(\xi; +1) + \frac{1}{2} \mu^2 \varepsilon^2, \\ \bar{\Psi}^-(\sigma^*, \varepsilon) &= \int_0^{\sigma^*} \xi \, d\xi/\lambda(\xi; -1) + \frac{1}{2} \mu^2 \varepsilon^2. \end{aligned}$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] GIORGI C. e LAZZARI B. (1983) - *Sull'energia libera per un materiale elastoplastico in presenza di deformazioni finite isoterme*, « Fisica Matematica, Suppl. B.U.M.I. », 2, 243-259.
- [2] COLEMAN B.D. e OWEN D.R. (1974) - *A Mathematical Foundation for Thermodynamics*, « Arch. Rational Mech. Anal. », 54, 1-104.
- [3] COLEMAN B.D. e OWEN D.R. (1975) - *On Thermodynamics and Elastic Plastic Materials*, « Arch. Rational Mech. Anal. », 59, 25-51.
- [4] LAZZARI B. (1982) - *Un teorema di caratterizzazione per l'energia libera per una classe di materiali elastoplastici*, « Ann. Univ. Ferrara, sez. VII, Sc. Mat. », 28, 127-141.
- [5] GIORGI C. e MARZOCCHI A. - *Sulla stabilità dell'oscillatore elasto-plastico*, Rapporto interno, Istituto Matematico dell'Università Cattolica di Brescia.
- [6] COLEMAN B.D. e MIZEL V.J. (1968) - *On the Stability of Solutions of Functional-differential Equations*, « Arch. Rational Mech. Anal. », 30, 173-196.
- [7] BUHITE J.L. e OWEN D.R. (1979) - *An Ordinary Differential Equation from the Theory of Plasticity*, « Arch. Rational Mech. Anal. », 71, 357-383.
- [8] GIORGI C. - *Sui potenziali elettromagnetici per alcuni modelli di isteresi magnetica*, « Annali di Matematica Pura ed Applicata » (in corso di stampa).
- [9] WILLEMS J.C. (1972) - *Dissipative Dynamical Systems. Part I: General Theory*, « Arch. Rational Mech. Anal. », 45, 321-351.
- [10] MIHAILESCU-SILICIU M. e SILICIU I. (1979) - *Energy for Hypoelastic Constitutive Equations*, « Arch. Rational Mech. Anal. », 71, 327-344.