Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Pierre Louis Lions

Remarques sur les équations linéaires elliptiques du second ordre sous forme divergence dans les domaines non bornés

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **78** (1985), n.5, p. 205–212.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1985_8_78_5_205_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1985.

Equazioni a derivate parziali. — *Remarques sur les équations linéaires elliptiques du second ordre sous forme divergence dans les domaines non bornés.* Nota di PIERRE LOUIS LIONS (*), presentata (**) dal Corrisp. E. MAGENES.

RIASSUNTO. — Si dà una maggiorazione a priori in L^p (con $1 \leqq p \leqq \infty$) per le soluzioni di equazioni lineari ellittiche del secondo ordine in domini non limitati.

INTRODUCTION

On considère un opérateur linéaire, elliptique, du second-ordre sous forme divergence

$$A = -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_i b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x) \tag{1}$$

où $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$ $(1 \leq i, j \leq N)$ et

$$\exists \nu > 0, \forall \xi \in \mathbf{R}^N, \quad \sum_{i,j} a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \geq \nu\,|\xi|^2 \text{ p.p. } x,\ c \geq 0 \text{ p.p.} \tag{2}$$

Et on s'intéresse au problème de Dirichlet

$$Au = f \quad , \quad u \in H_0^1(\Omega) \tag{3}$$

où Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^N$, $f \in L^2(\Omega)$ par exemple.

Dans le cas où Ω est *borné* il s'agit d'un problème classique qui a été tout d'abord résolu par une simple application du lemme de Lax–Milgram lorsque la forme quadratique associée à A (i.e. $\langle Au, u\rangle$) est coercive sur $H_0^1(\Omega)$: voir par exemple G. Stampacchia [6]. Cependant sous la seule hypothèse (2) ceci n'est pas toujours le cas: ainsi par exemple si $\Omega =]0,1[$, $c \equiv 0$, $a \equiv 1$, $b = C\,1_{[\frac{1}{2},1]}$ on a pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\langle Au, u\rangle = \int_0^1 (u')^2\,dx - \frac{C}{2}\,u^2\left(\frac{1}{2}\right)$$

(*) CEREMADE – Université Paris-Dauphine, Place de Lattre de Tassigny, 75775 Paris Cedex 16.
(**) Nella seduta del 18 maggio 1985.

et si $C > 8$ le choix de $u(x) = \min(x, 1 - x)$ montre que la forme précédente n'est pas positive.

Toutefois, sous la seule hypothèse (2) et en supposant toujours que Ω est borné (ou mes $(\Omega) < \infty$), le problème (3) peut se résoudre grâce d'une part au principe du maximum faible et d'autre part à l'alternative de Fredholm: voir D. Gilbarg et N. Trudinger [4]. Une autre méthode a été introduite dans [5] reposant toujours sur le principe du maximum et sur une méthode itérative. Les deux méthodes utilisent de manière essentielle le fait que la mesure de Ω est finie (compacité de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ pour l'une, et décroissance des espaces $L^p(\Omega)$ pour l'autre). Signalons une troisième méthode toujours si mes $(\Omega) < < \infty$: il suffit d'observer que le résultat de comparaison de A. Alvino et G. Trombetti [1] fournit une estimation a priori dans $L^2(\Omega)$ qui permet de conclure aisément.

Comme aucune de ces méthodes ne permet de traiter le cas d'un ouvert non borné (par exemple $\Omega = \mathbf{R}^N$), il est naturel de considérer ce cas. Les seuls résultats connus supposent soit que la forme quadratique est coercive, soit que b « est nul à l'infini » (cf. P. Donato et D. Giachetti [3], G. Bottaro et M. Marina [2]). L'objet de cette note est de montrer que si c vérifie:

$$c(x) \geq c_0 > 0 \qquad \text{p.p. dans } \mathbf{R}^N \tag{4}$$

alors si $f \in L^p(\Omega)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, on a une estimation a priori sur u solution de (3) dans $L^p(\Omega)$. Ceci permet alors de démontrer facilement que le problème (3), sous les hypothèses (2) et (4) et si $f \in L^2 + L^p$ ($p = 1$ si $N = 1$, $1 < p < 2$ si $N = 2$, $p = \dfrac{2N}{N+2}$ si $N \geq 3$), admet une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$. La démonstration de cette estimation a priori est immédiate si $p = +\infty$; le cas $p = 1$ est obtenu par un argument de dualité utilisant les inégalités de Harnack et le cas général s'en déduit par interpolation.

Dans la section 3, nous donnons une autre démonstration (directe dans L^2) sous des hypothèses plus restrictives sur b.

L'auteur tient à remercier P. Donato, D. Giachetti, L. Migliaccio et F. Murat qui ont attiré son attention sur le problème traité ici.

1. Le résultat principal

Théorème. *Sous les hypothèses* (2) *et* (4) *et si* $f \in L^2 + L^p$ ($p = 1$ *si* $N = 1$, $1 < p < 2$ *si* $N = 2$, $p = (2N)/(N+2)$ si $N \geq 3$) *il existe une unique solution de* (3). *De plus, si* $f \in L^q$ ($q \in [1, +\infty]$), *il existe une constante* $C > 0$ *qui ne dépend que de* N, ν, c_0 *et des bornes* L^∞ *des coefficients telle que*

$$\| u \|_{L^q(\Omega)} \leq C \| f \|_{L^q(\Omega)} . \tag{5}$$

Indiquons tout de suite les grandes lignes de la démonstration du Théorème précédent: on introduit $\Omega_n = \Omega \cap B_n$ et on considère la solution u_n de (3) dans Ω_n avec $f \in L^2(\mathbf{R}^N)$. Si on démontre (5) pour $q = 1$ et pour $q = +\infty$ dans Ω_n avec une constante C ne dépendant que des constantes indiquées dans le Théorème (et donc en particulier indépendante de u), alors l'application linéaire $(f \to u_n)$ peut être définie (éventuellement étendue) de $L^1(\Omega_n)$ dans $L^1(\Omega_n)$ et de $L^\infty(\Omega_n)$ dans $L^\infty(\Omega_n)$ avec une norme majorée par C. Donc, par interpolation (5) est démontrée pout tout $q \in [1, +\infty]$ dans Ω_n. En particulier, si $f \in L^2 + L^p$, u_n est bornée dans $L^2(\Omega_n) + L^p(\Omega_n)$ et on déduit facilement par un argument standard que u_n est bornée dans $H_0^1(\Omega_n)$. En passant à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient alors facilement l'existence de u solution de (3) vérifiant (5). Comme l'unicité ne pose pas de difficulté particulière (la démonstration de [5] s'adapte sans modifications), le Théorème est alors démontré.

Tout revient donc à démontrer (5) pour un ouvert borné Ω, avec $q = 1$ ou $q = \infty$ où C est une constante indépendante de Ω. Les cas $q = \infty$ est bien connu puisque l'on a en fait

$$\| u \|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{C_0} \| f \|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{6}$$

Le cas $q = 1$ est démontré ci-dessous par une méthode (trop) complexe utilisant i) des arguments de dualité, ii) les inégalités de Harnack faible, iii) la construction d'une « sursolution ». On est ainsi amené à utiliser l'opérateur adjoint (au moins formellement)

$$A^* \varphi = - \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ji}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i(x)\varphi) + c\varphi$$

où $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. En observant que pour tous $u, v \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$\langle Au, u \rangle = \langle A^* v, u \rangle$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le crochet de dualité $H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, on déduit aisément que la borne L^1 voulue se déduit de l'estimation suivante (où C ne dépend que des quantités citées précédemment)

$$\| v \|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \| g \|_{L^\infty(\Omega)} \tag{7}$$

où $v \in H_0^1(\Omega)$ est la solution de

$$A^* v = g \quad \text{dans } \Omega, \quad v \in H_0^1(\Omega). \tag{8}$$

2. Démonstration de (7)

Etape 1: Réduction au cas d'une estimation L^1_{loc}.

Quitte à remplacer g par $|g|$, on peut supposer que $g, v \geq 0$. D'après les résultats de [4] (théorèmes 8.25-8.26) on voit que

$$\| v \|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \left\{ \| g \|_{L^\infty(\Omega)} + \sup_{y \in \mathbf{R}^N} \int_{(y+B) \cap \Omega} | v | \, dx \right\}. \tag{9}$$

Reste donc à obtenir une estimation L^1 de v sur toute boule de rayon 1. En vérifiant que toutes les constantes qui apparaissent ci-dessous sont indépendantes de y, on suppose pour simplifier les notations que $y = 0$.

Mais, en utilisant à nouveau l'argument de dualité précédent, on vérifie qu'il nous suffit donc de montrer

$$\| u \|_{L^1} \leq C \| f \|_{L^\infty} \quad , \quad \forall f \in L^\infty(\Omega) , \quad \operatorname{Supp} f \subset B \cap \Omega \tag{10}$$

où u est la solution de (3).

Etape 2: Démonstration de (10).

Au vu de (6), il nous suffit d'obtenir une estimation L^1 sur $\Omega - B$. En utilisant le principe du maximum, on peut supposer sans restreindre la généralité que $f, u \geq 0$. Et comme la solution u de (3) est alors croissante par rapport à Ω, on peut également supposer que $\bar{B} \subset \Omega$. Ceci permet alors de vérifier grâce au principe du maximum l'inégalité suivante

$$0 \leq u \leq \frac{1}{C_0} \| f \|_{L^\infty} w \tag{11}$$

où w est la solution de

$$Aw = 0 \text{ dans } \Omega - B , \; w = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \; w = 1 \text{ sur } \partial B , \; w \in H^1 . \tag{12}$$

Et nous pouvons conclure si nous montrons l'existence de $C, \mu > 0$ (ne dépendant que des quantités voulues) telles que

$$0 \leq w(x) \leq C \exp(-\mu |x|) . \tag{13}$$

Cette inégalité est facile à obtenir si $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^N)$: en effet, il suffit d'observer que $z(x) = \exp(-\mu |x|)$ vérifie

$$Az \geq - C_1 \mu z + c_0 z \qquad \text{sur } \Omega - B$$

où C_1 ne dépend que de $\| a_{ij} \|_{L^\infty}, \| \partial_i a_{ij} \|_{L^\infty}, \| b_i \|_{L^\infty}$.

Donc, si $\mu \leq \dfrac{c_0}{C_1}$, z est une sursolution de (12) et (13) est démontrée avec $C = e^\mu$.

Dans le cas général, il nous faut raisonner autrement. On observe tout d'abord que $\tilde{w} = w\,(\exp \mu\, |x|)$ vérifie

$$\text{(14)} \qquad \tilde{A}_\mu \tilde{w} = 0 \ \text{dans}\ \Omega - B\,,\ \tilde{w} = 0 \ \text{sur}\ \partial\Omega\,,\ \tilde{w} = e^{\mu} \ \text{sur}\ \partial B\,,\ \tilde{w} \in H^1$$

où $\tilde{A}_\mu$ est l'opérateur donné par

$$\left|\begin{aligned} \tilde{A}_\mu \varphi = &- \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) + \sum_i \left(b_i + \mu \sum_j a_{ji}\frac{x_j}{|x|}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \\ &+ \left(c - \mu \sum_i b_i \frac{x_i}{|x|} - \mu^2 \sum_{i,j} a_{ij}\frac{x_i\, x_j}{|x|^2}\right)\varphi + \mu \sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{x_j}{|x|}\,\varphi\right). \end{aligned}\right.$$

Soit $\mu_0 > 0$ suffisamment petit pour que

$$\mu_0 \sum_{i,j} \| a_{ij} \|_{L^\infty} \leq 1\,, \quad c - \mu \sum_i |\, b_i \,| - \mu^2 \sum_{i,j} |\, a_{ij} \,| \geq \frac{c_0}{2}\,.$$

On va déterminer $\mu < \mu_0$ de façon à ce que la solution $\tilde{w}$ de (14) soit bornée (indépendamment de Ω). Or, toujours d'après [4] (théorèmes 8.25-8.26), il nous suffit d'obtenir une estimation du type suivant

$$\text{(15)} \qquad \sup_{y \in \Omega - B} \int_{(y+B) \cap (\Omega - B)} |\, \tilde{w} \,|\, dx \leq C\,.$$

Pour ce faire, nous reprenons la méthode itérative introduite dans [5]: on introduit $\lambda_0 > 0$ (indépendant de Ω, $\mu \in\,]0\,, \mu_0]$) tel que

$$\langle \tilde{A}_\mu \varphi\,, \varphi \rangle \geq -\lambda_0\, |\, \varphi\,|^2_{L^2(\Omega - B)} \quad , \quad \forall \varphi \in H^1_0(\Omega - B)\,.$$

Puis on choisit $\lambda > \lambda_0$ et on construit la suite $(\tilde{w}^n)$ définie comme suit: $\tilde{w}^0 = 0$ et $\tilde{w}^n$ (pour $n \geq 1$) est la solution de:

$$\text{(16)} \qquad \left\{\begin{aligned} &\tilde{A}_\mu \tilde{w}^n + \lambda \tilde{w}^n = \lambda \tilde{w}^{n-1} \ \text{dans}\ \Omega - B\,,\ \tilde{w}^n = 0 \ \text{sur}\ \partial\Omega\,, \\ &\tilde{w}^n = e^{\mu} \ \text{sur}\ \partial B\,,\ \tilde{w}^n \in H^1(\Omega - B)\,. \end{aligned}\right.$$

On vérifie sans peine que $(\tilde{w}^n)_n$ est croissante et qu'il existe une constante C_n telle que

$$0 \leq \tilde{w}_n \leq C_n \ \text{sur}\ \Omega\,.$$

En prenant $\zeta \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$, $\zeta \equiv 0$ sur B, $\zeta \equiv 1$ sur $\mathbf{R}^N - B_2$ et en multipliant l'équation précédente par $\zeta^2\, \tilde{w}^1\, (n = 1)$ on obtient facilement

$$\int_{\Omega - B} (\tilde{w}^1)^2\, dx \leq C$$

d'où pour tout $\alpha \in [2, +\infty]$

$$\int_{\Omega-B} (\tilde{w}^1)^\alpha \, dx \leq C . \tag{17}$$

On introduit finalement $z^n = \tilde{w}^n - \tilde{w}^{n-1}$ qui vérifie d'après (16): $z^1 = \tilde{w}^1$ et pour $n \geq 2$

$$\tilde{A}_\mu z^n + \lambda z^n = \lambda z^{n-1} \quad \text{dans} \quad \Omega - B \,, \quad z^n \in H_0^1(\Omega - B) \,. \tag{16'}$$

En multipliant (16') par $(z^n)^p$ où $p \in [2, \infty[$ sera déterminé plus loin, on trouve

$$p\nu \int |\nabla z^n|^2 \, |z^n|^{p-1} - C(1 + \mu p) \int |\nabla z^n| \, |z^n|^p +$$

$$\left(\frac{c_0}{2} + \lambda\right) \int |z^n|^{p+1} \leq \lambda \int |z^{n-1}| \, |z^n|^p \,.$$

Donc, si on choisit $p = \max(1, 4\,C^2/(c_0\nu))$ et $\mu = \min(\mu_0, 1/p)$, on déduit finalement en posant $\delta = c_0/4$:

$$(\lambda + \delta) \int |z^n|^{p+1} \leq \lambda \int |z^{n-1}| \, |z^n|^p \leq \lambda \left(\int |z^{n-1}|^{p+1}\right)^{1/(p+1)} \left(\int |z^n|^{p+1}\right)^{p/p(+1)}$$

d'où d'après (17)

$$\| z^n \|_{L^{p+1}} \leq C \left(\frac{\lambda}{\lambda + \delta}\right)^{n-1} .$$

Ceci assure que $\tilde{w}^n$ est bornée dans L^{p+1} (indépendamment de $\Omega, n \ldots$) et comme (cf. [5]) $\tilde{w}^n$ converge vers $\tilde{w}$, (15) est démontrée.

3. Une démonstration directe dans un cas particulier

Dans cette section, nous montrons comment obtenir directement une estimation L^2 à condition toutefois de faire une hypothèse supplémentaire sur b à savoir: $b = b^1 + b^2$ avec $b^1, b^2 \in L^1_{loc}$ et

$$\exists\, \delta_1 \in\,]0, 2(\nu C_0)^{1/2}[\,, \quad \text{mes}\,(|b^1| > \delta_1) < \infty \tag{18}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}\, b^2 \ \text{est une mesure de Radon, } (\text{div}\, b^2)^+ \in L^1_{loc} \ \text{et il existe} \\ \delta_2 > 0 \ \text{tel que mes}\,(\text{div}\, b^2 > \delta_2) < \infty \end{array} \right. \tag{19}$$

et

$$\delta_2/2 < C_0 - \delta_1^2/(4\nu)\,. \tag{20}$$

En effet, sous cette hypothèse, on peut adapter la méthode de [5]: soit $u^0 = 0$, on considère u^n la solution de (pour $n \geq 1$)

$$Au^n + \lambda u^n = \lambda u^{n-1} \qquad \text{dans} \quad \Omega\,, \quad u^n \in H_0^1(\Omega);$$

où $\lambda > \lambda_0$ (avec les notations précédentes). On note que la borne H^1 de u^n dépend de n mais pas de Ω. Ensuite, on considère $v^n = u^n - u^{n-1}$ et on observe que pour $n \geq n_0$ (n_0 indépendant de Ω) $v^n \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Puis, on vérifie aisément comme dans la section précédente que pour p grand (indépendant de Ω), il existe δ, $\theta \in]0\,, 1[$ tel que

$$\| v^n \|_{L^{p+1}(\Omega)} \leq \theta \, \| v^{n-1} \|_{L^{p+1}(\Omega)} \quad \text{si } n > n_0\,.$$

Comme u^n converge dans H^1 vers u (cf. [5]) on a ainsi décomposé u de la manière suivante

$$u = u^{n_0} + \sum_{n > n_0} u^n - u^{n-1} = v_1 + v_2$$

où v_1 est borné dans H_0^1 (indépendamment de Ω) et v_2 est borné dans L^p (indépendamment de Ω) avec $2 < p < \infty$. Remarquer au passage que cette décomposition n'utilise pas (18)-(20).

La borne L^2 s'obtient alors en utilisant (18)-(20) comme suit: on multiplie par u et on intègre par parties de sorte que

$$\nu \int_\Omega |\nabla u|^2 \,dx + C_0 \int_\Omega u^2 \,dx \leq \int_\Omega |b^1| \, |\nabla u| \, |u| \,dx - \int_\Omega b^2 \, \nabla\left(\frac{u^2}{2}\right) dx$$

$$\leq \delta_1 \int_\Omega |\nabla u| \; |u| \,dx + \frac{\delta_2}{2} \int_\Omega u^2 \,dx + C \int_\Omega 1_{(|b^1| > \delta_1)} \, |\nabla u| \; |u| \,dx +$$

$$+ C \int_\Omega 1_{(\operatorname{div} b^2 > \delta_2)} \, \frac{u^2}{2} \,dx\,.$$

En utilisant (18)-(20) pour borner les termes en δ_1, δ_2 et en utilisant la décomposition de u avec le fait que les ensembles ($|b^1| > \delta_1$), ($\operatorname{div} b^2 > \delta_2$) sont de mesure finie, on conclut facilement.

Quelques remarques finales: *i*) la démonstration précédente ne semble pas couvrir le cas général, *ii*) par contre, elle permet de traiter le cas où $f \in H^{-1}$

tandis que la démonstration donnée en 2 ne semble pas s'adapter à ce cas (en tout cas sans supposer que les a_{ij} sont Lipschitziens), *iii*) enfin, dans le théorème principal, si $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ et si $f \in L^p(\Omega)$ alors $u \in W^{2,p}(\Omega)$ $(1 < p < \infty$, Ω régulier).

Références

[1] A. Alvino et G. Trombetti (1979) – *Equazioni ellittiche con termini di ordine inferiore e riordinamenti*. « Rend. Acc. Naz. Lincei », *66*, 1-5.

[2] G. Bottaro et M. Marina (1973) – « Boll. U.M.I. », 46-56.

[3] P. Donato et G. Giachetti – *Quasilinear elliptic equations with quadratic growth on unbounded domains*. A paraître au « Nonlinear Anal. T.M.A. ».

[4] D. Gilbarg et N. Trudinger (1977) – *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer, Berlin.

[5] P.L. Lions (1980) – *A remark on some elliptic second-order problems*. « Boll. U.M.I. », *17*, 267-270.

[6] G. Stampacchia (1965) – *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*. « Ann. Inst. Fourier », *15*, 189-258.